

Cours Analyse pour Physiciens

S. Nonnenmacher

12 / 10 / 2026



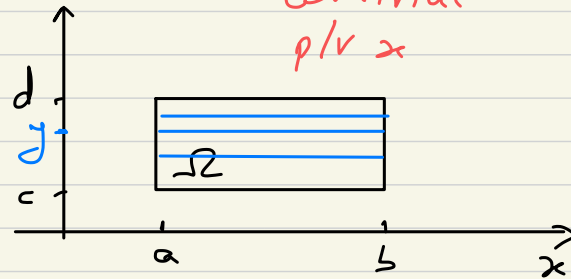
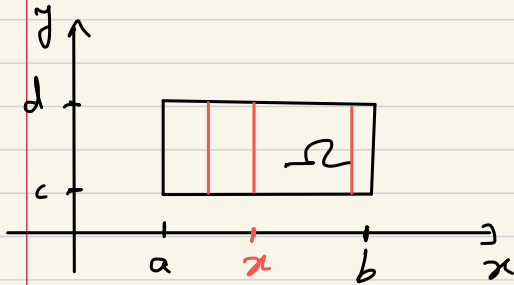
Calcul des intégrales doubles

Prop: théorème de Fubini (2D)

Supposons que $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue. Alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x, y) dy \right)}_{F(x)} dx = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x, y) dx \right)}_{G(y)} dy$$

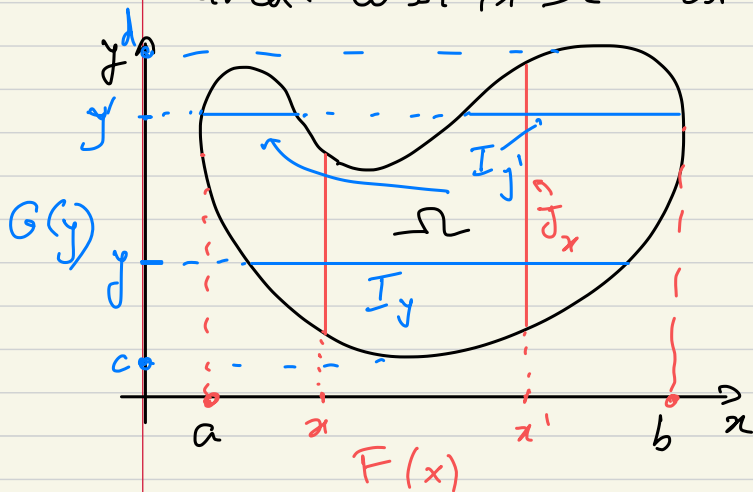


$F(x)$

continue
p/v x

$G(y)$
est continue

Marche aussi si Ω n'est pas un rectangle :



Formules similaires:

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\underbrace{\int_{I_x} f(x,y) dy}_{F(x)} \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\underbrace{\int_{I_y} f(x,y) dx}_{G(y)} \right) dy$$

I_x dépend de x

I_y dépend de y

En général, I_x, I_y sont des intervalles ou des unions d'intervalles.

Rem: si $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ et que $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec g et h des fonctions continues f est factorisée

$$\begin{aligned} \text{alors: } \iint_{\Omega} g(x)h(y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y) \, dy \right) dx \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{linéarité} \\ &= \int_a^b \left(g(x) \int_c^d h(y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d h(y) \, dy \cdot \int_a^b g(x) \, dx \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{linéarité} \end{aligned}$$

Ex: sur $\Omega = [0, 1]_x \times [1, 2]_y$, $f(x, y) = x + xy$.

$$I = \iint_{\Omega} (x + xy) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x + xy) \, dy \right) dx$$

fonction de y , x étant un paramètre

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(\underbrace{\left[xy + x \frac{y^2}{2} \right]_0^1}_{F(x)} dx &= \int_0^1 \left(x \cdot 2 + x \cdot \frac{4}{2} - \left(x \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{2} \right) \right) dx \\
 &= \int_0^1 \underbrace{\frac{5}{2} x}_{F(x)} dx = \frac{5}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \left(\int_0^1 (x + xy) dx \right) dy = \int_1^2 \underbrace{\left[(1+y) \frac{x^2}{2} \right]_0^1}_{G(y)} dy \\
 &= \int_1^2 \underbrace{(1+y) \frac{1}{2}}_{G(y)} dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{4}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

