Certaines phrases et raisonnements sont difficiles à comprendre.

No. Date: / /

Devoirs - Léo

$\boxed{\text{td3.1}}$.

Exercice 1 :

Dém : d'abord, on va montre : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\{O \mid O$ est ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2\}$

Que veux-tu dire ici par "engendré"? Etre une union dénombrable d'ensembles O_1xO_2.

à justifier

et l'ensemble ouvert est engendré par $\{O_1 \times O_2 \mid O_1, O_2$ sont ensembles ouverts de $\mathbb{R}\}$

donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\{O_1 \times O_2 \mid O_1, O_2$ sont ensembles ouverts de $\mathbb{R}\}$.

et $\forall O_1, O_2$ sont ensembles ouverts de $\mathbb{R}$,

$O_1 \times O_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ensuite, on va montre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ \sigma

et $\forall A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ (i=1,2)$, $A_1 \times A_2 = (A_1 \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}) \times A_2)$

~~donc~~ on considère $\mathcal{B} := \{A \in (\mathbb{R}) \mid A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$.

① $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, car $\phi \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ~~est~~ sont ouverts de $\mathbb{R}^2$

② si $A \in \mathcal{B}$, donc $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow A^c \times \mathbb{R} = (A \times \mathbb{R})^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

③ si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{B}$, donc $A_i \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{B}$

Date: / /

par ①.②.③ on a $\mathcal{B}$ est tribu
et tout O est ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, $O \in \mathcal{B}$
donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$
donc $A_1 \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $\forall A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
comme ça, $\mathbb{R} \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\forall A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
donc $A_1 \times A_2 = (A_1 \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times A_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. $\forall A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

il y a une preuve beaucoup plus simple de cette inclusion: ces 2 tribus sont engendrées par 2 ensembles différents, dont l'un est inclus dans l'autre.

Exercice 3:

solve: 1. une example de mesure diffuse:
le mesure de Lebesgue

OK

une ~~ensem~~ example de mesure purement atomiques
sur $[\![1, n]\!]$, $\mu(i) = \frac{1}{n}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

OK

2. on suppose $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est une mesure
qui est diffuse. et purement atomique
car $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est une mesure diffuse, donc
$\{w \in E \mid w \text{ est un atome ponctuel}\} = \emptyset$
donc elle est porté par $\emptyset \Rightarrow \mu(E) = 0$
donc $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$.

OK

3. on suppose $C = \{w \in \Omega \mid w \text{ est un atone ponctuel}\}$
on défini:

No. Date: / /

$$\mu_a(A) = \begin{cases} \mu(A \cap C) & \text{si } A \cap C \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si } A \cap C \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases}$$

Je ne comprends pas ces séparations en 2 cas

$$\mu_d(A) = \begin{cases} \mu(A \setminus C) & \text{si } A \cap C \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si } A \cap C \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases}$$??

4. on suppose $\mathcal{U}_m^{(n)} = \{\omega \in A_n \mid \mu(\omega) > \frac{1}{m}\}$

(car $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est ~~...~~ σ-finite. donc $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

croissance, $\forall n$. $\mu(A_n) < +\infty$ $\bigcup A_n = \Omega$)

alors $\mathrm{card}(\mathcal{U}_m^{(n)}) < +\infty$ car $\mu(A_n) < +\infty$

on suppose $\mathcal{U}_m = \{\omega \in \Omega \mid \mu(\omega) > \frac{1}{m}\}$

donc $\mathcal{U}_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_m^{(n)}$

donc $\mathcal{U}_m$ est dénombrable.

on suppose $\mathcal{U} = \{\omega \in \Omega \mid \mu(\omega) > 0\}$ donc $\mathcal{U} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_m$

donc $\mathcal{U}$ est dénombrable.

alors. des atomes ponctuels sont dénombrables.

