E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

T.D. numéro 1

Algèbre

Exercice 1 Soient E et F des ensembles, et $f : E \to F$ une application de E dans F.

1. Soit $\hat{f} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ l'application qui à une partie A de E associe son image directe $f(A)$ par f. Montrer que $\hat{f}$ est injective (respectivement surjective) si, et seulement si, f est injective (resp. surjective).

2. Soit $\tilde{f} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ l'application qui à une partie B de F associe son image réciproque $f^{-1}(B)$ par f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\tilde{f}$ soit injective (respectivement surjective).

Exercice 2 Soit G un groupe opérant transitivement sur un ensemble S. Soit $x \in S$. Notons $H = \{g \in G ; g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x. Montrer qu'il existe une bijection $\phi : S \xrightarrow{\sim} G/H$ telle que :

$$\forall y \in S \qquad \forall g \in G \qquad \phi(g \cdot y) = g \cdot \phi(y)$$

Exercice 3 Soient p un nombre premier, et G un groupe fini dont le cardinal est une puissance de p (on dit que G est un p-groupe).

1. Soit X un ensemble fini sur lequel G agit. On suppose que le cardinal de X n'est pas multiple de p. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g \cdot x = x$ (on dit alors que x est un point fixe sous l'action de G).

Notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un morphisme de groupes.

2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que, pour tout $g \in G$, on ait $\rho(g)(x) = x$.

3. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $g \in G$, la matrice $A\rho(g)A^{-1}$ soit triangulaire supérieure avec une diagonale de 1.

Exercice 4 Soient a un entier strictement positif, et p un nombre premier. Notons $X = \{1, 2, \ldots, a\}^p$ l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ d'entiers compris entre 1 et a.

1. Montrer qu'il existe une action, et une seule, de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X telle que $1 \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in X$ (on note ici 1 l'unité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

2. Pour l'action déterminée à la question précédente, quels sont les cardinaux des orbites ?

3. En déduire le petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier naturel, alors a^p est congru à a modulo p.

Exercice 5 Soient G un groupe, et H un sous-groupe d'indice fini $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G, contenu dans H et tel que $[G:K]$ divise $n!$. (Indication : utiliser l'action de G sur G/H par translations à gauche)

2. On suppose G fini. Montrer que G n'est pas la réunion des gHg^{-1} pour $g \in G$.

3. Démontrer que la conclusion de la question 2. reste valable si G est infini.

4. On ne suppose plus que l'indice de H dans G est fini; peut-on encore affirmer que G n'est pas la réunion des gHg^{-1} pour $g \in G$?

5. Soit E un espace vectoriel de dimension d sur un corps fini. Soit k un entier compris entre 1 et $d-1$. Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ n'ayant aucun sous-espace stable de dimension k.

6. Soient k un entier supérieur ou égal à 5, et H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ d'indice n compris entre 2 et $k-1$. Montrer que H est nécessairement le sous-groupe alterné $\mathfrak{A}_k$. (Indication : utiliser (et admettre) le fait que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_k$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{S}_k$).

Exercice 6 Soient G un groupe fini et $\mathbb{K}$ un corps. Montrer qu'il existe un entier n strictement positif et un morphisme de groupes injectif ρ de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 Soient G un groupe fini, et p le plus petit facteur premier du cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe H de G d'indice p est distingué.