Ex: $\Omega = [0, \pi/2]^2$ (carre) $f(x, y) = \sin(x + y)$

$$I = \iint_{\Omega} \sin(x+y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dx \right) dy$$

primitive de $\sin(x+C)$: $-\cos(x+C)$

$$\int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x+y) \right]_0^{\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + \cos(0+y) \right)}_{G(y)} dy$$

$$= \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + \sin(y) \right]_0^{\pi/2} = \left(-\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(0) \right)$$

$$= -0 + 1 + 1 - 0$$

$$= 2$$

Cas un peu plus général: si Ω est la région comprise entre 2 graphes de fonctions de x (ou de y)

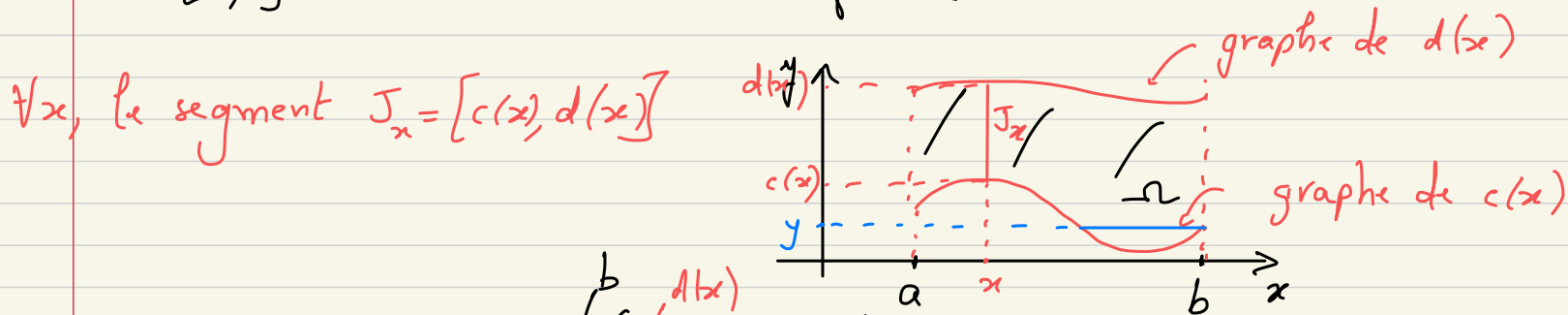
Prop 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forme:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x) \right\}, \text{ où}$$

$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues, telles que $c(x) \leq d(x), \forall x$.

$d: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue.



$$\rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right)}_{F(x)} dx$$

← bon ordre pour appliquer Fubini.

2. Si Ω est donné par:

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad c \leq y \leq d, \quad a(y) \leq x \leq b(y) \}, \text{ où}$$

$$a: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a(y) \leq b(y),$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

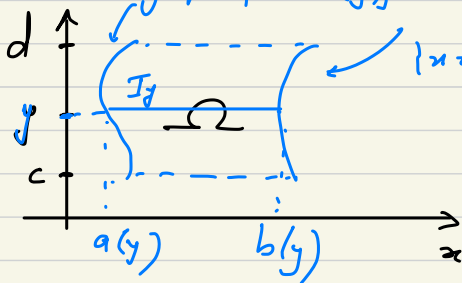
fonctions continues

graphe $\{x = a(y)\}$

$\{x = b(y)\}$

$$\text{abn: } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

$$I_y = [a(y), b(y)]$$



$$Ex: \Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2 \}$$



$$c(x)$$

$$d(x)$$

$$f(x, y) = x$$

$$\begin{aligned}
 I_z \iint_{\Omega} x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x \int_0^{x^2} 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 \underbrace{\left(x [y]_0^{x^2} \right)}_{x \cdot (x^2 - 0)} dx \\
 &= \int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$F(x)$

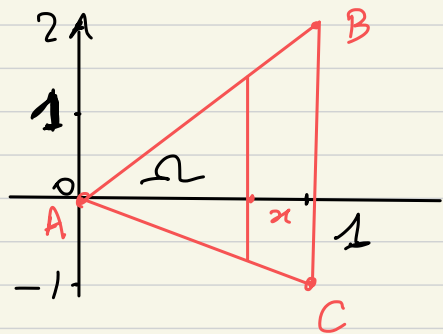
Si on fixe y , comment trouver I_y ? Sa borne inférieure est donnée par l'équation $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

$$\Rightarrow I_y = [\sqrt{y}, 1]$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{\sqrt{y}}^1 x \, dx \right)}_{G(y)} dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) dy \\
 &= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$G(y)$

Ex: Ω l'intérieur du triangle ABC , avec $A = (0,0)$, $B = (1,2)$
 $C = (1,-1)$



le segment $[AC]$ est décrit par
 l'équation linéaire $y = \alpha x$,

avec $-1 = \alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha = -1$.

$$[AC] = \{ y = -x, 0 \leq x \leq 1 \}.$$

graphe de $c(x) = -x$.