OK

Exercise 5:

Dém : ① on va montre S est fermé.

on suppose une famille de S $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subseteq S$

$\{x_i\}$ convergence x sur $\mathbb{R}^n$

donc $\forall r>0$, $\exists n\in\mathbb{N}^*$, $|x_n - x| < \frac{r}{3}$. donc $B(x,r) \supseteq B(x_n, \frac{r}{3})$

donc $\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(x_n, \frac{r}{3})) > 0$ donc $x \in S$ donc

S est fermé

OK

② par ①, $\mathbb{R}^n / S$ est ouvert, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus S$, $\exists r_0$, tq $\mu(B(x,r)) = 0$ ($\forall r \leq r_0$).

et car $\mathbb{R}^n / S$ est ouvert, $\exists r_x \leq r_0$, tq $B(x, r_x) \subseteq \mathbb{R}^n / S$

donc $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n / S} B(x, r_x)$. est un ~~couvert~~ ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus S$

recouvrement

et $\mathbb{R}^n$ a une base dénombrable.

donc on a $\exists x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}^n \setminus S$, on a $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}) = \mathbb{R}^n / S$

expliquer pourquoi la base dénombrable permet de se restreindre à une famille dénombrable de ces boules

donc $\mu(\mathbb{R}^n / S) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = 0$

et $\forall F$ est fermé strictement contenu dans S.

$\mu(S/F) = \mu(S/F) + \mu(\mathbb{R}^n / S) = \mu(\mathbb{R}^n / F)$.

$\forall x \in S/F \subseteq \mathbb{R}^n / F$, F est fermé $\Rightarrow \mathbb{R}^n / F$ est ouvert

donc $\exists r$, $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n / F$, et $x \in S$, donc

$\mu(\mathbb{R}^n / F) \geq \mu(B(x,r)) > 0$.

Exercise 6:

Dém: 1. on a facilement $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$

je ne comprends pas bien la logique de ces phrases

si $x_1 \neq x_2$ et $y \in \dot{x}_1 \cap \dot{x}_2$, donc tout $A \in \mathcal{A}$, $x_1 \in A$, $y \in x_1$, tout $A \in \mathcal{A}$, $x_2 \in A$, $y \in x_2$

donc tout $A \in \mathcal{A}$, $y \in A$, $x_1, x_2 \in A$

donc $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{y}$, donc $\dot{x}$ ($x \in E$) est une partition de E.

2. D'abord, $\forall x \in E$, $\dot{x} \in \mathcal{A}$, car $\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\}} A$ est

intersection

une ~~réunion~~ dénombrable d'éléments de la tribu, donc est aussi dans la tribu

donc on peut montre $\forall B \in \mathcal{A}.\ B = \bigcup_{x \in B} \dot{x}$ car $\dot{x} \subset B$

oui, mais il faut le faire!

donc ~~x~~ on a B s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes

3. on considère $Y = \{\dot{x} \mid x \in E\}$, mal dit. Chaque élément de A est une réunion d'éléments de Y

par 2. on a $\mathcal{A}$ est ~~de~~ réunion de element de Y

on suppose $\mathcal{A}$ est infini $\Rightarrow$ Y est infini

si $\mathcal{A}$ est dénombrable $\Rightarrow$ par 2. $Y \subseteq \mathcal{A}$

donc Y est dénombrable, on suppose $Y = \{E_i \mid i \in I\}$

I est dénombrable. et $E = \bigsqcup_{i \in I} E_i$

$\forall J_1 \subseteq I, J_2 \subseteq I, J_1 \neq J_2 \Rightarrow \bigsqcup_{i_1 \in J_1} E_{i_1} \neq \bigsqcup_{i_2 \in J_2} E_{i_2}$

donc on construit un injectif : $\mathcal{P}(I) \to \mathcal{A}$

construis-la explicitement

donc. $\mathcal{A}$ ~~est~~ n'est pas dénombrable car P(I) n'est pas dénombrable

4. on a $\mathcal{F}_n = \hat{\mathcal{E}}\{\{0\},\{1\},\dots,\{n\}\}$ $\boxed{C(\mathcal{P}(\{0,1,\dots,n\})) = 2^n}$??

est infini et c'est facile que $\mathcal{F}_n$ est croissance

et $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{card}(\mathcal{F}_n) = +\infty$, (car $\operatorname{card}(\mathcal{F}_n) \geq n$)

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ n'est pas fini et il est dénombrable

donc par 3, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu