Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \text{et} \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Solution : Notons que $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (resp. $\liminf$) est le plus grand (resp. petit) nombre dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est la limite d'une sous-suite (un extrait) de $(x_n)_{n\geq 1}$.

Et on a $f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{y\to\infty} f(y_n)$ car f est continue.

Prenons $x_{n_k} \longrightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n$, alors $f(x_{n_k}) \to f(\limsup_{n\to\infty} x_n)$,

donc $f(\limsup_{n\to\infty} x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$ justifier cette inégalité

Soit $y_n = \sup_{k\geq n} \{x_k\}$, alors $y_n \longrightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n$ et (y_n) est une suite décroissante. ok On a donc

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \quad \text{ok}$$

$f(y_n) \geq f(x_k)$, $\forall\, k\geq n$, ainsi $f(y_n) \geq \sup_{k\geq n} f(x_k)$ ok

justifier cette inégalité (f est croissante)

donc $f(\limsup_{n\to\infty} x_n) \geq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, ainsi l'égalité est vraie.

On a également $f(\liminf x_n) = \liminf f(x_n)$

Si f est décroissante, les deux égalités sont encore vraies. NON ! Il faut alors échanger \limsup et \liminf.

Exercice 3. (Fonctions indicatrices) Soit E un ensemble. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caractéristique de A ou tout simplement l'indicatrice de A).

1. Si $A, B \subset E$, écrire $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 1} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.
3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,\infty[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[0,n]}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}.$$

Solution :

REVOIR

1. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$ ok NON, le max n'est pas donné par le produit

$\mathbb{1}_{A\cap B} = 1 - \mathbb{1}_{A\cup B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

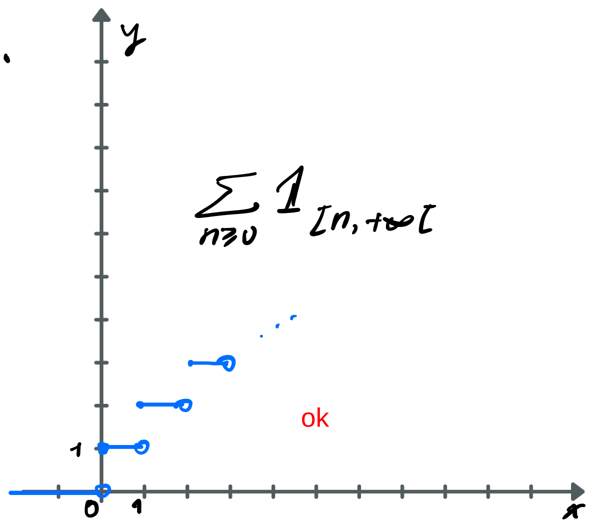
NON ok non

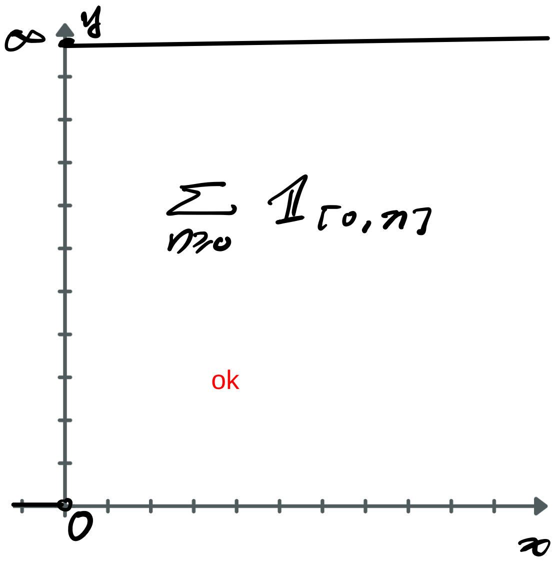
2. $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 1} A_n} = \inf_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = \prod_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$, ok. comparer avec la question 1

$\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = \sup_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = \prod_{n\geq 1} (1 - \mathbb{1}_{A_n})$ NON (ex: prendre A_n=\emptyset pour tout n).

