Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation

Analyse Semiclassique (2019-2020, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher

Devoir à remettre dans la semaine du 18 novembre 2019

Preuve du théorème de Beals

Ce devoir a comme objectif la démonstration du théorème de Beals, qui caractérise les opérateurs dans la classe $\Psi_\hbar(1)$. Nous commençons par montrer le « théorème de Calderón-Vaillancourt inverse » évoqué dans le cours.

Théorème 1 (C-V inverse)**.** *Il existe des constantes $M_d \in \mathbb{N}$, $C_d > 0$ telles que, pour tout symbole $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$, on peut caractériser le fait que $a \in L^\infty$ en fonction d'un certain nombre d'opérateurs $\mathrm{Op}_\hbar^t(\bullet)$ associés :*

$$(1) \qquad \forall t \in [0,1], \quad \forall \hbar \in (0,1], \qquad \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq M_d} \hbar^{|\alpha|/2} \| \mathrm{Op}_\hbar^t(\partial^\alpha a)\|_{L^2 \to L^2} \,.$$

(si un des opérateurs n'est pas borné sur L^2, le membre de droite est infini).

Dans un premier temps on supposera que $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, et on considèrera le cas $t = 1$ (quantification à droite) et $\hbar = 1$.

1. Pour des fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donner l'expression intégrale du produit scalaire

   $$(2) \qquad \langle \varphi, \mathrm{Op}_1^R(a)\psi \rangle_{L^2}.$$

   Vérifier que la fonction $b(x,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} a(x,\xi)\,\overline{\varphi(x)}\,\hat{\psi}(\xi)\,e^{i\xi\cdot x}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Exprimer le produit scalaire ci-dessus en terme de cette fonction

2. On cherche des informations sur la fonction $b(\rho)$, par le biais de sa transformée de Fourier $\hat{b}(V_0)$. Montrer que pour tout $V_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, $\hat{b}(V_0)$ peut s'exprimer en terme d'un produit scalaire similaire à (2), qui fait intervenir des translatés de φ et ψ dans l'espace des phases.

3. Déduire de ces expressions une borne uniforme sur $\hat{b}(V_0)$, en termes de $\| \mathrm{Op}_1^R(a)\|_{L^2 \to L^2}$ et des fonctions φ et ψ.

4. En introduisant un opérateur différentiel adéquat L_{V_0}, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut également obtenir une borne uniforme sur la fonction $\langle V_0 \rangle^n \hat{b}(V_0)$, en fonction des normes $L^2 \to L^2$ d'un certain nombre d'opérateurs $\mathrm{Op}_1^R(\partial^\alpha a)$, et de φ, ψ.

5. Montrer qu'en prenant n assez grand (donner la valeur explicite), on obtient ainsi une borne uniforme sur $b(\rho)$, en terme de ces opérateurs.

6. On choisit maintenant les fonctions φ, ψ, telles que $|\varphi(x)|$ et $|\hat{\psi}(\xi)|$ sont égales à 1 dans un voisinage de l'origine. Montrer qu'on obtient ainsi une borne uniforme sur $a(\rho)$ dans une voisinage $U \subset \mathbb{R}^{2d}$ de l'origine.

7. Montrer qu'on peut obtenir la même borne pour $a(\rho)$ dans le voisinage translaté $U + v$, pour n'importe quel vecteur de translation $v \in \mathbb{R}^{2d}$. En déduire la borne (1) dans le cas $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, $\hbar = 1$.

8. Expliquer comment étendre la preuve en supposant au départ seulement que $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$.

9. Pour $t \in [0,1]$, et en prenant $A = \mathrm{Op}_1^t(a_t) = \mathrm{Op}_1^R(a_1)$, rappeler l'expression de a_t en fonction de $a_1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$, et vice-versa. En déduire une borne sur $\|a_t\|_{L^\infty}$ en fonction d'un certain nombre de normes $\| \mathrm{Op}_1^t(\partial^\alpha a_t)\|_{L^2 \to L^2}$ (on estimera le nombre M_d de dérivées nécessaires).

10. Achever la preuve de (1) en expliquant comment passer du cas $\hbar = 1$ au cas $\hbar < 1$.

On va maintenant déduire du Théorème 1 le Théorème de Beals, en complétant les étapes de la preuve donnée dans le cours. Pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^{2d}$, on notera $\ell(\rho) = \ell_V(\rho) = \omega(V, \rho)$ la forme linéaire associée. Pour deux opérateurs A, B, on note le commutateur $[A, B] = \mathrm{ad}_A B$.

Théorème 2 (Beals). *Soit $A(\hbar) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une famille d'opérateurs linéaires continus. Fixons $t \in [0,1]$, et notons $A(\hbar) = \mathrm{Op}_\hbar^t(a)$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Le symbol $a = a(h)$ est dans la classe $S(1)$.

ii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute famille $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N)$ de formes linéaires, il existe $C_{\vec{\ell}} > 0$ tel que

$$\forall \hbar \in (0,1], \qquad \|\mathrm{ad}_{\mathrm{Op}_\hbar(\ell_N)} \cdots \mathrm{ad}_{\mathrm{Op}_\hbar(\ell_1)} A(\hbar)\|_{L^2 \to L^2} \leq C_{\vec{\ell}}\, \hbar^N \,. \tag{3}$$

11. Calculer explicitement l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar^t(\ell)$, et vérifier qu'il ne dépend pas de $t \in [0,1]$. Cet opérateur est-il dans la classe $\Psi_\hbar(1)$?

12. Pour une forme linéaire $\ell = \ell_V$ et un symbole $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$, calculer le t-symbole de l'opérateur $[\mathrm{Op}_\hbar(\ell), \mathrm{Op}_\hbar^t(a)]$. Etendre ce calcul à tout symbole $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$.

13. En déduire que si $a \in S(1)$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathrm{Op}_\hbar(\ell)} \mathrm{Op}_\hbar^t(a)$ est dans $\hbar\Psi_\hbar(1)$. Montrer l'implication $i) \Longrightarrow ii)$.

14. En utilisant le théorème 1, montrer l'implication $ii) \Longrightarrow i)$.

15. En utilisant le théorème de Beals, retrouver rapidement le fait que si $a, b \in S(1)$, alors l'opérateur produit $\mathrm{Op}_\hbar^t(a) \circ \mathrm{Op}_\hbar^t(b)$ est dans la classe $\Psi_\hbar(1)$.