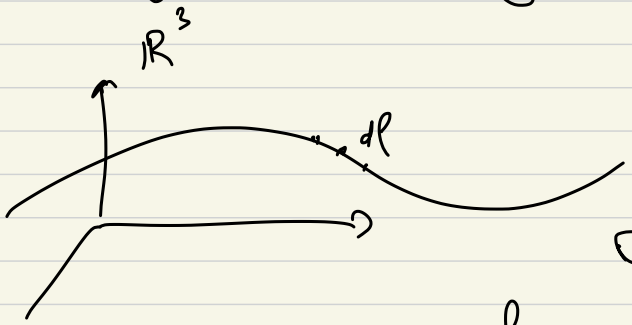
Analyse pour physiciens

Cours du 9 nov. 2026

S. Nonnenmacher

Integrales curvilignes.



Courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$

$f : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue

On veut intégrer cette fonction sur la courbe : $\int_\gamma f \, dl$

dl : élément de longueur le long de γ

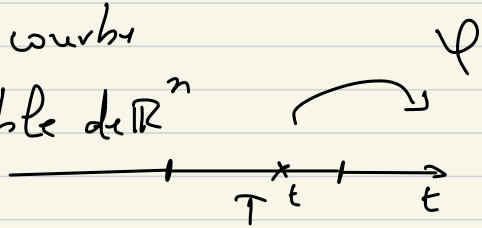
Ex : calculer
- la longueur de la courbe
- la masse d'1 objet 1D
- le travail d'une force lors d'un déplacement
- l'intensité d'1 courant traversant 1 surface, en fonction de $\vec{B}$ (loi d'Ampère)
- la force électromotrice d'1 circuit électrique.

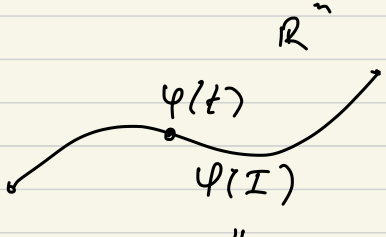
- circulation électrique.

Déf Courbe paramétrée de classe C^1

On appelle courbe paramétrée C^1 dans $\mathbb{R}^n$ un couple (I, φ), où $I \subset \mathbb{R}$ intervalle (borné) et $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ application C^1.

On appelle image de la courbe paramétrée le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé par $\varphi(I)$





courbe géométrique

On notera la c. paramétrée $\gamma = (I, \varphi)$.

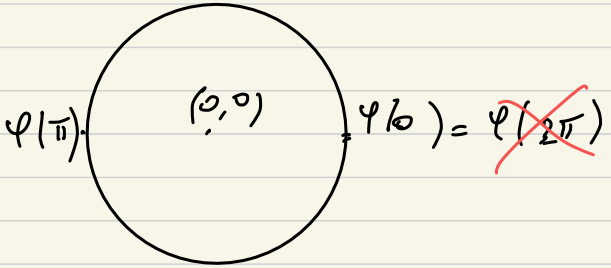
. Si on n'avait pas imposé que $\varphi \in C^1$, on aurait pu avoir des images $\varphi(I)$ très irrégulières ⟶ $\ell(\gamma) = ?$

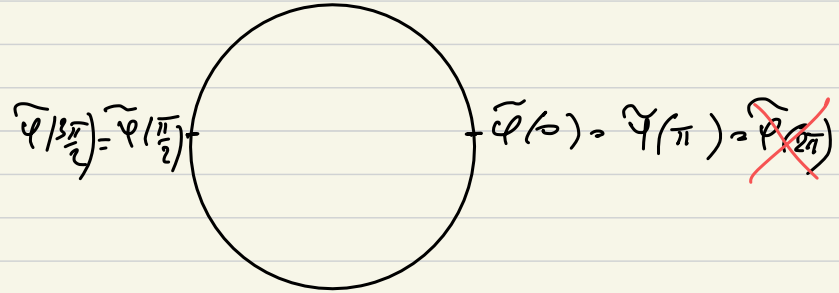
Ex : $I = [0, 2\pi[$ $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$; $\gamma = (I, \varphi)$ c. param. C^1.

$\varphi(I)$ = cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1.

$I = [0, 2\pi[$ $\tilde{\varphi}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $\tilde{\gamma}$ c. param. C^1.

$\tilde{\varphi}(I)$ = cercle unité centré en $(0,0)$, de rayon 1.