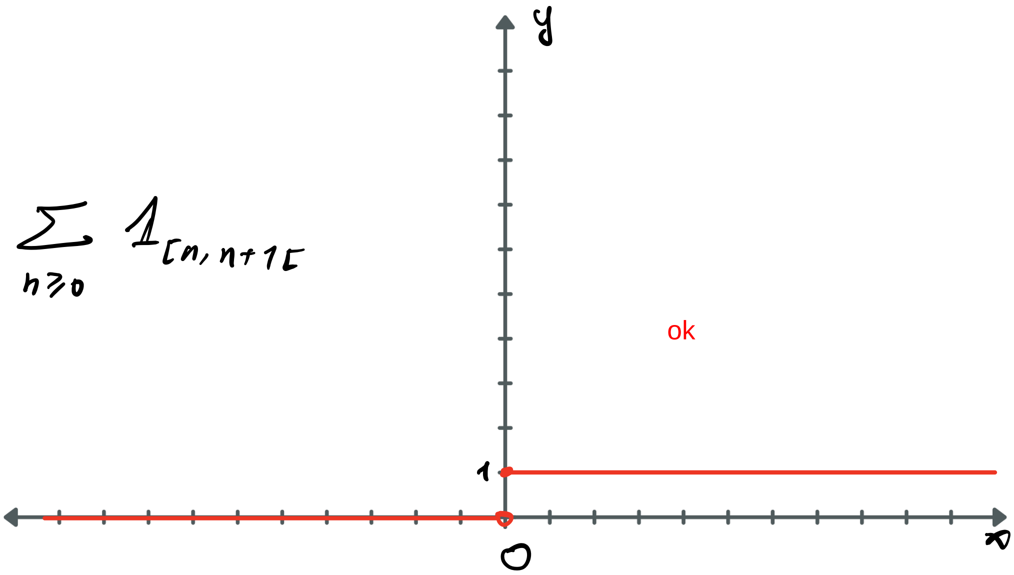
oui

3.





$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}$



Exercice 4. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\,,\quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\ ?$$

Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n},\quad \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

Solution : 1. $\mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$. $\mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$

ok pour les formules, mais il faut les justifier!

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$, $\quad \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}$.

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$, $\quad \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$.

Démonstration : (a) $(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = (\bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_n)^c = \bigcup\limits_{n\geq 1} (\bigcup\limits_{k\geq n} A_n)^c$

$$= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_n^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$$ OK

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$\boxed{\left(\bigcap\limits_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcup\limits_{k\geq m} A_k \,.\ \forall m\geq n\right)}$ ne suffit pas à justifier l'inclusion ci-dessus

(b) $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \iff \forall n\geq 1, \exists k\geq n.\ x\in A_k$ ok

$\iff \{n : x\in A_n\}$ est infinie ok

$\iff x \in \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$ ok

$x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \iff \exists n\geq 1, \forall k\geq n.\ x\in A_k$ ok

$\iff \exists n\geq 1.\ \forall k\geq n,\ x\notin A_k^c$

$\iff x \in \{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n^c} < \infty\}$ ok

(c) $\limsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n \cup B_n} = \infty \}$

$= \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \} \cup \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{B_n} = \infty \}$ justifier cette égalité

$= \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$

$\limsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n \cap B_n} = \infty \}$

justifier cette ligne $\subseteq \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \} \cap \{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{B_n} = \infty \}$

$= \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$

3. Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ dans les cas suivants

(a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,

(b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2p} = 1 + 1/(2p)$ et $a_{2p+1} = -1 - 1/(2p+1)$,

(c) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2p)[$ et $A_{2n+1} =]-1-1/(3p), 2]$, Ça doit être " $A_{2p} =]0, 3+1/2p[$ et $A_{2p+1} = \cdots$ " je crois

(d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,

(e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

Solution: (a) $\limsup A_n = F \cup G$, $\liminf A_n = F \cap G$ ok

(b) $\limsup A_n =]-\infty, 1]$, $\liminf A_n =]-\infty, -1[$ ok

(c) $\limsup A_n = [-1, 3]$, $\liminf A_n =]0, 2]$ ok

(d) $\limsup A_n = \{0\}$, $\liminf A_n = \{0\}$ ok

(e) $\limsup A_n =]-2, 2[$, $\liminf A_n = \{0\}$

Toutes ces égalités sont justes, mais il faut les justifier !

Exercice 5. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E; \quad f(x) \geq n\}, \qquad B_{n,i} = \{x \in E; \quad i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n)}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose $f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}} + n\mathbb{1}_{A_n}$. Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$?

Solution : On a : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ok

① Si $f(x) \in \mathbb{R}$, alors $n > f(x) \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}}$ (x)

on prends i t.q. $f(x) \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$. donc $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$ ok

donc $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$. donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

② Si $f(x) = +\infty$ alors $\forall n, x \in A_n, \forall n, i, x \notin B_{n,i}$

donc $f_n(x) = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$ ok

Conclusion : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$