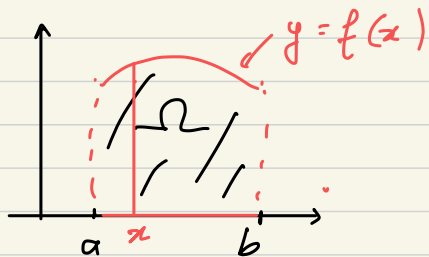
$$[AB] = \{ y = 2x; 0 \leq x \leq 1 \} \rightarrow d(x) = 2x.$$

$$\Omega = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x \}.$$

On veut intégrer $f(x,y) = (x+y)$ sur Ω .

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Omega} (x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{2x} (x+y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{2x} dx = \int_0^1 \underbrace{\left(x \cdot 2x + \frac{4x^2}{2} \right) - \left(-x^2 + \frac{x^2}{2} \right)}_{F(x)} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{9}{2} x^2 \, dx = \frac{9}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Remarque: j'ai dit que pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\text{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$



$$\Omega = \{ (x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 \, dy \right) dx \\
 &= \int_a^b f(x) \, dx
 \end{aligned}$$

on retrouve
la définition de cette intégrale: $F(x)$

Calcul par changement de variables. 2 d.

But: représenter un domaine Ω "compliqué" de façon plus simple par rapport aux nouvelles coordonnées.

Proprié Soit Ω et U des domaines de $\mathbb{R}^2$, et $\psi: U \xrightarrow{(u,v)} \Omega_{(x,y)}$ une fonction C^1 bijjective.

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue. Alors,

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_U f(\psi(u,v)) J_{\psi}(u,v) du dv, \text{ avec}$$

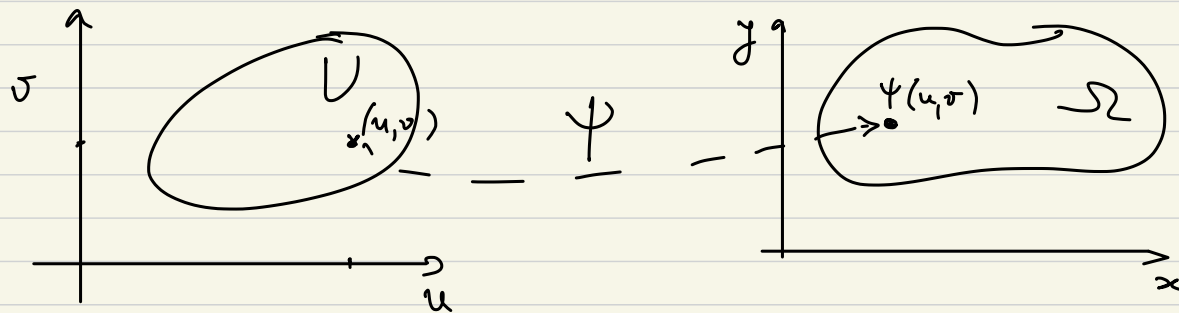
$J_{\psi}(u,v)$ le jacobien de ψ au point $(u,v) \in U$:

$$J_{\psi}(u,v) = \left| \det(\text{Jac}(\psi)(u,v)) \right|.$$

J_{ψ} = valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de ψ au point (u,v) .

Changement de variable: $(x, y) = \psi(u, v)$

$$\text{Jac } \psi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{pmatrix} (u, v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u, v) \\ \psi_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$



Ex: Changement de variables en coordonnées polaires :

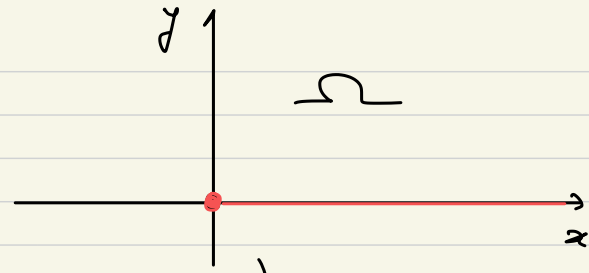
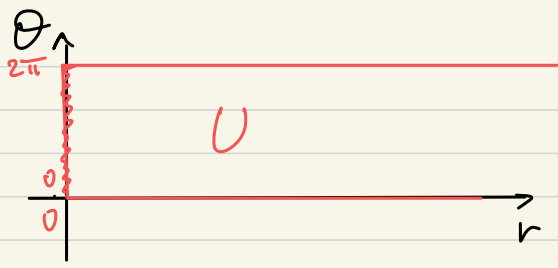
$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$U = U_{(r, \theta)}$$