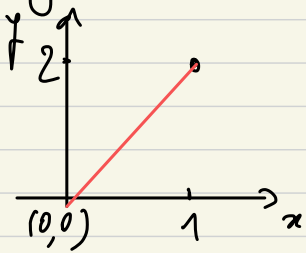


γ et $\tilde{\gamma}$ ont la même image, mais ce ne sont pas les mêmes courbes paramétrées.

φ est bijective : $I = [0, 2\pi[\longrightarrow \varphi(I)$

$\tilde{\varphi}$ n'est pas bijective

- $I = [0,1]$, $\varphi(t) = (t, 2t) = t(1,2)$. φ est $C^1 \Rightarrow$ courbe C^1.
  $\varphi(I)$ = segment entre $(0,0)$ et $(1,2)$, dans $\mathbb{R}^2$.



- Dans $\mathbb{R}^3$: $I = [0,1]$, $\varphi(t) = (1+t, 1-t, 3t)$ est C^1 courbe param. C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Image = segment reliant $(1,1,0)$ et $(2,0,3)$.

$\varphi \in C^1 \Rightarrow$ en presque chaque point $\gamma(t)$, la courbe admet une droite tangente à γ.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $I = [0, 4\pi]$, $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

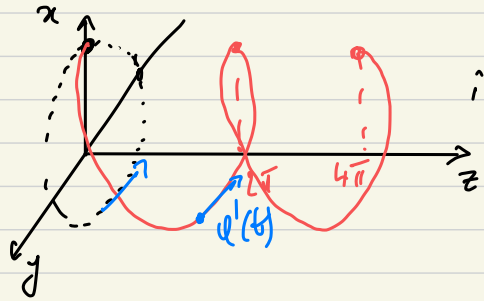


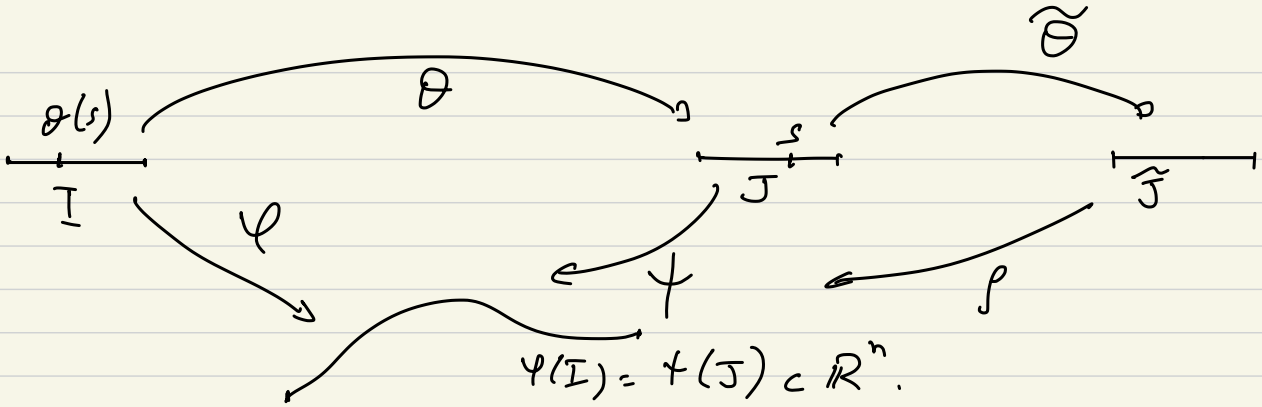
image géom: spirale 3D (vis d'Archimède)

$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

- Point de vue inverse: partir d'une courbe géométrique, et fabriquer une paramétrisation de cette courbe.
Il existe plein de paramétrisations possibles pour une courbe géométrique donnée.

Def: Courbes paramétrées (C^1) équivalentes.

Deux c. param. (I, φ) et (J, ψ) sont dites équivalentes s'il existe une bijection $\theta : I \to J$ strictement croissante avec $\theta'(t) > 0$ partout et telle que $\varphi = \psi \circ \theta$



Puisque $\theta' > 0$, l'application $\theta^{-1} : J \to I$ est aussi C^1 :

$$(\theta^{-1})'(s) = \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(s))}$$

- $\gamma = (I, \varphi)$ équivalente à $\tilde{\gamma} = (J, \psi)$: relation d'équivalence.

