Analyse 1 (M1 MFA)

Cours du 9/11/2026

S. Nonnenmacher

- $1 \leq p \leq \infty$, on a construit l'espace $L^p(X, \mu)$ de classes d'équivalences de fonctions dans $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.

$\| \cdot \|_p$ semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, norme sur $L^p(X)$.

$\rightsquigarrow$ $L^p(X)$ espace vectoriel normé.

- Thm de Riesz-Fischer

$\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(X, \mu)$ est complet, c'est donc un espace de Banach.

Rk. Cas $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ suite de Cauchy pour $\| \ \|_p$.

$$\| f_n - f_m \|_p \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0.$$

On extrait une sous-suite $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ telle que :

$$\| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Méthode : soit $\tilde{n}_j$ tq, $\forall m \geq \tilde{n}_j$, $\|f_{\tilde{n}_j} - f_m\| \leq \frac{1}{2^j}$

→ les $\tilde{n}_j$ sont ↑. Si pas strict↑ → on supprime les termes répétés

But : fabriquer $\lim_{j\to\infty} f_{n_j}$ dans L^p.

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| \quad \text{fct mesurable} \geq 0.$$

(u_k) suite ↑. Minkowski $\Rightarrow \|u_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq 1$

Thm de conv. monotone :

$\forall x$, $u_k(x) \nearrow_{k\to\infty} u(x)$, $\int |u|^p d\mu = \lim \int |u_k(x)|^p d\mu \leq 1$

$\Rightarrow u \in \mathcal{L}^p(X) \longrightarrow [u] \in L^p(X)$.

$\Rightarrow |u(x)|^p < \infty$ pour μ-p-tout x.

$|u(x)| < \infty$ μ-p-p.

$\rightarrow u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < \infty \quad \mu\text{-p.p.}$

$\rightarrow$ on définit $f(x) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right) + f_{n_1}(x) & \text{bien défini si } u(x) < \infty \\ 0 & \text{si } u(x) = \infty \end{cases}$

f est mesurable.

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \underbrace{f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)}_{f_{n_k}(x) \quad \text{(série télescopique)}}$$

$\Rightarrow$ on a : μ-pp., $f_{n_j}(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x)$

$\forall x, \quad |f(x)| \leq u(x) + |f_{n_1}(x)|$

$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|u\|_p + \|f_{n_1}\| \leq \|f_{n_1}\| + 1.$

$\to f \in L^p(X)$.

$\forall k, \quad f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$

$\forall x, \quad |f_{n_k}(x)| \le |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} | \quad | \le \underbrace{|f_{n_1}(x)| + u(x)}_{\in L^p}$

$\| |f_{n_1}| + u \|_p \le \|f_{n_1}\|_p + \|u\|_p < \infty$

Thm de conv. dominée : $f_{n_k} \to f$ p.p

$\to f_{n_k} \to f$ dans L^p : $\|f - f_{n_k}\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$.

— La sous-suite (f_{n_j}) converge dans L^p vers f.

Montrons que la suite complète (f_n) converge vers f dans L^p.

$\varepsilon > 0$. $\exists N = N(\varepsilon)$ t.q., $\forall n, m \ge N$, $\|f_n - f_m\|_p \le \varepsilon$.

prenons j assez grand pour que $n_j \ge N$

$\Rightarrow \forall n \geq N, \|f_n - f\|_p \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_j}\|_p}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|f_{n_j} - f\|_p}_{\text{en prenant } j \text{ assez grand}, \leq \varepsilon.}$

$\leq 2\varepsilon.$

$\Rightarrow (f_n)$ conv dans L^p vers f.

2. Cas $p = \infty$. (f_n) de Cauchy dans $L^\infty(X)$,

$\Rightarrow \exists A \subset X$ μ-négligeable tel que :

$\forall x \in X \setminus A, \quad |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

A_n pour f_n

$\tilde{A} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ négligeable

$\leftarrow$ ok en-dehors de A_{nm}

$\widehat{A} = \bigcup_{n,m} A_{nm}$

$A = \tilde{A} \cup \widehat{A}$, reste négligeable

$\forall x \in X \setminus A$, $|f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow (f_n(x))$ suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in X \setminus A \longrightarrow f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$

limite simple de fcts mesurables.

