Université Paris-Saclay – Master 2 AMS – 2022-2021

Introduction à la théorie spectrale

(Stéphane Nonnenmacher)

DM (24 octobre 2022)

1. Le Laplacien sur $\mathbb{R}$ avec "conditions de transmission" en zéro

On cherche à définir un laplacien T_κ sur $\mathbb{R}^*$, satisfaisant en $x = 0$ une condition dite "de transmission", qui modélise l'effet d'une barrière semi-perméable aux ondes. Pour un certain paramètre $\kappa \in \mathbb{R}$, les fonctions u dans le domaine de ce laplacien vérifient :

$$\begin{cases} u'(0_+) = u'(0_-), & \text{(continuité de } u') \\ u'(0) = \kappa\,(u(0_+) - u(0_-)) & \text{(discontinuité de } u\text{, qui contrôle la valeur de } u') \end{cases} \tag{1.1}$$

On veut définir notre opérateur T_κ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

(1) Au vu des conditions de transmission, il est naturel de décomposer la fonction u en une partie u_- définie sur $\mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[$, et une partie u_+ définie sur $\mathbb{R}^*_+$. Définir le produit scalaire naturel sur $L^2(\mathbb{R}_-) \times L^2(\mathbb{R}_+)$, et montrer que l'espace de Hilbert induit est isomorphe à $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Expliquer pourquoi l'espace $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\mathbb{R}^*_-) \times H^1(\mathbb{R}^*_+)$ n'est, par contre, pas isomorphe à $H^1(\mathbb{R})$. Les conditions (1.1) ont-elles un sens pour une paire quelconque $(u_-, u_+) \in \mathcal{V}$?

(3) Justfier que les conditions (1.1) ont un sens pour une paire $(u_-, u_+) \in H^2(\mathbb{R}^*_-) \times H^2(\mathbb{R}^*_+)$.

(4) On veut construire l'opérateur T_κ à partir d'une forme quadratique $q = q_{\kappa,\nu}$ dépendant du paramètre réel $\kappa \in \mathbb{R}$, et d'un autre paramètre $\nu \in \mathbb{R}_+$: pour tous $u, v \in \mathcal{V}$, on pose :

$$\begin{aligned} q_{\kappa,\nu}(u, v) = &\int_{\mathbb{R}_-} \bar{u}'_- v'_- dx + \int_{\mathbb{R}_+} \bar{u}'_+ v'_+ dx + \nu \int_{\mathbb{R}_-} \bar{u}_- v_- dx + \nu \int_{\mathbb{R}_+} \bar{u}_+ v_+ dx \\ &+ \kappa \left(\overline{u_+(0) - u_-(0)}\right)(v_+(0) - v_-(0)). \end{aligned}$$

Montrer que cette forme quadratique est bien définie sur le domaine $u, v \in \mathcal{V}$, et qu'elle est symétrique.

(5) Montrer que pour tout $u_+ \in H^1(\mathbb{R}_+)$, on a la borne :

$$|u_+(0)| \leq 2\|u_+\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}. \tag{1.2}$$

En déduire que $q_{\kappa,\nu}$ est bornée sur $\mathcal{V}$.

(6) On suppose que $\kappa \geq 0$. Montrer que pour tout $\nu > 0$, la forme $q_{\kappa,\nu}$ est strictement positive.

(7) On suppose maintenant $\kappa < 0$. Montrer qu'il existe $\nu_0 = \nu_0(\kappa) > 0$ tel que pour tout $\nu \geq \nu_0$, la forme $q_{\kappa,\nu}$ est strictement positive.

(8) En déduire que pour tout $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$, la forme $q_{\kappa,\nu}$, de domaine $\mathcal{V}$, est fermée.

(9) On construit alors l'opérateur autoadjoint T_κ à partir de la forme $q_{\kappa,0}$. Décrire le domaine de T_κ, en particulier montrer que les éléments de ce domaine satisfont les conditions de transmission (1.1). Quelle est l'action de T_κ sur $u \in D(T_\kappa)$ en-dehors de $x = 0$?

(10) Montrer que le spectre essentiel de T_κ contient $\mathbb{R}_+$.

(11) Supposons $\kappa \geq 0$. Montrer alors que l'opérateur T_κ est positif. Que vaut alors le spectre de T_κ ?.