  $\gamma \sim \gamma$ (θ = identité sur I)

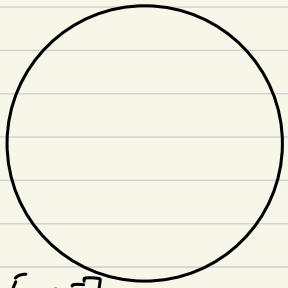
  Si $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, alors $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ (symétrie)

  Si $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma} \sim \hat{\gamma} \Rightarrow \gamma \sim \hat{\gamma}$.

  $\tilde{\theta} \circ \theta$ bijection $I \to \hat{J}$.

1ère propriété : les images géométriques de (I, φ) et (J, ψ) sont les mêmes.

Ex : $I = [0, 2\pi]$, $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$



$J = [0, \pi]$, $\psi(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$

On a bien équivalence, avec la bijection $\theta : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$

$\theta(t) = 2t$.

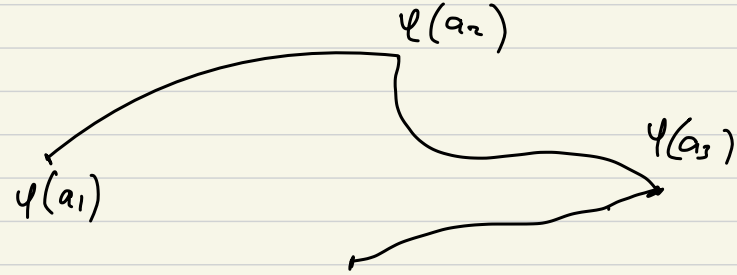
$\varphi \circ \theta = \psi$.

θ est C^1, strict. $\uparrow$

et $\theta'(t) = 2 \neq 0$, $\forall t$.

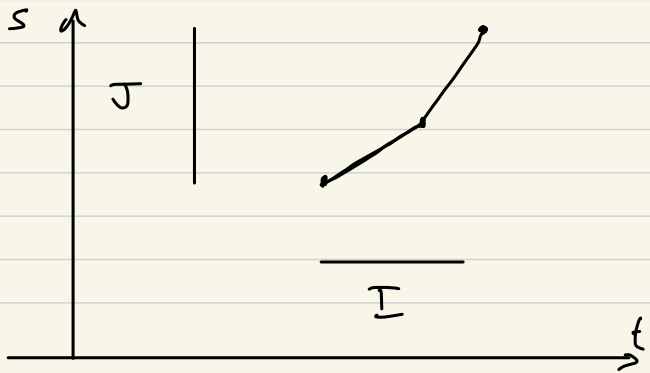
- On peut généraliser la définie d'1 courbe paramétrée aux fonctions φ continues et C^1 par morceaux.

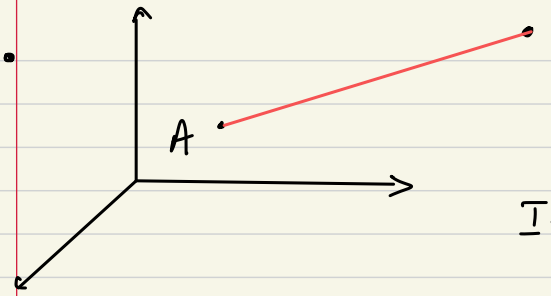
$I = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \dots \cup [a_{k-1}, a_k]$, avec $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ continue, et $\varphi|_{[a_{j-1}, a_{j+1}]}$ est C^1.



$\Rightarrow$ possibilité d'un nombre fini de coins.

Idem : on peut relaxer la définition de courbes équivalentes, pour que θ soit continue et C^1 par morceaux, strictt $\uparrow$, avec $\theta' > 0$ partout.





segment $[AB]$ = courbe géométrique

Paramétrisation la + simple :

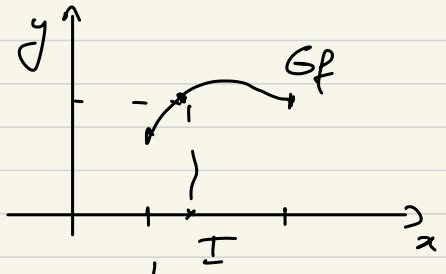
$I = [0,1]$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donnée par

$$\varphi(t) = A + t\,\overrightarrow{AB}$$

$$= (x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A),\ z_A + t(z_B - z_A))$$

- sur $\mathbb{R}^2$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1, graphe de f :

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$



Si on définit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \varphi(t) = (t, f(t))$ est bien une courbe param. C^1.

$\varphi(I) = G_f$.

