

M1 MFA - Analyse 1

S. Nonnenmacher

12/10/2026



Fin du cours sur les EVN :

Thème de l'application ouverte :

E, F 2 Banach. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective, alors f est ouverte :

$\forall U \subset E$ ouvert, $f(U)$ est un ouvert de F

2 applications.

Théorème (Banach)

E, F sont 2 Banach, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ inversible. Alors son inverse $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Preuve : f inversible $\Rightarrow f$ surjective $\Rightarrow \forall U$ ouvert de E ,
 $f(U)$ est ouvert dans F . Mais $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ est ouvert.
 $f^{-1} : F \rightarrow E$
 $f^{-1} : F \rightarrow E$
 $\Leftrightarrow f^{-1}$ est continue.

Rem: pas évident si on considère, par ex, $E = F = l^\infty(N)$,
 l'appli^z $f((u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)) = (a_0 u_0, a_1 u_1, \dots, a_n u_n, \dots)$
 pour une certaine suite $(a_n)_{n \geq 0}$.

Si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ mais $a_n > 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ bijective?

f^{-1} = "multiplication par $\frac{1}{a_n}$ "

$\uparrow$ n'est pas 1 application continue

En fait, f^{-1} n'est pas définie en tout $u \in l^\infty$.

$$u = (1, 1, 1, 1, \dots) \quad f^{-1}(u) = \left(\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \right)$$

$\Rightarrow$ pour que thme s'applique ici, il faut que $\frac{1}{a_n} \in l^\infty$.

$$0 < c \leq |a_n| \leq C.$$

Théorème du graphe fermé.

Soit E, F des Banach, et $f: E \rightarrow F$ linéaire. Je note

$G(f) = \{ (x, f(x)); x \in E \}$ le graphe de f . Alors f est continue $E \rightarrow F$ ssi $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.

topologie produit.
= topologie induite par

$$\| \cdot \|_{E \times F} = \| \cdot \|_E + \| \cdot \|_F$$

Preuve: $\Rightarrow$ Si f est C^0 , alors si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ dans E , alors $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ dans F .

Montrons que $G(f)$ est fermé. Supposons qu'une suite $(x_n, f(x_n))$ converge, dans $E \times F$, vers $(x, y) \in E \times F$.

$$\| (x_n, f(x_n)) - (x, y) \|_{E \times F} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \| x_n - x \|_E \rightarrow 0 \text{ et } \| f(x_n) - y \|_F \rightarrow 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \\ f(x_n) \rightarrow y \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(x).$$

$\Rightarrow$ le point limite $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$.

$\Rightarrow G(f)$ est un sous-ensemble fermé de $E \times F$.

$\Leftarrow$ Supposons que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.

On définit, sur E , la "norme graphe" $\|x\|'_E := \|x\|_E + \|f(x)\|_F$.

C'est 1 norme (facile). Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_E$?

Montrons que $(E, \|\cdot\|'_E)$ est complet.

Supposons que (x_n) de Cauchy pour $\|\cdot\|'_E$:

$$\|x_n - x_m\|'_E \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_E \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et}$$

$$\|f(x_n) - f(x_m)\|_F \rightarrow 0.$$

E complet $\Rightarrow x_n \rightarrow x$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$. $n, m \rightarrow \infty$

F complet $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow y$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

dans $E \times F$, $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$.

$$G(f) \text{ fermé} \Rightarrow (x, y) \in G(f) \Rightarrow y = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x \text{ pour la norme } \| \cdot \|_E'.$$

Concl: $(E, \| \cdot \|_E')$ est de Banach.

$$\text{On va montrer que } \| \cdot \|_E' \sim \| \cdot \|_E.$$

$$\text{Pour ça, considérons } i : (E, \| \cdot \|_E') \longrightarrow (E, \| \cdot \|_E)$$

qui est définie par $i(x) = x$.

i est linéaire et inversible. $\Rightarrow$ l'application inverse Banach

$$i^{-1} : (E, \| \cdot \|_E) \longrightarrow (E, \| \cdot \|_E') \text{ est } \underline{\text{continue}}:$$

$$\exists c > 0, \forall x \in E, \| i(x) \|_E' \leq c \| x \|_E$$

$$\Leftrightarrow \|x\|_E \leq \|x\|_{E'} \leq C \cdot \|x\|_E$$

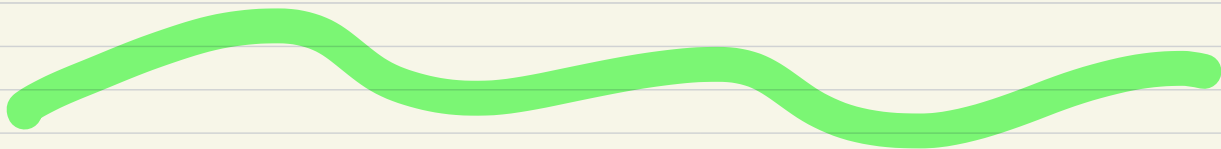
$\rightarrow$ les 2 normes sont équivalentes.

$C \geq 1$

$$\|f(x)\|_F + \|x\|_E \leq C \|x\|_E$$

$$\|f(x)\|_F \leq (C-1) \|x\|_E.$$

$\Rightarrow f$ est continue.



Retour aux espaces d'applications continues.

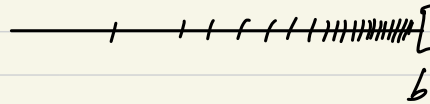
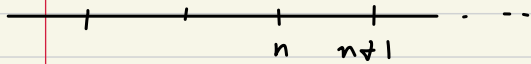
Contre-ex : $C_b([a, b[)$ n'est pas séparable.

$]0, +\infty[\quad]a, b[$

Φ bijection strictement $\uparrow$

$\varphi_A(x)$ sur $]0, +\infty[$

$\downarrow$
 $\varphi_A \circ \Phi^{-1}$ sur $]a, b[$.



- Comment caractériser un ensemble précompact de fonctions continues dans $C_b(X, \mathbb{R})$?
de fermeture compacte

Théorème d'Ascoli-Arzelà

Soit (X, d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C(X, \mathbb{R})$, telles que :

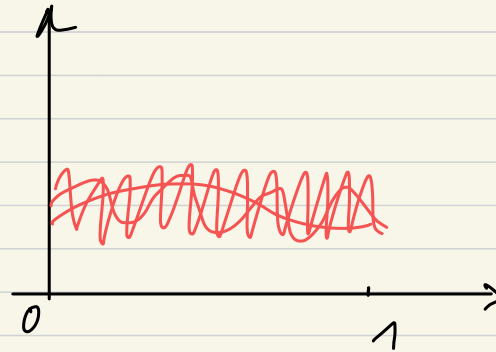
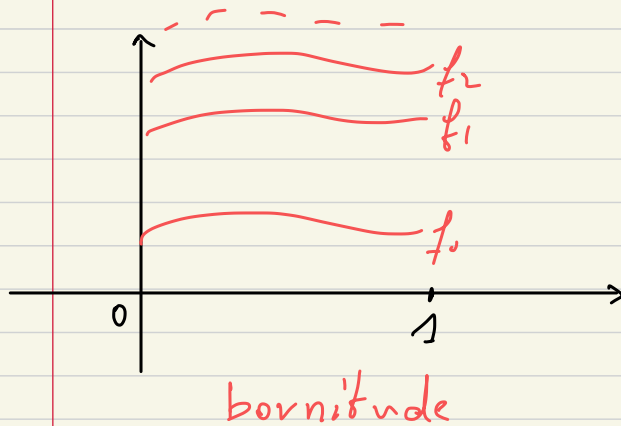
1. (bornitude uniforme) $\forall x \in X, \exists M(x) > 0$ tq.

$$\sup_n |f_n(x)| \leq M(x).$$

2. uniforme équi-continuité. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$
 $\underline{\forall n}, \forall x, y, \text{ si } d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ et une fonction $f \in C(X)$ tq. $f_{\sigma(n)} \rightarrow f$ dans $C(X)$.

Réciproquement, si (f_n) suit dans $C(X)$ uniformément convergente, alors cette suite est bornée et uniformément équirécontinue.



Preuve $\Rightarrow$ 1. (f_n) équicontinue et bornée. Construisons une limite f .

(X, d) compact $\Rightarrow X$ est séparable, $\exists$ suite $(a_j)_{j \geq 0}$ dense dans X .
Construisons f sur l'ensemble D .

Au point a_0 : la suite $(f_n(a_0))$ est bornée dans $\mathbb{R}$

$\xrightarrow{BW}$ on peut extraire 1 sous-suite $f_{\sigma_0(n)}(a_0) \rightarrow f(a_0)$.
définie.

point a_1 , $(f_{\sigma_0(n)}(a_1))_n$ bornée $\rightarrow$ on extrait 1
sous-suite convergente $f_{\sigma_0 \circ \sigma_1(n)}(a_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a_1)$

$$f_{\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k(n)}(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a_k)$$

$(f_{\sigma_0 \dots \sigma_k(n)}(a_{k+1}))_n$ bornée $\rightarrow$ on extrait $f_{\sigma_0 \dots \sigma_k \circ \sigma_{k+1}(n)} \rightarrow f(a_{k+1})$

Extraction diagonale : on définit $\sigma(n) = \sigma_0 \dots \sigma_n(n)$ est
strict $\uparrow : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$\forall k, \quad f_{\sigma(n)}(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a_k).$$

→ on a construit la limite ℓ sur l'ensemble $D = \{a_k\}$.

2. Étendre f à tous les points de X .

On montre que $\forall x \in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

Equi-continuity $\rightarrow \exists \delta > 0$.

On fixe $x \in X$. $\mathcal{D}$ est dense dans $X \Rightarrow \exists a \in \mathcal{D} \text{ tq } d(x, a) < \delta$.

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a)| + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| + |f_{\sigma(m)}(a) - f_{\sigma(m)}(x)|$$

$$\text{Equicontinuité} \xRightarrow{n} \downarrow \leq \varepsilon \quad \quad \quad \downarrow \leq \varepsilon$$

Je sais qu'en a, $f_{\sigma(n)}(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$.

$(f_{\sigma(n)}(a))$ est de Cauchy: $\exists n_\varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon, \left| \frac{f(a)}{\sigma(n)} - \frac{f(a)}{\sigma(m)} \right| \leq \varepsilon$.

→ $\forall n, m \geq n_\varepsilon, \left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x) \right| \leq 3\varepsilon$.

→ $(f_{\sigma(n)}(x))$ est de Cauchy, donc elle a 1 limite $f(x)$.

→ on a construit une limite simple des $(f_{\sigma(n)})$ sur tout X .

3. Il q. cette limite f est uniformément continue sur X .

Equicontinuité de la suite $(f_{\sigma(n)})$

$$\forall \varepsilon, \exists \delta, \forall x, y, \underline{\forall n}, d(x, y) \leq \delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{array}{ccc} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| & \leq & \varepsilon \\ \downarrow & & \downarrow \\ |f(x) - f(y)| & \leq & \varepsilon \end{array}$$

$\Rightarrow f$ est unif^t continue, avec les mêmes constantes ε, δ que la suite (f_n) .

4. Convergence uniforme?

Equicontinuité : ε, δ . X compact $\rightarrow X = \bigcup_x B(x, \frac{\delta}{2})$

$\exists$ famille finie de points $(b_1, \dots, b_{N_\varepsilon})$ tq. $X = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(b_i, \frac{\delta}{2})$

$\forall x \in X, \exists i=1, \dots, N_\varepsilon$ tq. $x \in B(b_i, \frac{\delta}{2})$

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(b_i)| + |f_{\sigma(n)}(b_i) - f(b_i)| + |f(b_i) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Pour chaque b_i , $f_{\sigma(n)}(b_i) \rightarrow f(b_i) : \exists n_i$ tq. $\forall n \geq n_i$,
 $|f_{\sigma(n)}(b_i) - f(b_i)| < \varepsilon$

$$n_\varepsilon = \max (n_i) \Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon, \forall i=1, \dots, N_\varepsilon, \quad \downarrow$$

$$\forall x \in X \Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon, |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

$$\rightarrow \text{conv. uniforme } f_{\sigma(n)} \rightarrow f.$$

$\Leftarrow$ Supposons que (f_n) converge unif^t vers $f \in C(X, \mathbb{R})$.