(12) On s'intéresse dorénavant au cas opposé $\kappa < 0$. On veut montrer qu'une partie du spectre de T_κ est négatif. Montrer que pour cela, il suffit d'exhiber une fonction $u \in \mathcal{V}$ telle que $q_{\kappa,\nu}(u, u) < 0$.

(13) Considérer une fonction $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ supportée sur $[0, 1]$, telle que $\psi(0) = 1$, et dilater cette fonction par $\psi_n(x) = \psi(x/n)$ (avec $n > 0$). Montrer que pour n assez grand, cette fonction vérifie $q_{\kappa,0}(\psi_n) < 0$. Conclure.

(14) On reste dans le cas $\kappa < 0$. On cherche à exhiber une fonction propre $u_0 \in D(T_\kappa)$ de T_κ de valeur propre $E_0 < 0$. Montrer que les restrictions $u_{0\restriction\mathbb{R}^*_-}$ et $u_{0\restriction\mathbb{R}^*_+}$ ont une forme très simple, et que les conditions de transmission imposent une valeur unique à E_0, qu'on explicitera. Donner l'expression de u_0. En déduire que T_κ n'admet qu'une unique valeur propre négative, et que cette valeur propre est simple.

2. Laplacien magnétique sur $\mathbb{R}^2$

On se place sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$. On considère une fonction à valeur vectorielle $A = (A_1, A_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, qui représente le potentiel vecteur magnétique, et on définit l'opérateur T_A agissant sur $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ par :

$$T_A u := \sum_{j=1}^{2} (-i\partial_j + A_j)(-i\partial_j u + A_j u).$$

(1) Montrer que cet opérateur, défini sur $D(T_A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, est symétrique et positif. Donner l'expression de la forme quadratique q_A associée à T.

(2) On note $\overline{q}_A$ la fermeture de la forme quadratique q_A. Montrer que le domaine $D(\overline{q}_A)$ est un sous-espace de

$$W_A := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \mid (-i\nabla u + Au) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \right\},$$

et que $W_A \subset H^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. On note $\tilde{T}_A$ l'extension de Friedrichs de T_A, et on l'appelle le *laplacien magnétique.*

(3) On considère une fonction arbitraire $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et on note U_ω l'opérateur de multiplication par la fonction $e^{i\omega}$. Montrer que U_ω est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'opérateur $U_\omega^* T_A U_\omega$ sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ est égal à $T_{A'}$, pour un potentiel magnétique A' qu'on calculera explicitement. Montrer qu'on a aussi l'identité

$$U_\omega^* \tilde{T}_A U_\omega = \tilde{T}_{A'}$$

entre les deux laplaciens magnétiques. La fonction ω, et la conjugaison qu'elle induit, est appelée un *changement de jauge.*

(4) On définit la fonction

$$B(x) := \partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

qu'on appelle le champ magnétique engendré par le potentiel $A(x)$. Vérifier que les potentiels A et A' engendrent le même champ magnétique. Connaissez-vous un argument montrant que si les potentiels magnétiques A et $\tilde{A}$ engendrent le même champ magnétique B, alors il existe une fonction $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que A et A' sont reliés par le changement de jauge ω ?

(5) En déduire que le spectre de $\tilde{T}_A$ ne dépend que du champ magnétique B.

(6) En utilisant les opérateurs différentiels $X_j = -i\partial_j + A_j$ $(j = 1, 2)$, et en développant $\|(X_1 - iX_2)\, u\|^2$, montrer l'inégalité

$$(u, T_A u) \geq \int_{\mathbb{R}^2} B(x)\, |u(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(7) À partir de maintenant on suppose que $B(x) \geq 0$ sur tout $\mathbb{R}^2$. En déduire que l'espace W_A est inclus dans l'espace L^2 à poids $L^2\left(\mathbb{R}^2, (1 + B(x))\, dx\right)$.

(8) On suppose que le champ magnétique diverge à l'infini : $B(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$ (on appelle cette configuration du champ une *bouteille magnétique*). Montrer que si on munit W_A de sa norme naturelle $\|u\|_{W_A}^2 := q_A(u, u) + \|u\|_{L^2}^2$, alors l'injection $W_A \hookrightarrow L^2$ est compacte. En déduire que l'opérateur $\tilde{T}_A$ est à résolvante compacte.