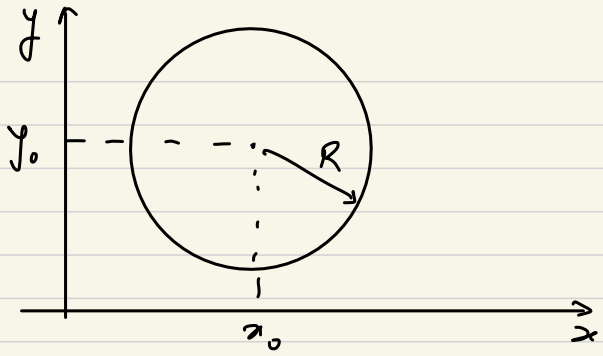
$\Rightarrow \gamma = (I, \varphi)$ paramétrisation naturelle de G_f.

- Cercle $C((x_0, y_0), R) \subset \mathbb{R}^2$

$I = [0, 2\pi]$,

$\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$

paramétrisation naturelle de ce cercle.

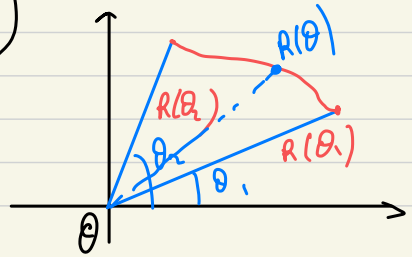


Déf: Courbe paramétrée en coordonnées polaire

$I \subset \mathbb{R}_\theta$, $R : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonction C^1. La courbe notée informellement $r = R(\theta)$, plus formellement $\{ r = R(\theta), \theta \in I \}$, est la courbe paramétrée (I, φ) dans $\mathbb{R}^2$, où

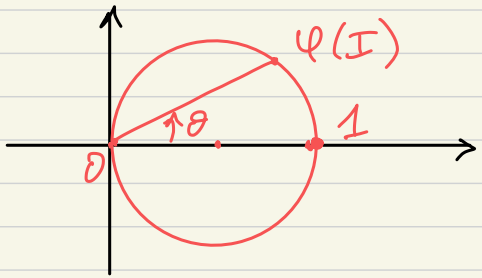
$$\varphi(\theta) = (R(\theta)\cos(\theta), R(\theta)\sin(\theta))$$

$I = [\theta_1, \theta_2]$



Ex: $\theta \in [0, 2\pi]$, $R(\theta) = 1$, $\forall \theta \Rightarrow$ cercle $C(0,1)$

- Courbe $r = \cos\theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$



$x(\theta) = R(\theta)\cos(\theta) = \cos^2(\theta)$

$y(\theta) = R(\theta)\sin(\theta) = \cos\theta \sin(\theta)$

$x^2(\theta) + y^2(\theta) = R(\theta)^2 = \cos^2(\theta) = x(\theta)$

$\Rightarrow \quad x^2 - x + y^2 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. $\longleftarrow \quad C\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}\right)$

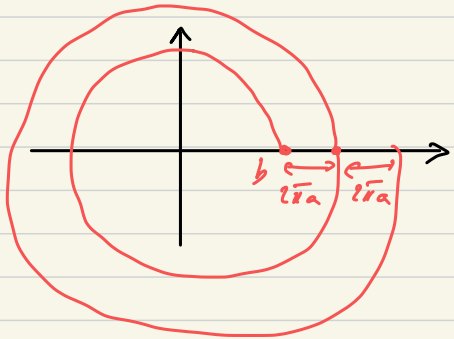
- Rem: on a choisi de paramétrer r en fonction de θ : $R(\theta)$.

On peut au contraire définir θ en fonction de r :

$\Theta : I \subset \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \varphi(r) = (r\cos(\Theta(r)), r\sin(\Theta(r)))$

- Ex : spirale d'Archimède : $r = a\theta + b$, avec $a \neq 0$
  $\theta \in I = [0, 4\pi]$