$\forall x \in A$, $f(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ f est mesurable.

(f_n) de Cauchy $\Rightarrow$ suite bornée dans L^∞ : $\exists M > 0$ tq,

$\forall n \quad \|f_n\|_\infty \leq M$.

$\forall x \in X \setminus A$, $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq M$

$\downarrow n \to \infty$

$|f(x)| \leq M$. $\Rightarrow f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq M$.

- $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N = N(\varepsilon)$ tq $\forall n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ pour p. tout x, $\forall n, m \geq N$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\downarrow m \to \infty$

$\forall n \geq N$ pour p-tout x, $\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

$\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ dans L^∞. $\square$

Corollaire Pour $p = 2$, l'espace $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert (espace hermitien complet).

Résultats de densité

Pour $f \in L^p(X)$, peut-on approcher f par des fonctions "régulières" (continues, continues à supp. compact, Lipschitz, ...).

Approcher : au sens de $\| \ \|_p$.

$p < 1 \Rightarrow \| \ \|_p$ + faible que norme sup (sur X compact)

- $1 \le p < \infty$, j'appelle $\mathcal{E}_p$ l'espace des fonctions étagées qui sont dans $L^p(X)$.

$$f = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$

avec $\bigsqcup_{j=1}^{J} A_j \subset X$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

$$p < \infty \qquad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\sum_j |\alpha_j|^p \, \mu(A_j) \right)^{1/p}$$

Thme Soit $1 \le p < \infty$. L'ensemble $\mathcal{E}_p$ est dense dans $L^p(X)$.

Pr. $f \in L^p$. f se scinde en $f = f_+ - f_-$, avec f_+, f_- mesurables ≥ 0.

⟶ on se ramène à approcher f_+ et f_- séparément.

⟶ supp. que $f \ge 0$, dans L^p.

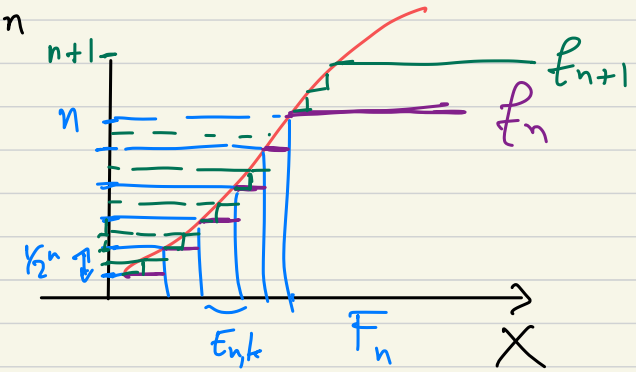
On construit 1 suite de fonctions étagées f_n :

$\forall n \geq 1$, $\forall k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ens. mesurables

$$E_{n,k} = \left\{ x ; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \underbrace{\frac{k+1}{2^n}}_{\leq n} \right\}, \quad F_n = \{ x ; f(x) \geq n \}$$

$\forall n$, $X = \left(\bigsqcup_k E_{n,k} \right) \sqcup F_n$

On définit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}}(x) + n \mathbb{1}_{F_n}(x)$



On a : $f(x) \geq f_n(x)$.

$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall n$

$\rightarrow (f_n)$ suite croissante, bornée par f.

$F_{n+1} \subset F_n$

Si $x \in E_{n,k}$ pour un certain (n,k) $\rightarrow$ sera toujours dans un $E_{n',k'}$ avec $n' \geq n$.

$\rightarrow$ $|f_{n'}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^{n'}}$.

$\rightarrow$ $f_{n'}(x) \xrightarrow[n' \to \infty]{} f(x)$

Sinon, $f(x) = \infty \longrightarrow$ ens. négligeable.

- $p = \infty$ En-dehors de F_n, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)$

. $\|f\|_\infty < \infty \Rightarrow$ si $n > \|f\|_\infty$, F_n est négligeable.