$$\psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } U = \{ r > 0, \theta \in]0, 2\pi] \} \rightarrow \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$



$$\text{Jac } \psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \psi(r, \theta) = (x, y)$$

$$\det \text{Jac } \psi(r, \theta) = r(\cos \theta)^2 + r(\sin \theta)^2 = r.$$

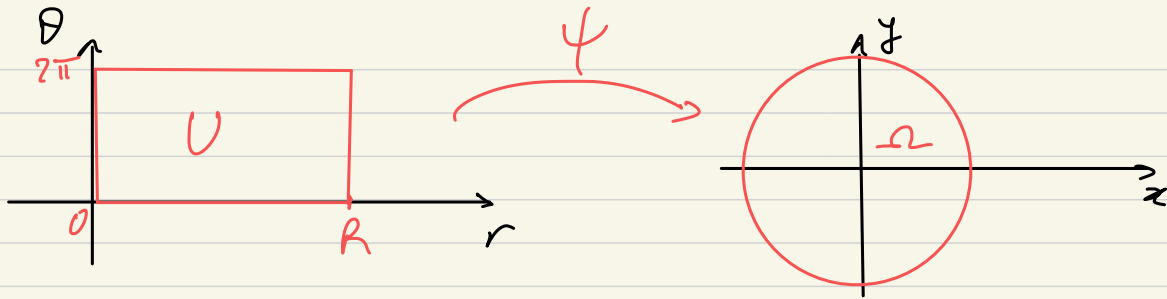
$$\rightarrow J_{\psi}(r, \theta) = r.$$

Si on veut calculer $\iint_{\Omega} x^2 dx dy$, pour $\Omega = \text{disque } B(0,0), R$
 $= \{(x,y); x^2 + y^2 \leq R^2\}.$

En coordonnées polaires $\Omega = \psi(U)$, pour

$$U = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$U = [0, R] \times [0, 2\pi]$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I &= \iint_{\Omega} x^2 dx dy = \iint_U (r \cos \theta)^2 \underbrace{r}_{J_{\psi}(u, r)} dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 (\cos \theta)^2 dr d\theta \\
 &= \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \times \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{R^4}{4} \cdot \pi
 \end{aligned}$$

$(\cos \theta)^2 = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$
 $\downarrow$ primitive
 $\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}$

Ex: on veut calculer l'aire d'une ellipse

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0$$

$$\text{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Si on utilise Fubini :

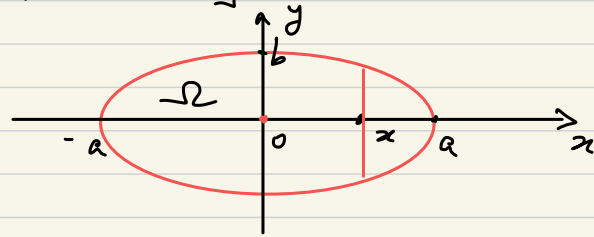
$$\Omega = \left\{ c(x) \leq y \leq d(x), x \in [-a, a] \right\}$$

$$d(x) = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad c(x) = -d(x)$$

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} 1 \, dy = d(x) - c(x) = 2d(x)$$

$$\rightarrow \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, dx$$

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx \rightsquigarrow x = \cos \theta$$



Si on applique le changement de coordonnées suivant, qui ressemble aux coordonnées polaires:

$$\psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} ar \cos \theta \\ br \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(r, \theta) \\ \psi_2(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Omega = \psi(U), \text{ pour } U = \{0 < r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

↖ rectangle

$$\frac{x}{a} = r \cos \theta, \quad \frac{y}{b} = r \sin \theta \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2 \leq 1.$$

ψ bijection $U \longrightarrow \Omega \setminus \{0, 0\}$.

$$J_{\psi}(r, \theta) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$J_{\psi}(r, \theta) = abr.$$

$$\Rightarrow \text{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \iint_U 1 \cdot abr \, dr \, d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\theta = \int_0^1 \underbrace{2\pi r}_{F(r)} \, dr$$

Cas $a=b=1$: Aire(Ω) = Aire(disque unité) = π .

$$= ab \pi$$