E.N.S. Ulm, L3, 2000–2003
Univ. Paris-Sud, M1, 2004–2007
Stéphane Fischler

T.D. numéro 16
Algèbre

Exercice 1 Cet exercice est consacré à différentes formulations de l'axiome du choix. Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) Pour tout ensemble E non vide, il existe une fonction $c : \mathcal{P}(E) \to E$ telle que, pour toute partie non vide X de E, on ait $c(X) \in X$.

   (ii) Pour toute application surjective $f : E \to F$, il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

   (iii) Pour toute partition $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E, il existe une partie B ayant exactement un élément en commun avec chacun des A_i.

   (iv) Pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ d'ensembles non vides, le produit $\prod_{i \in I} X_i$ est non vide (i.e. il existe une application f telle que $f(i) \in X_i$ pour tout $i \in I$).

On appelle *axiome du choix* l'hypothèse suivant laquelle ces assertions sont vérifiées.

2. Démontrer que l'assertion (i) de la question 1. est vraie quand $E = \mathbb{N}$, même si on ne suppose pas l'axiome du choix.

Dans cet exercice, on suppose que l'axiome du choix est vrai, et on admet qu'il implique le lemme de Zorn : *Soit X un ensemble ordonné non vide, dont toute partie totalement ordonnée admet un majorant. Alors X admet un élément maximal* (voir l'exercice 3 pour une preuve et des rappels sur les définitions).

3. Démontrer que tout espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$ admet une base. (Indication : on pourra appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des parties de V formées d'éléments linéairement indépendants)

Exercice 2 Soit A un anneau commutatif.

1. Soit P un idéal premier de A (par définition, cela implique $P \neq A$). Soient $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux tels que $I_1 I_2 \ldots I_n$ soit inclus dans P. Montrer que l'un (au moins) des I_k est inclus dans P.

2. Soit I un idéal de A, distinct de A, qui n'est pas premier. Montrer qu'il existe des idéaux I_1 et I_2 de A, distincts de I, tels que $I \subset I_1$, $I \subset I_2$ et $I_1 I_2 \subset I$.

3. Montrer, en utilisant le lemme de Zorn, qu'il existe un idéal premier de A minimal pour l'inclusion.

On suppose désormais que A est noethérien, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite infinie strictement croissante d'idéaux de A.

4. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $P_1, \dots, P_r$ tels que $P_1 P_2 \dots P_r \subset I$. (Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et construire une suite infinie strictement croissante d'idéaux de A)

5. Montrer que le nombre d'idéaux premiers de A qui sont minimaux pour l'inclusion est fini et non nul. (On pourra utiliser les questions 1., 3. et 4.)

Exercice 3 Le lemme de Zorn Le but de cet exercice est de démontrer (en utilisant l'axiome du choix) le lemme de Zorn : *Soit X un ensemble ordonné non vide, dont toute partie totalement ordonnée admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.* (en fait, avec les définitions ci-dessous, la partie vide est totalement ordonnée donc l'existence d'un majorant pour cette partie rend superflue l'hypothèse que X est non vide)

Un *ensemble ordonné* X est un ensemble muni d'une relation d'ordre (notée $\leq$), i.e. d'une relation réflexive, transitive et antisymétrique. Etant donné une partie A de X, on dit que $x \in X$ est un *majorant* de A si on a $x \geq a$ pour tout $a \in A$. Si il existe un tel majorant x qui appartienne à A, alors il est unique et on l'appelle le *plus grand élément* de A. On dit que $x \in A$ est un *élément maximal* de A si pour tout $y \in A$ tel que $y \geq x$, on a $y = x$.

On dit que A est *totalement ordonnée* (ou que l'ordre sur A est total) si pour tous $x, y \in A$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit que A est *bien ordonnée* (ou que $\leq$ est un bon ordre sur A) si A est totalement ordonnée et que toute partie non vide de A admet un plus petit élément.

Soient A et B deux parties de X. On dit que A est *fermée* dans B si on a $A \subset B$ et si pour tous $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b \leq a$, on a $b \in A$.

1. Démontrer que le lemme de Zorn cité ci-dessus est une version faible de l'énoncé suivant : *Soit X un ensemble ordonné, dont toute partie bien ordonnée admet un majorant. Alors X admet un élément maximal.*

Dans la suite de cet exercice, on démontre que l'axiome du choix implique la version forte énoncée à la question 1. On fixe donc un ensemble ordonné X, dont toute partie bien ordonnée admet un majorant. On suppose que X n'admet pas d'élément maximal. On note $\mathcal{P}_{\mathrm{BO}}(X)$ l'ensemble des parties bien ordonnées de X.

2. En utilisant l'axiome du choix, démontrer qu'il existe une fonction $g : \mathcal{P}_{\mathrm{BO}}(X) \to X$ telle que, pour tout $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{BO}}(X)$, on ait $g(C) \notin C$ et $g(C)$ soit un majorant de C.

3. Soit $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{BO}}(X)$. Démontrer que les parties fermées dans C, et distinctes de C, sont exactement celles de la forme $\{x \in C, x < c\}$ pour $c \in C$.

On appelle g-ensemble toute partie $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{BO}}(X)$ telle que $c = g(\{x \in C, x < c\})$ pour tout $c \in C$.

4. Soit C un g-ensemble. Démontrer que $C \cup \{g(C)\}$ est un g-ensemble, qui contient strictement C.

5. Soient C et D deux g-ensembles. Démontrer que ou bien C est fermé dans D, ou bien D est fermé dans C. (Indication : on pourra considérer la réunion W de toutes les parties B qui sont fermées à la fois dans C et dans D)

6. Conclure. (Indication : on pourra considérer la réunion W' de tous les g-ensembles)