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ μ-pp-

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$1 \leq p < \infty$ $f_n \nearrow f$ pour μ-tout x.

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)|^p \to 0$

$\forall x$, $|f_n(x) - f(x)|^p \leq |2f(x)|^p = 2^p |f(x)|^p$

Th. de conv. dominée $\Rightarrow \|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

- On voudrait approcher $f \in L^p$ par des fonctions régulières.
  $\Rightarrow$ faire des hypothèses de régularité sur la mesure μ.
- Hyp : μ mesure de Radon (localt finie) sur $\mathbb{R}^N$: $\forall K \subset \mathbb{R}^N$ compact, $\mu(K) < \infty$.

  ex : mes de Lebesgue.

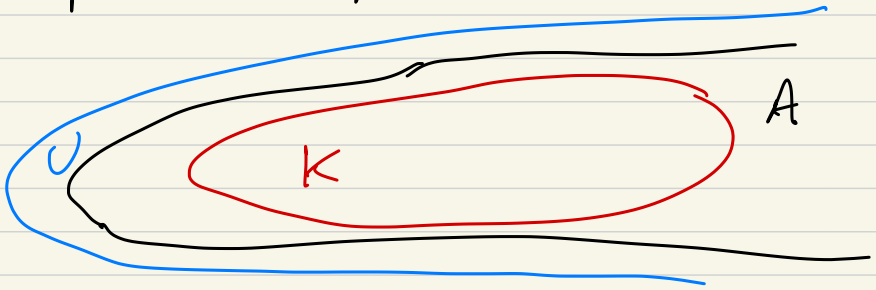
$\longrightarrow$ prop. de régularité de μ.

Prop° Soit μ une mesure borélienne de Radon dans $\mathbb{R}^N$. Alors, $\forall A \subset \mathbb{R}^N$ borélien t.q. $\mu(A) < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ compact K et ouvert U tels que $K \subset A \subset U$, et

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon. \qquad \Rightarrow \mu(U \setminus K) < 2\varepsilon$$

Au sens de la mesure μ, A peut être approché par "en-dessous" par un

compacts et "par au-dessus" par un ouvert.



→ à partir d'1 borélien A a priori très compliqué, on peut se ramener à des ens. K, U plus simples topologiq.

On dit que μ est intérieurement (K) et extérieurement (U) régulière.

→ μ est régulière.

Preuve. 1. Régularité intérieure : approximation de A par un compact.

μ, $\mu(A) < \infty \rightsquigarrow \nu(B) = \mu(A \cap B)$, $\forall$ B borélien.

→ ν mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On définit une classe de boréliens :

$$\mathcal{F} = \{ B \subset \mathbb{R}^N \text{ borélien} ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, C \text{ fermé},\ C \subset B \text{ et } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \}$$

(boréliens approchables par en-dessous par des fermés).

but : $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. $\mathcal{F}$ contient tous les fermés.
2. $\mathcal{F}$ stable par intersection dénombrables ? (B_n) éléments de $\mathcal{F}$.

$\forall \varepsilon,\ \forall n \geq 1,\ \exists\, C_n \subset B_n$, tq $\nu(B_n \setminus C_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

On veut approcher $\bigcap_n B_n$ par $C = \bigcap_n C_n$, pour la mesure ν

$$\nu\left(\left(\bigcap_n B_n\right) \setminus C \right) = \nu\left(\left(\bigcap_n B_n\right) \setminus \left(\bigcap_m C_m\right) \right) \leq \nu\left(\bigcup_m \left(B_m \setminus C_m\right) \right) \leq 1$$

$$\bigcup_m \left(\left(\bigcap_n B_n\right) \setminus C_m \right) \subset \bigcup_m \left(B_m \setminus C_m\right)$$

$$\leq \sum_n \nu(B_n \setminus C_n) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

C_n fermés $\Rightarrow$ C fermé, $C \subset \bigcap_n B_n$

Conclu : $\bigcap_n B_n \in F$.