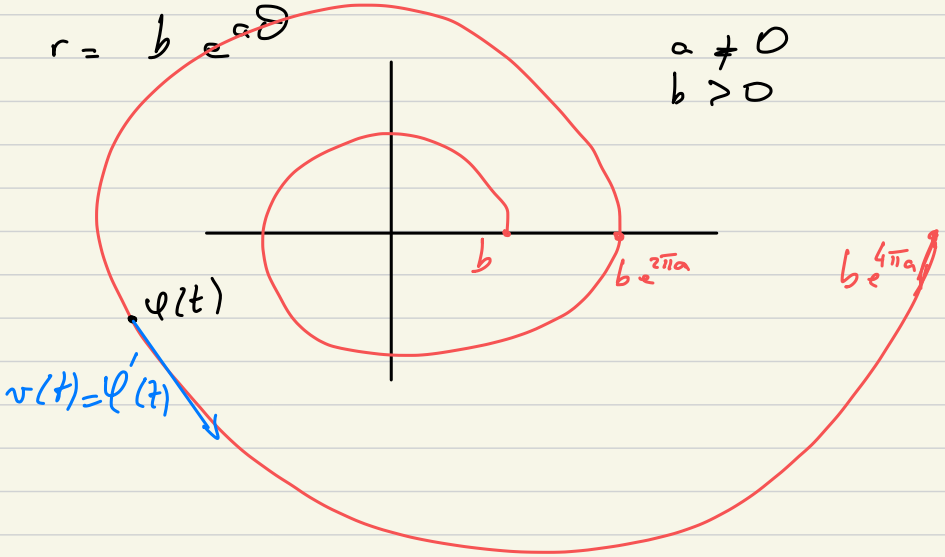
$b \geq 0$



- Spirale logarithmique : $r = b\, e^{a\theta}$

$I = [0, 4\pi]$

$a \neq 0$
$b > 0$



- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ c. param. C^1 → sa dérivée

$\varphi'(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ = le vecteur vitesse.

$\varphi'(t)$ = vecteur vitesse au "temps" t, au point $\varphi(t)$.

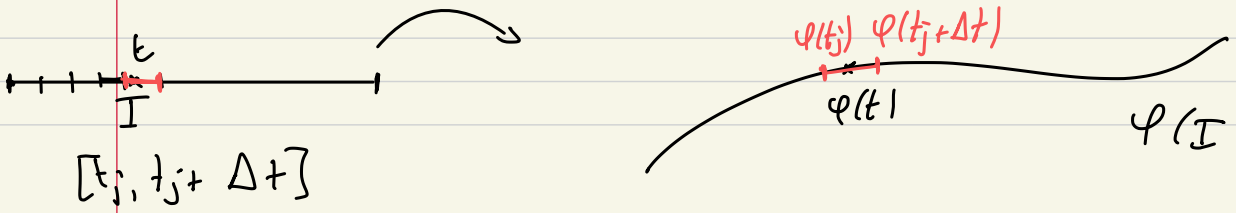
$v(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_n'(t))$

vitesse instantanée : $\|v(t)\| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \dots + \varphi_n'(t)^2}$

Déf $\gamma = (I, \varphi)$ c. param. C^1. On appelle longueur de γ, notée $\ell(\gamma)$, l'intégrale

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\varphi'(t)\| \, dt$$

φ est $C^1 \Rightarrow \varphi'$ est $C^0 \Rightarrow \|\varphi'\| : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est C^0.



morceau de courbe $\{\varphi(t);\ t \in [t_j, t_j + \Delta t]\}$ petit $\Rightarrow$ $\varphi'(t)$ ne change pas bcp

$\hookrightarrow$ proche d'un petit segment $[\varphi(t_j), \varphi(t_j + \Delta t)]$

$$\|\varphi(t_j + \Delta t) - \varphi(t_j)\| = \|\varphi'(t_j)\,\Delta t + \Delta t\,\varepsilon(\Delta t)\| \quad (DL\ 1)$$

$$\simeq \Delta t\ \|\varphi'(t_j)\|$$

$$\sum_j \Delta t \|\varphi'(t_j)\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \int_I \|\varphi'(t)\|\,dt .$$

Ex : Segment $[AB] \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi(t) = A + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0,1]$.

$\varphi'(t) = \overrightarrow{AB}$, $\forall t$ vitesse constante

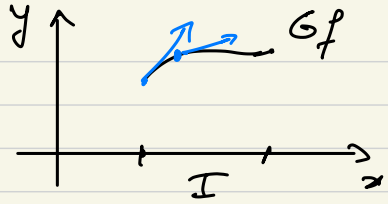
$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^1 \|\overrightarrow{AB}\|\,dt = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