$$\text{Alors : } f_n \rightarrow f : \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$$

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\| \leq 1$$

$$\Rightarrow \|f_n\| \leq \|f\| + 1.$$

pour $n = 0, \dots, N-1,$

$$C = \max_{n=0, \dots, N-1} \|f_n\|_\infty$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 0, \|f_n\|_\infty \leq C + \|f\| + 1. \rightarrow \text{bornitude uniforme.}$$

$\varepsilon > 0$ quelconque. $\exists N > 0$ t. $\forall n \geq N, \|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon/3$.

• déduit de suite: $f_0, f_1, \dots, f_N$ sont continues sur X
 $\Rightarrow$ chacune est unif^t continue. f aussi.

$\Rightarrow \exists \eta > 0$, et $\exists \delta_0, \dots, \delta_N$, t. q. $\forall x, y \in X$

$$n \quad d(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$$

$$n \quad d(x, y) \leq \delta_0 \Rightarrow |f_0(x) - f_0(y)| \leq \varepsilon/3$$

$\vdots$

$$n \quad d(x, y) \leq \delta_N \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon/3$$

$$\delta = \min(\eta, \delta_0, \dots, \delta_N) \Rightarrow \quad \quad \quad "$$

Pour $n \geq N$, si $d(x, y) \leq \delta$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f(y) - f_n(y)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ la suite (f_n) est équicontinue.

□

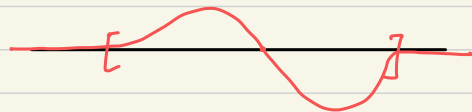
• Quelques espaces de fonctions continues.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert (ex: $\Omega = \mathbb{R}^N$).

$K \subset \Omega$ compact.

Def: $C_K(\Omega) = \{ f \in C(\Omega) \mid \text{supp}(f) \subset K \}.$

où $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$



• $C_K(\Omega) \subset C_b(\Omega)$ sous-espace fermé:

si $f_n \in C_K(\Omega)$, et $f_n \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow \forall x \notin K, \underbrace{f_n(x)}_{=0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x)}_{=0} \Rightarrow f \in C_K(\Omega).$

Comme $C_b(\Omega)$ est un Banach $\Rightarrow C_k(\Omega)$ Banach.

Def: $C_c(\Omega) = \bigcup_{\substack{k \subset \Omega \\ \text{compact}}} C_k(\Omega) = \{ \text{fonct}^{\text{e}} \text{ continues \grave{a} support compact (dans } \Omega) \}$.

C_c sous-espace $C_c(\Omega)$ n'est pas fermé dans $C_b(\Omega)$.

Ex: $\Omega =]-1, 1[$, $\forall n \geq 1$ $f_n =$

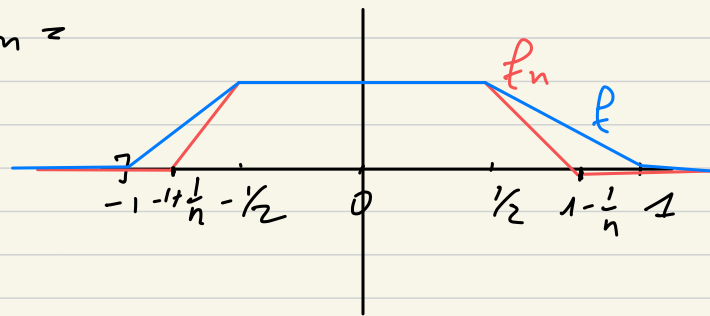
affine par morceaux, continue,

$$\text{supp } f_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

$f_n \in C_c(]-1, 1[)$, et

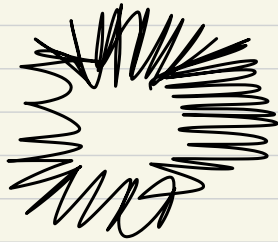
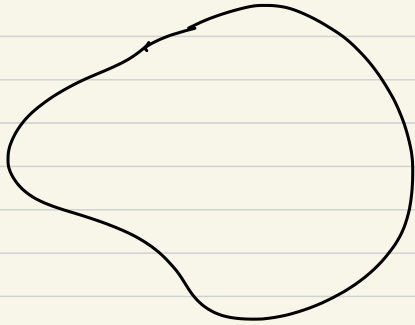
$f_n \rightarrow f$ unif^t sur $]-1, 1[$, avec $f =$