3. F stable par union dénombrable : on veut approcher $\bigcup_n B_n$.

$C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$? On ne sait pas si C est un fermé.

$\rightarrow$ On va tronquer $\bigcup_{m=1}^{M} C_m$, qui est fermé.

$$\lim_{M \to \infty} \nu\left(\left(\bigcup_n B_n\right) \setminus \bigcup_{m \geq 1}^{M} C_m \right) = \nu\left(\left(\bigcup_n B_n\right) \setminus \left(\bigcup_m C_m\right) \right)$$

$\uparrow$ ν est finie.

$$\left(\bigcup_n B_n\right) \setminus \left(\bigcup_m C_m\right) = \bigcup_n \bigcap_m (B_n \setminus C_m) \subset \bigcup_n (B_n \setminus C_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{M \to \infty} \nu\left(\left(\bigcup B_n\right) \setminus \bigcup_{m \geq 1}^{M} C_m \right) \leq \nu\left(\bigcup_n (B_n \setminus C_n) \right) \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ pour M assez grand, $\nu\left((\cup B_n) \setminus \underbrace{\bigcup_{m=1}^{M} C_m}_{\text{fermé}} \right) \leq 2\varepsilon$.

Concl: $\cup B_n \in \mathcal{F}$.

4. Tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme union dénombrable de boules fermées rationnelles



$\Rightarrow U \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{G} = \{ B \in \mathcal{F} ;\ CB \in \mathcal{F} \} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ On voit que $\mathcal{G}$ contient tous les ouverts, et $\mathcal{G}$ est stable par $\cap$ et $\cup$ dénombr. et par C.

$\Rightarrow \mathcal{G}$ tribu.

$B \supset A \Rightarrow \exists C$ fermé, $\nu(A \setminus C) < \varepsilon$ $\quad = \mu(A \setminus C)$

$\Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. $\forall B$ borélien $\exists C \subset B$ fermé $\nu(B \setminus C) \leq$

Concl: tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ peut être approché intérieurement par un fermé.

5. fermé $\rightsquigarrow$ compact.

Soit $C \subset A$ tq $\mu(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

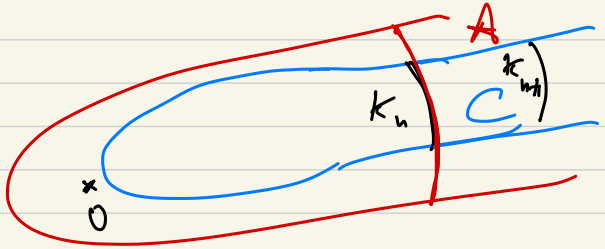
$\forall n$, $K_n = C \cap \overline{B}(0,n)$ compact, inclus dans A.

$\mu(C) \leq \mu(A) < \infty$

$\Rightarrow \mu(\underbrace{C \setminus K_n}_{\text{suite} \downarrow}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(C \setminus K_n) = \mu(\underbrace{C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}_{\emptyset}) = 0$

Pour n assez grand, $\mu(C \setminus K_n) < \varepsilon$

$\mu(A \setminus K_n) < 2\varepsilon$.

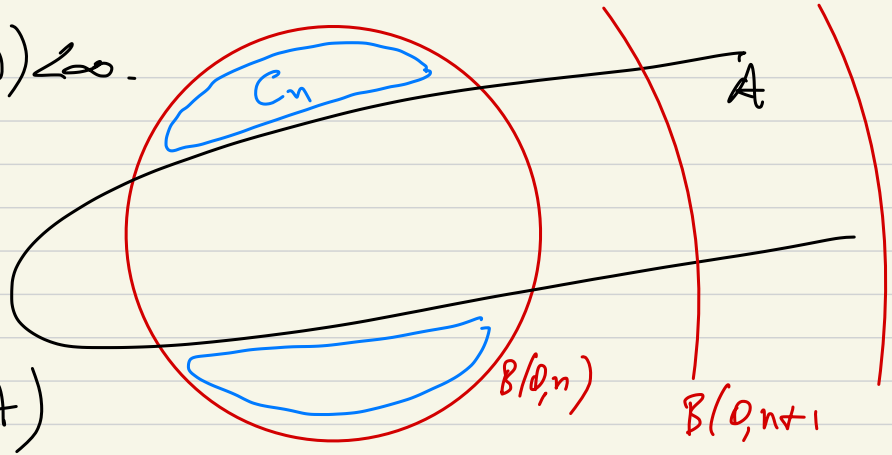


Concl : on a montré la régularité intérieure.

