5 1. À partir de l'unicité de la mesure de Lebesque. on doit seulement déterminer ~~$\lambda(]a,b[)$~~ $\lambda(]a,b[)$ On ne cherche pas à déterminer \lambda, mais f_*\lambda. Ce que tu veux dire, c'est qu'il suffit de connaître f_*\lambda sur les intervalles]a,b[pour la caractériser sur tous les boréliens.

$$f_*\lambda(]a,b[) = \lambda(]\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}[) = \tfrac{1}{2}\lambda(]a,b[) \quad \text{pour tout }]a,b[\subseteq \mathbb{R}$$

Donc $f_*\lambda = \frac{1}{2}\lambda$ puisque ces 2 mesures de Borel coincident sur les intervalles ouverts, et qu'elles vérifient l'hypothèse de \sigma-finitude du corollaire.

2. On considère $[2^k, 2^{k+1}[$ où $k \in \mathbb{Z}$, on va montrer que $\mu([2^k, 2^{k+1}[) = 0$

Car μ est f-invariant. $\mu([2^k, 2^{k+1}[) = \mu(f[2^k, 2^{k+1}[) = \mu([2^{k+1}, 2^{k+2}[)$. Si $\mu([2^k, 2^{k+1}[) > 0$. Ça déduit que $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$, Contradiction ! Alors $\mu([2^k, 2^{k+1}[) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

C'est la même chose pour $]-2^{k+1}, -2^k]$

Donc $\mu(\mathbb{R}^*) = \mu\left(\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}}]-2^{k+1}, -2^k] \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} [2^k, 2^{k+1}[\right) \right) = 0$ OK

D'autre près. Si on prend $\mu(\{0\}) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

on a $\mu(]a, b[) = \begin{cases} 0 & 0 \notin]a, b[\\ \alpha & 0 \in]a, b[\end{cases}$

il faut vérifier que ce \mu est bien une mesure. Tu peux dire que \mu est égale à \alpha x \delta_0, avec \delta_0 la mesure de Dirac en x=0.

et Ça satisfait la demande que μ est f-invariant.

3. $f : x \longmapsto -x$

Il faut expliquer cet exemple et justifier que \lambda est bien invariante, il ne suffit pas de donner juste la formule.

4. f peut se décomposer en un produit de cycles. C'est-à-dire il exist plusieur de orbites dans lesquelles f est une permutation.

Alors tous les mesures f-invariant ~~est~~ doit être constant dans une orbite. Réciproquement une telle ~~fonction~~ mesure est f-invariant. OK. J''aurais aimé avoir un peu plus de détails.

6. 1. C'est bien défini car $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ converge.

Son image ~~est~~ appartient évidement $[0.1]$ et selon l'algorithme suivant. c'est exactement $[0.1]$.

· pour $0 \leq x \leq 1$. on prend $x_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$

ensuit. on prend $x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x - x_1 < \frac{1}{9} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{9} \leq x - x_1 < \frac{2}{9} \\ 2 & \text{si } \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$

Comme ça on défint une suite (x_n) et on a $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$. OK

2. (x_n) : $x_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$, alors $S((x_n)_n) = S((y_n)_n) = \frac{1}{3}$

(y_n) : $y_n = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2 & n > 1 \end{cases}$

Si $S((x_n)_n) = S((y_n)_n)$, soit m le ~~moins nombre~~ premier indice tel que $x_m \neq y_m$. On peut prend $x_m > y_m$

alors on a $x_m - y_m = 1$, $\begin{cases} x_n = 0 \\ y_n = 2 \end{cases}$ pour tout $n > m$. Pourquoi? Il faut mieux argumenter

Donc tout x admet au plus de 2 antécédents par S, ~~On sait~~ Tels x est rationnel donc

D est dénombrable. OK

3. $|\Sigma'| = |2^{\mathbb{N}}|$, on sait que ~~c'est ça~~ ça n'est pas dénombrable.

S'il y a ~~une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à satisfait que $S((x_n)_n) \in D$. il existe ~~ ~~tels que~~ (x_n)

deux suites (x_n). (y_n) tels que $S((x_n)_n) = S((y_n))$. il existe m tels que $x_m - y_m = 1$

mais x_m, y_m appartient $\{0, 2\}$. Contradiction ! OK

Donc $S|_{\Sigma'}$ est bijective alors K n'est pas dénombrable. OK