Exercice 11.1

1. Soient $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_t u = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

   a. Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$ on note
   $$w_\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} w(t,x)\phi(x)dx\,.$$
   Calculer $(u_\phi)'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$. En déduire que l'on a dans $L^2(\mathbb{R})$ l'égalité
   $$\forall t_1, t_2 \geq 0 \qquad u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(s)ds\,.$$

   b. En conclure que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$ avec $u'(t) = v(t,\cdot)$ pour $t \geq 0$.

2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ vérifiant les deux propriétés

   i. $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $t \geq 0$,

   ii. $\|u(t,\cdot) - u(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \to 0^+$.

3. Etant donné $P \in \mathbb{C}[X]$, on considère le problème de Cauchy suivant :
   $$(*) \quad \begin{cases} \partial_t u + P(\partial_x)u = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

   a. Déterminer l'ensemble des polynômes P pour lesquels le problème $(*)$ est bien posé dans $L^2(\mathbb{R})$, i.e. pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$.

   b. On suppose $(*)$ bien posé. Déterminer les $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ pour lesquels $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))$.

Exercice 11.2 Discuter suivant les valeurs des nombres complexes a et b l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ au problème suivant, pour tout $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u + a\partial_x u + b\partial_y u = 0\,, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y)\,. \end{cases}$$

Exercice 11.3 Discuter suivant les valeurs des nombres complexes a et b l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ au problème suivant, pour tous $u_0, u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + a\partial_x u + b\partial_y u = 0\,, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y)\,, \\ \partial_t u(0,x,y) = u_1(x,y)\,. \end{cases}$$

Exercice 11.4 On désigne par $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des distributions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $u \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, on note $(c_n(u))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de u .

A. On dit que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ est *borné dans* $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans K, on a

$$\forall u \in \mathcal{E} \qquad |\langle u, \varphi\rangle| \leq C_K \sup_{0\leq k\leq p_K} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| \ .$$

Montrer que, si $\mathcal{E}$ est borné dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall u \in \mathcal{E} \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad |c_n(u)| \leq C(1+|n|)^p \, .$$

B. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On dit qu'une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}))$ de l'équation $\partial_t u + P(\partial_x)u = 0$ est *séculaire dans le cadre périodique* si $\mathcal{E} = \{u(t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$.

1. Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}))$ une solution séculaire dans le cadre périodique de $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$.
   a. Donner, en fonction de t et de $c_n^0 = c_n(u(0))$, l'expression de $c_n(u(t))$.
   b. En déduire qu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $T > 0$,

   $$|c_n^0| \leq C\mathrm{e}^{-Tn^2}(1+|n|)^p \, .$$

   c. Décrire u.
2. Quelles sont les solutions séculaires dans le cadre périodique de $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$?

C. On dit qu'une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ de $\partial_t u + P(\partial_x)u = 0$ est *séculaire dans le cadre tempéré* si l'ensemble $\mathcal{E} = \{u(t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\langle u(t), \phi\rangle| \leq C \sup_{k+n\leq q} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial_x^n \phi(x)|.$$

Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ une solution séculaire dans le cadre tempéré de l'équation de la chaleur. On pose $u_0 = u(0)$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

   $$\forall T > 0 \qquad |\langle \widehat{u_0}, \varphi\rangle| \leq C \sup_{k+\ell\leq q} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^k \partial_\xi^\ell(\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-T\xi^2})| \ .$$

   En déduire que si 0 n'appartient pas au support de φ alors $\langle \widehat{u_0}, \varphi\rangle = 0$.
2. Rappeler pourquoi d'après la question précédente, il existe $c_0, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que

   $$\widehat{u_0} = \sum_{k=0}^{m} c_k \delta_0^{(k)} \ .$$

3. On suppose $m \geq 2$ et on choisit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi^{(m-2)}(0) \neq 0$ et $\varphi^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < m-2$. Calculer la limite suivante :

   $$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \langle \widehat{u(-T)}, \varphi\rangle \ .$$

   En déduire que $c_n = 0$ pour tout $n \geq 2$, puis décrire u.