- $f : I \to \mathbb{R}$, $G_f = \{y = f(x)\}$. $\varphi(t) = (t, f(t))$

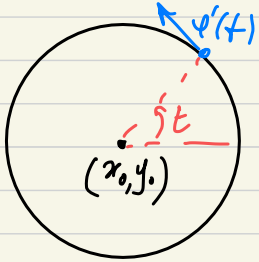
$f\ C^1$ $\varphi'(t) = (1, f'(t))$

$$\rightarrow \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$\rightarrow \ell(\gamma) = \int_I \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$



- Circle $C((x_0, y_0), R)$: $I = [0, 2\pi]$, $\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$



$$\varphi'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

$$\|\varphi'(t)\| = R, \quad \forall t$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|\, dt = R\,2\pi.$$

- Ex: spirale 3D: $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $I = [0, 4\pi]$.

$$\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

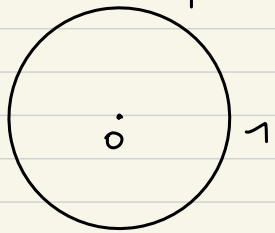
$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}, \quad \forall t.$$

$$\rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\, dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

$\ell(\gamma)$ = longueur de la courbe paramétrée,

pas forcément = longueur de la courbe géométrique.

ex: $I = [0, 4\pi]$, $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$



$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\varphi'(t)\| \, dt = 4\pi$$

le cercle géométrique est de longueur 2π.

Pour que les 2 longueurs coïncident, il faut que φ soit bijective entre I et $\varphi(I)$.

ex: $I = [0, 2\pi[$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$

Prop° Soit (I, φ) et (J, ψ) 2 courbes paramétrées équivalentes.
Alors ces c. param. sont de même longueur:

$$\ell(I, \varphi) = \ell(J, \psi).$$

Pr (I,φ), (J,ψ) équiv $\Leftrightarrow \exists\, \theta : I \to J$ bijection C^1, $\theta' > 0$,
t.q. $\varphi = \psi \circ \theta$.

Autrement : $\varphi'(t) = \psi'(\theta(t))\,\theta'(t)$ (règle de chaîne).

$\forall t \in I$, $\|\varphi'(t)\| = \|\psi'(\theta(t))\|\,\theta'(t)$

$$\ell(I,\varphi) = \int_I \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_I \|\psi'(\theta(t))\|\,\theta'(t)\,dt$$

$$= \int_J \|\psi'(s)\|\,ds \qquad \text{changement de var } s = \theta(t)$$

$$= \ell(J,\psi).$$

Prop : Longueur d'une courbe en coordonnées polaires $r = R(\theta)$.
$\theta \in I = [\theta_1, \theta_2]$, $R : I \to \mathbb{R}_+$ C^1. Alors la courbe param. a pour longueur

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R(\theta)^2 + R'(\theta)^2}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R(t)^2 + R'(t)^2}\,dt$$

Pr: $\varphi(\theta) = \big(R(\theta)\cos\theta,\ R(\theta)\sin\theta\big) \subset \mathbb{R}^2$.

$$\varphi'(\theta) = \big(R'(\theta)\cos\theta - R(\theta)\sin\theta,\ R'(\theta)\sin\theta + R(\theta)\cos\theta\big)$$

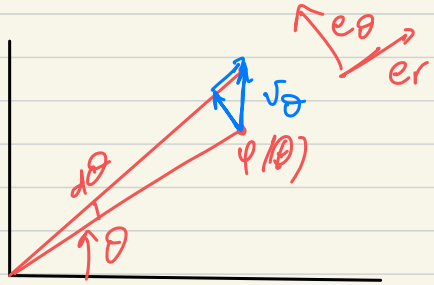
$$\|\varphi'(\theta)\|^2 = (R'\cos\theta - R\sin\theta)^2 + (R'\sin\theta + R\cos\theta)^2$$

$$= R'^2\cos^2\theta - 2R'R\cos\theta\sin\theta + R^2\sin^2\theta + R'^2\sin^2\theta + 2RR'\sin\theta\cos\theta + R^2\cos^2\theta$$

$$= R'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 0$$

$$= R'^2 + R^2$$

$$\Rightarrow \|\varphi'(\theta)\| = \sqrt{R^2(\theta) + R'^2(\theta)}$$



$$v_\theta = R(\theta)d\theta\, e_\theta + dR\, e_r$$

$$= R(\theta)d\theta\, e_\theta + R'(\theta)d\theta\, e_r$$

$$\|v_\theta\| = \sqrt{R(\theta)^2 d\theta^2 + R'(\theta)^2 d\theta^2} = \sqrt{R(\theta)^2 + R'(\theta)^2}\, d\theta$$