Or $\text{supp } f =]-1, 1[\Rightarrow f \notin C_c(]-1, 1[)$.



→ Def: On note $C_0(\Omega)$ la fermeture du sous-espace $C_c(\Omega)$
dans $C_b(\Omega)$.

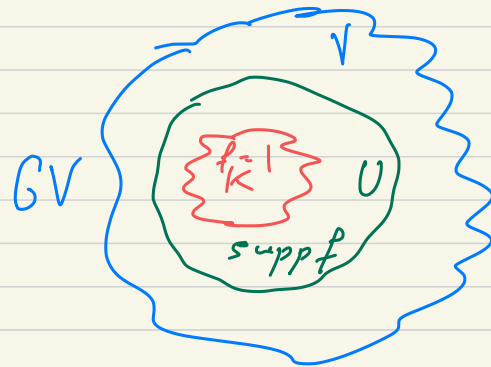
On va montrer que $C_0(\Omega) =$ les fonctions continues
qui tendent vers 0 lorsqu'on
s'approche du bord de Ω .



Lemme d'Urysohn

Dans $\mathbb{R}^N$, soit $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, et $V \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné
contenant K . Alors $\exists f \in C_c(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ telle que

$f|_K = 1$ et $\text{supp}(f) \subset V$.
 $\hookrightarrow$ fermé borné $\Rightarrow$ compact.



Preuve on définit la fonction
 F fermé, $\text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$

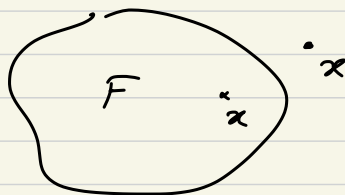
$$= \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Si $x \in F \Rightarrow \text{dist}(x, F) = 0$

$\rightarrow$ Si $x \notin F \Rightarrow \text{dist}(x, F) > 0$

f appl^{le} $x \mapsto \text{dist}(x, F)$ est 1-Lipschitz $\Rightarrow$ continue.

$$|\text{dist}(x, F) - \text{dist}(y, F)| \leq \|x - y\|$$



$$\text{Si } \text{dist}(x, F) = 0 \Rightarrow \exists (y_j) \text{ dans } F \text{ t.q. } \|x - y_j\|_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow y_j \rightarrow x.$$

$$\overset{\text{m}}{F} \quad F \text{ fermé} \Leftrightarrow x \in F.$$

$$K \subset V. \text{ On définit } d = \overset{\text{fermé}}{\text{dist}}(K, \overset{\text{fermé}}{GV}) = \inf_{x \in K} \text{dist}(x, GV)$$

$$K \cap (GV) = \emptyset$$

$$\text{Il y a } d > 0. \quad K \text{ compact} \Rightarrow d \text{ est atteinte :}$$

$$\exists \bar{x} \in K \text{ t.q. } d = \text{dist}(\bar{x}, GV).$$

$$\text{Si } d = 0 \Rightarrow 0 = \text{dist}(\bar{x}, GV) \Rightarrow \bar{x} \in GV. \text{ Contradiction} \\ \Rightarrow d > 0.$$

$$\text{On définit l'ens. intermédiaire } U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \text{dist}(x, K) < \frac{d}{2} \right\} \text{ ouvert}$$

$U = \frac{d}{2}$ - voisine ouverte de K .