Montrons la régularité extérieure. $B(0,n) \setminus A$ borélien borné

$\rightarrow$ C compact

$\Rightarrow \mu(B(0,n)\setminus A) \leq \mu(\overline{B}(0,n)) < \infty$.



Etape précédente

$\Rightarrow$ on peut l'approcher par un compact $C_n \subset (B(0,n)\setminus A)$ tel que $\mu((B(0,n)\setminus A)\setminus C_n) < \varepsilon/2^n$

Soit $U_n = B(0,n)\setminus C_n$ ouvert, $B(0,n)\cap A \subset U_n$, et $\mu(U_n\setminus A) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$U = \bigcup_{n\geq 1} U_n$ ouvert, contient $\bigcup_n (B(0,n)\cap A) = A$.

$\mu(U\setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n\setminus A) \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.

$U\setminus A = \bigcup_n (U_n\setminus A)$

Conséquence de cette régularité :

Thm Soit μ 1 mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$ (i.e. localt finie). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors, l'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.

Pr Soit $f \in L^1(\Omega, \mu)$. On sait qu'il existe $g \in \mathcal{E}_p(\Omega)$ fonction étagée, t.q. $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

$\rightsquigarrow$ montrer que 1 fct étagée peut être approchée par $C_c(\Omega)$, pour $\|\cdot\|_p$. $\quad g = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$

Sur Ω, on peut trouver une suite exhaustive de compacts $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, t.q. $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} K_n$.

TCD $\Rightarrow \|g - g \mathbb{1}_{K_n}\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\Rightarrow$ on se ramène à des fonctions étagées à supports bornés.

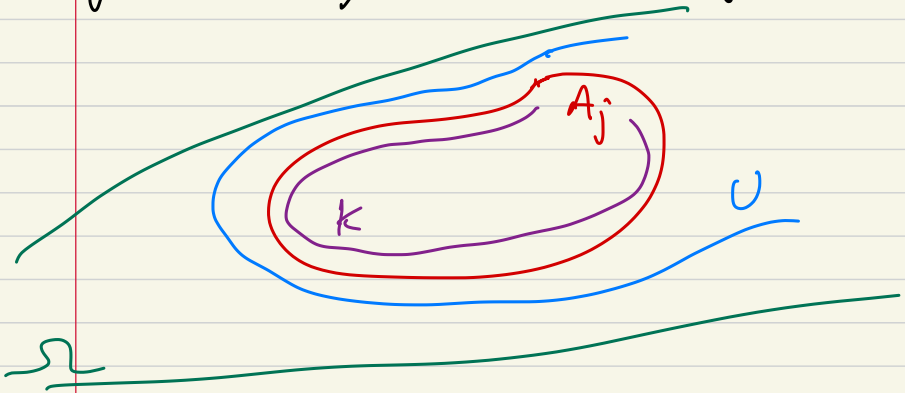
$\rightsquigarrow$ approcher $\mathbb{1}_{A_j}$, avec A_j borélien borné dans Ω.

avec $\overline{A_j} \subset \Omega$.

($\overline{A_j}$ compact.)

μ de Radon $\rightarrow \mu(\overline{A_j}) < \infty$.

Régularité de μ : $\exists\, K \subset A_j \subset U$, avec $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.



Lemme d'Urysohn :

$\exists\, h \in C_c(\Omega, [0,1])$, $\nexists$

$h_{|K} = 1$ et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$.

$\rightsquigarrow \mathbb{1}_K \leq h \leq \mathbb{1}_U$

$$\int |h - \mathbb{1}_{A_j}|^p \, d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon.$$