Bon travail

Date: \ \ Page:

Devoirs Léo

Mars 29 2022.

Exercise 1 (Thm de Lusin).

Dém: on va montre que $f: E \to E'$ est μ-p.p égale à une fonction borélienne $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subseteq E$ compact, s.t $\mu(K^c) < \varepsilon$ et $f|_K$ est continue.

$\Rightarrow$: $\forall \varepsilon > 0$,

car E' un espace topologique à base dénombrable d'ouverts $\Rightarrow$ on suppose que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base.

car μ est régulière $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ ouvert}\}$
$= \sup\{\mu(K) : A \supseteq K \text{ compact}\}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists$ compact $K_n \subseteq f^{-1}(V_n)$, compact $L_n \subseteq (f^{-1}(V_n))^c$
s.t $|\mu(K_n) - \mu(f^{-1}(V_n))| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, $|\mu(L_n) - \mu((f^{-1}(V_m))^c)| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \mu((K_n \cup L_n)^c) \le \frac{\varepsilon}{2^n}$ ok

on suppose que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (K_n \cup L_n) \Rightarrow K$ est compact ok

$\mu(K^c) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ ok

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^{-1}(V_n) \cap K \subset L_n^c \cap K$, L_n^c est ouvert.

$\forall x \in L_n^c \cap K$, $x \in K \Rightarrow x \in K_n \cup L_n$, $x \in L_n^c \Rightarrow x \in K_n \Rightarrow x \in f^{-1}(V_n)$

$\Rightarrow L_n^c \cap K = f^{-1}(V_n) \cap K$ ok, c'est un ouvert pour la topologie induite sur K

$\forall V \subset E'$ ouvert, $f^{-1}(V) \cap K = f^{-1}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} V_{n_k}) \cap K = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (f^{-1}(V_{n_k}) \cap K)$. c'est un ouvert de K

$\Rightarrow f|_K$ est continue., $\mu(K^c) \le \varepsilon$. OK

$\Leftarrow$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists K_n \subset E$ compact s.t. $\mu(K_n^c) < \frac{1}{n}$, $f|_{K_n}$ est continue.

$\forall A \subset E'$ ouvert, $f^{-1}(A) \cap K_n$ est ouvert dans K_n

$\Rightarrow f^{-1}(A) \cap K_n \in \mathcal{B}(E)$.

on pose que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (f^{-1}(A) \cap K_n) = f^{-1}(A) \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n) \in \mathcal{B}(E)$.

$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n^c \in \mathcal{B}(E)$ et $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n^c) \leq \mu(K_n^c) = \frac{1}{n}$ $\forall n$

donc $\mu(C) = 0$

on pose $y \in E'$ et on va définir $\tilde{f} : E \to E'$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \\ y & x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \ (x \in C) \end{cases}$$

je ne comprends pas ce que tu écris

si $y \in A$, $\tilde{f}^{-1}(A) \supseteq C$ $\boxed{f^{-1}(A) = B \cup C}$ $\in \mathcal{B}(E)$ il s'agit de \tilde f^{-1}(A)?

si $y \notin A$ $\tilde{f}^{-1}(A) = B \in \mathcal{B}(E)$ ok

donc $\tilde{f}$ est une fonction borelienne

$f = \tilde{f}$ μ-p.p $\Rightarrow f$ est μ-p.p égale à une fonction borelienne.

ok #.

Exercise 2 (Thm de Vitali-Carathéodory). comment se ramène-t-on au cas f>0 ?

Dém: on peut supposer que $f \geq 0$ donc il existe

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ étagée croissante s.t $s_n \to f$ ~~μ-p.p.~~ la convergence a lieu partout!

on pose que $t_n = s_n - s_{n-1}$ ($s_0 = 0$).

donc $t_n \geq 0$ et étagée, $f = \sum_{n \geq 1} t_n$

$\Rightarrow f$ peut écrire comme forme : $\sum_{i \geq 1} c_i \mathbb{1}_{A_i}$

Date: _________ Page: _____

$(c_i > 0$ et A_i mesurable$)$ et $\sum_{i\geq 1} c_i \mu(A_i) = \int_E f < \infty$.

$\forall \varepsilon > 0$, par régulière, il existe $K_i \subseteq A_i \subseteq O_i$

$(K_i$ compact, O_i ouvert$)$

$c_i \mu(O_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ ok

on pose que $V = \sum_{i\geq 1} c_i \mathbb{1}_{V_i}$ V_i = O_i ?

$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{K_i}$ (on a N s.t. $\sum_{i\geq N+1} c_i \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$).

et c'est facile que V est semi-continue inférieurement

u est semi-continue supérieurement

et $\int_{\mathbb{R}} (V-u) d\lambda < \varepsilon$ ok

#

Exercise 3.

Dém: on définit $g_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, et on va montre que

$\lim_{n\to+\infty} \int g_n = \int \lim_{n\to+\infty} g_n$

$|g_N| \leq \sum_{n\geq 0}^{N} |f_n|$ et $\int \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| d\mu < +\infty$

par TCD, on a $\lim_{n\to+\infty} \int g_n = \int \lim_{n\to+\infty} g_n$. OK

$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \int_{-1}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n} dt$ bonne stratégie

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{-1}^{0} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{6}$

Exercise 4.

Dém: On pose que $f(x) = \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}}$ qui est toujours positive (voire infinie)

$\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} dx = \sqrt{\alpha_n} \int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{|x-a_n|}} dx$

① si $a_n \geq K$, $\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{|x-a_n|}} dx = \int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{a_n-x}} dx = 2(\sqrt{a_n+K} - \sqrt{a_n-K})$.

$= \frac{4K}{\sqrt{a_n+K}+\sqrt{a_n-K}} \leq \frac{4K}{\sqrt{2K}} = 2\sqrt{2K}$ ok

② si $a_n \leq -K$, $\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{|x-a_n|}} dx = \int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{x-a_n}} dx = 2(\sqrt{K-a_n} - \sqrt{-K-a_n})$.

$= \frac{4K}{\sqrt{K-a_n}+\sqrt{-K-a_n}} \leq \frac{4K}{\sqrt{2K}} = 2\sqrt{2K}$ ok

③ si $a_n \in]-K, K[$, $\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{1}{|x-a_n|}} dx = \int_{-K}^{a_n} \sqrt{\frac{1}{a_n-x}} dx + \int_{a_n}^{K} \sqrt{\frac{1}{x-a_n}} dx$

$= 2(\sqrt{K+a_n} + \sqrt{K-a_n}) = 2 \cdot \sqrt{2K+2\sqrt{K^2-a_n^2}} \leq 4\sqrt{K}$ ok

donc $\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} dx \leq 4\sqrt{K} \cdot \sqrt{\alpha_n}$.

on a $\int_{-K}^{K} f(x) dx \leq 4\sqrt{K} \cdot \sum_{n\geq 0} \sqrt{\alpha_n} < +\infty$

donc $\mu(\{x \mid f(x) = +\infty\} \cap [-K, K]) = 0$.

$\mu(\{x \mid f(x) = +\infty\}) = \bigcup_{K=1}^{+\infty} \mu(\{x \mid f(x) = +\infty\} \cap [-K, K]) = 0$. ok #

En déduire que la première somme (sans la racine carrée) est aussi finie p.p.