Sa fermeture $\bar{U} \subset V$.
↑
fermé

On a: $K \subset U \subset \bar{U} \subset V$.

$$x \in \bar{U} \Rightarrow d(x, K) \leq \frac{d}{2}. \quad \bar{U} \subset \underbrace{\left\{ x; \text{dist}(x, K) \leq \frac{d}{2} \right\}}_{\text{fermé}} \subset V$$

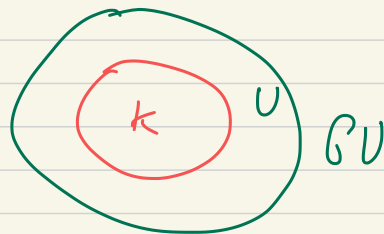
On définit: $x \mapsto f(x) = \frac{\text{dist}(x, \underbrace{GU}_{\text{fermé}})}{\text{dist}(x, \underbrace{GU}_{\text{fermé}}} + \text{dist}(x, K)}$

f est continue. (en fait, Lipschitz)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in GU$$

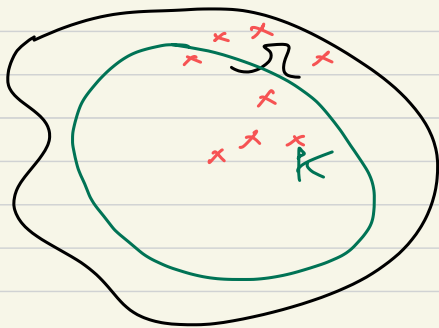
$$\Rightarrow \text{supp}(f) = \bar{U}.$$

$$f(x) \in [0, 1], \quad \forall x \in K, f(x) = 1.$$



Prop: Une fonction f appartient à $C_0(\Omega)$ ssi, $\forall \varepsilon > 0$,
 $\exists K_\varepsilon \subset \Omega$ compact t.g. $|f| \leq \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.

"s'approcher du bord de Ω " = "sortir de tout compact de Ω ".



Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ compact t.g. $|f| \leq \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$.

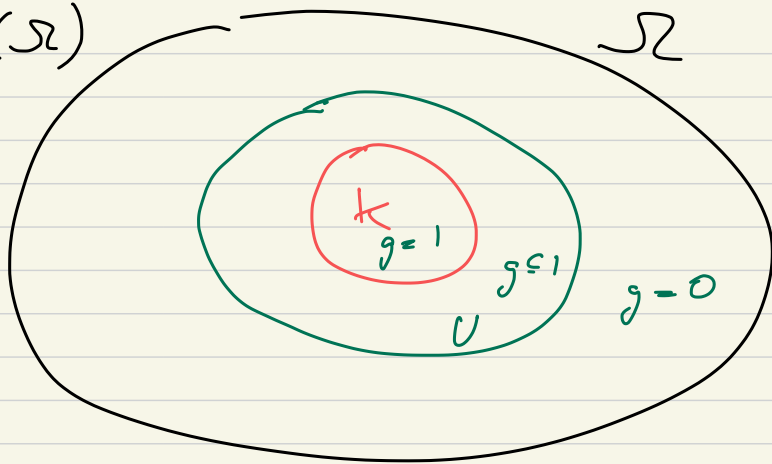
Urysohn $\Rightarrow \exists g \in C_c(\Omega, [0, 1])$ t.g. $g \equiv 1$ sur K .

On prend $h = g \cdot f$ $\leftarrow$ troncature continue de f en-dehors de K .

g à supp. comp. $\Rightarrow h \in C_c(\Omega)$

$$\|f - h\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f \in \overline{C_c(\Omega)} = C_0(\Omega).$$



• Récipr. Soit $f \in C_0(\Omega) : \exists (f_n), f_n \in C_c(\Omega)$,
avec $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} \text{ t. } \|f_{n_{\varepsilon}} - f\|_{\infty} \leq \varepsilon/2.$$

$K := \{x \notin \Omega \mid |f_{n_{\varepsilon}}(x)| \geq \varepsilon/2\}$ sous-ens. compact de Ω .

$$\forall x \in \Omega \setminus K, \quad |f(x)| \leq |f(x) - f_{n_{\varepsilon}}(x)| + |f_{n_{\varepsilon}}(x)| < \varepsilon.$$

□