Essaye de faire moins de ratures, c'est parfois difficile à lire.

TD1. 2

Ex 1

1. $\inf_{n\geq k}\mu(A_n) \geq \mu(\bigcap_{n\geq k} A_n)$ ok, expliquer pourquoi

$k\to+\infty$ On a $\liminf \mu(A_n) \geq \mu(\liminf A_n)$

$\mu(\bigcup_{n\geq k} A_n) \geq \sup_{n\geq k}\mu(A_n)$ ok

Si $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) < +\infty$ $k\to+\infty$ $\mu(\bigcup_{n\geq k} A_n) \xrightarrow{\text{expliquer}} \mu(\limsup A_n)$

Donc on a $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$

Mais si $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \infty$, On a un contre exemple.

Soit μ la Mesure de Lebesgue

$A_n = [n, +\infty[$ $\limsup A_n = \emptyset$ Donc $\mu(\limsup A_n) = 0$

Mais $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n Donc $\limsup \mu(A_n) = +\infty$ ok

Les équations sont OK, mais il faut mieux les expliquer: dire pourquoi les limites k\to\infty correspondent effectivement aux expressions que tu écris. Ex: dire pourquoi \mu(\liminf A_n) est la limite des \mu(\cap_{n\geq k} A_n)

2. $\cancel{\sup_{n\geq k}\mu(A_n) \leq}\ \mu(\bigcup_{n\geq k} A_n) \leq \sum_{n\geq k}\mu(A_n)$

$\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq k}\mu(A_n) \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \boxed{\Rightarrow} \cancel{\limsup \mu(A_n) = 0}$

mieux justifier $\mu(\limsup A_n) = 0$

3. $A_{p,q} := \{ x\in[0,1] \mid |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \}$

$\mu(\bigcup_{p\in[0,q]} A_{p,q}) = \frac{2q}{q^{2+\varepsilon}} = \frac{2}{q^{1+\varepsilon}}$ OK

Donc on a $\mu(\bigcup_{q\geq 1}\bigcup_{p\in[0,q]} A_{p,q}) = \sum_{q\geq 1}\frac{2}{q^{1+\varepsilon}} < +\infty$ OK

inutile (cette union est prise en charge par la limsup)

$A_q := \boxed{\bigcup_{n\geq q}} \bigcup_{p\in[0,n]} A_{p,n}$ ~~On a~~

On utilise le lemme $\mu(\limsup A_q) = 0$

On a.

C.a.d. $A := \{ x\in[0,1] \mid$ il existe infini de q t.q. $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \} = \limsup A_q$

$= \{ x\in[0,1] \mid$ il existe infini de p,q t.q. $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \}$

$\mu(A) = 0$ # OK

Ex 2. $\exists a$ tq. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\mu(\{n\}) = a$. $\mu(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) < +\infty \Rightarrow a=0 \Rightarrow \mu(\mathbb{Z})=0$

Conclusion: la seule mesure sur Z ayant cette propriété d'invariance par translation est la mesure nulle.

TD 2.1

Ex 3. 1. $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{F}_B$ Soit $X_1 = Y_1 \cap B$ $X_2 = Y_2 \cap B$ $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$

$\emptyset = \emptyset \cap B \in \mathcal{F}_B$ $B = B \cap B \in \mathcal{F}_B$

ce n'est pas dans les axiomes d'une tribu

$\boxed{X_1 \cap X_2} = (Y_1 \cap Y_2) \cap B \in \mathcal{F}_B$

Il faut vérifier que F_B est invariante par les unions dénombrables.

$B - X_1 \cap B = X_1^c \cap B \in \mathcal{F}_B$

~~2. C'est faux.~~ ~~$X = \{0\}$ $X = Y = \{0,1\}$~~

~~$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(0,0),(0,1)\}, \{(1,1),(1,2)\},$~~

2. C'est faux $X = \{0,1,2\}$ $Y = \{0,1\}$ $\mathcal{F} = \sigma(\{(0,0),(0,0)\}, \{(1,1),(2,1)\}$

je n'arrive pas à lire

Alors $\mathcal{F}_X = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

n'est pas un tribu

ok. Il y avait plus simple comme contre-exemple

3.

le justifier

Evidement $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{2\mathbb{N} \notin \mathcal{F}_n}$ $\Rightarrow 2\mathbb{N} \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{2n\} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\} = 2\mathbb{N} \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ n'est pas un tribu

OK

~~4. $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c \to \mathcal{A}^c := \{A \mid A^c \in \mathcal{A}\}$~~

~~$\mathcal{A}_2 := \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \mathcal{A}_1\}$ $\mathcal{A}_3 = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \mathcal{A}_2\}$~~

~~Soit $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensemble qui est dans $\mathcal{A}_3$.~~

~~$A_k = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{k,l,m}\right)$ $A_{k,l,m} \in \mathcal{A}_1$~~

~~$A_k^c = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{k,l,m}^c\right) = \bigcup_{(m_l)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} A_{k,l,m_l}^c\right) \in$~~

~~Ex 3. 4.~~

TD12. Ex ~~1~~2 (Entropie d'une mesure discrète)

1. $\mu(\{k\}) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in E \qquad \mu(A) = \frac{|A|}{n} \quad \forall A \subset E$ OK

2. $\forall j \quad 0 < \mu(E_j) \le 1 \Rightarrow -\mu(E_j)\ln(\mu(E_j)) \ge 0$

et évidement on a $-\mu(E_j)\ln(\mu(E_j)) = 0 \Leftrightarrow \mu(E_j) = 0$ ou 1

Mais E_j est non vide $\Rightarrow \mu(E_j) \neq 0$

Donc $H(P) = 0 \Rightarrow N = 1$ et $\mu(E_1) = 1$ c.a.d ~~$\mu(E_1)$~~ $E_1 = E$ OK

3. $H(P) = -\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n-k}{n}\ln\left(\frac{n-k}{n}\right)$ ok

4. ~~$\eta(x+y) = -(x$~~ $\eta(x) + \eta(y) - \eta(x+y) = x\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) + y\ln\left(\frac{x+y}{y}\right) > 0$

$\forall x, y > 0$ c'est illisible

Soit $|E_j| > 1$ et $E_j' = \{x\}$ $E_{N+1} = E_j \setminus \{x\}$ non vide.

Soit $P' = \{E_1, \dots, E_{j-1}, E_j', E_{j+1}, \dots, E_N, E_{N+1}\}$

Soit $|E_k| = x_k$ Alors $x_{N+1} + 1 = x_j$

On a $H(P') = \sum_{k \in [\![1, N+1]\!] \setminus \{j\}} \eta\left(\frac{x_k}{n}\right) + \eta\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \sum_{k \in [\![1, N]\!] \setminus \{j\}} \eta\left(\frac{x_k}{n}\right) + \eta\left(\frac{1}{n}\right) + \eta\left(\frac{x_{N+1}}{n}\right)$

$> \sum_{k \in [\![1, N]\!] \setminus \{j\}} \eta\left(\frac{x_k}{n}\right) + \eta\left(\frac{x_j}{n}\right) = H(P)$ ok

5. $\forall$ partition P $\quad H(P) = \sum_{j \in [\![1, N]\!]} \eta\left(\frac{x_j}{n}\right) \le n\,\eta\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \ln n.$ ok

On obtenir "=" s.s.i $P = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$

ok

TD 1 EX 2

1. ~~Évidemment~~ $\cancel{S(\alpha f) = \alpha S(f) \quad \forall f \in \mathcal{E}(I,\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R}}$

$\forall f \in \mathcal{E}(I,\mathbb{R}) \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha f = \sum \alpha a_k \mathbb{1}_{I_k} \in \mathcal{E}(I,\mathbb{R})$

$$S(\alpha f) = \sum \alpha a_k \mu(I_k) = \alpha S(f)$$

attention, le membre de droite n'est pas une partition de I. Il faudrait réécrire f et g sur une même partition

$$f+g = \sum a_k \mathbb{1}_{I_k} + \sum b_k \mathbb{1}_{J_k} \in \mathcal{E}(I,\mathbb{R})$$

$$S(f+g) = \sum a_k \mu(I_k) + \sum b_k \mu(J_k) = S(f) + S(g)$$

$$|S(f) - S(g)| = |S(f-g)| \leq \mu(I) \, \|f-g\|_\infty$$

le montrer! Il faut utiliser la même partition

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N \quad \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \|\tilde{f}_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall n,m \geq N(\varepsilon)$ $\|f_n - \tilde{f}_n\|_\infty < \varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow |S(f_n) - S(f_m)| \leq \mu(I)\,\varepsilon$. Donc $S(f_n)$ converge

et $|S(f_n) - S(\tilde{f}_n)| \leq \mu(I)\,\varepsilon$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} S(\tilde{f}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(f_n)$

c.a.d $S(f)$ ~~est~~ $:= \lim\limits_{n\to+\infty} S(f_n)$ est bien défini; ok

3. Soit $f_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} f \quad g_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} g$ (f_n, g_n ~~sont~~ ~~fonctions~~ $\in \mathcal{E}(I,\mathbb{R})$, $f, g \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$)

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\cancel{S(f}$ $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} \alpha f + \beta g \Rightarrow S(\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(\alpha f_n + \beta g_n)$

$$= \alpha \lim_{n\to+\infty} S(f_n) + \beta \lim_{n\to+\infty} S(g_n)$$

$$= \alpha S(f) + \beta S(g)$$ ok

$$|S(f) - S(g)| = |S(f-g)| = \lim_{n\to+\infty} |S(f_n - g_n)|$$

$$\leq \mu(I) \lim_{n\to+\infty} \|f_n - g_n\|_\infty \leq \mu(I) \|f-g\|_\infty$$

justifier le fait que ces limites existent

4. $\hat{\mathcal{E}}(\alpha f) = \{|\alpha| p \mid p \in \hat{\mathcal{E}}(f)\} \Rightarrow N(\alpha f) = |\alpha| N(f)$

$\forall p_1 \in \hat{\mathcal{E}}(f)\ p_2 \in \hat{\mathcal{E}}(g) \qquad \cancel{p_1(x)+p_2(x)} \ p_1 + p_2 \in \mathcal{E}$

Et on a $\forall x \in I \quad p_1(x) + p_2(x) \geq |f(x)| + |g(x)| \geq |f(x)+g(x)|$

Donc $p_1 + p_2 \in \hat{\mathcal{E}}(f+g) \Rightarrow N(f) + N(g) = \inf\limits_{\substack{p_1 \in \hat{\mathcal{E}}(f) \\ p_2 \in \hat{\mathcal{E}}(g)}} S(p_1 + p_2) \geq \inf\limits_{p \in \hat{\mathcal{E}}(f+g)} S(p)$

$$= N(f+g)$$

OK