Exercice 1.1 Théorème de Baire et ses applications On dit qu'un espace topologique est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De façon èquivalente, un espace topologique est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

1. *Théorème de Baire:* tout espace métrique complet X est un espace de Baire.

   (a) Soit $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dénombrable d'ouverts denses dans X et U un ouvert non vide quelquonque. Montrer qu'il existe une suite de boules ouvertes $B_n = B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec $r_n < \frac{1}{n}$ t.q.
   $$\bar{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$
   où $B_0 = U$.

   (b) Montrer que la suite x_n est une suite de Cauchy dans X.

   (c) Posons $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$. Montrer que K est non vide.

   (d) En déduire que $U \bigcap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \right)$ est non vide. Conclure la démonstration du théorème de Baire.

2. *Les bases algébriques d'un espace de Banach*

   (a) Montrer que, si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, qui s'écrit comme l'union d'une famille dénombrable de ses sous-espaces de dimension finie, alors E n'est pas un espace de Baire.

   (b) En déduire que dans un espace de Banach de dimension infinie toute base algébrique est non dénombrable.

   (c) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet.

3. *Théorème de la limite simple des fonctions continues:* si une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f, alors f est continue sur un ensemble dense de réels.

   On pose $F_{n,k} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall m \geq n, \forall p \geq n, |f_m(x) - f_p(x)| \leq 1/k\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On note $I_{n,k}$ l'intérieur de $F_{n,k}$, $O_k = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_{n,k}$ et $O = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} O_k$. On va montrer que O est dense dans $\mathbb{R}$ et que f est continue sur O.

   (a) Montrer que $F_{n,k}$ sont fermés et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,k} = \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que pour tout k, pour tout segment I de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive, il existe n tel que $F_{n,k} \cap I$ est d'intérieur non vide. En déduire que $\forall k$ l'ensemble O_k est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ et que O est dense dans $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que $\forall x \in O$ f est continue en x.

4. (a) *Fonctions continues en* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *et discontinues en* $\mathbb{Q}$

   On définit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   où $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, est la représentation en fraction irréductible de $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

   (b) *Fonctions continues en* $\mathbb{Q}$ *et discontinues en* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

   On dit qu'un sous-ensemble S d'un espace topoloqique X est de classe G_δ s'il est une intersection dénombrable d'ouverts.

   i. Montrer que l'ensemble de points de continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe G_δ. On peut considérer l'ensemble

$$C_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \exists\delta \text{ t.q. } |x - x'| < \delta, |x - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon\}$$

   et montrer que C_ϵ est ouvert pour $\forall\epsilon > 0$ et que f est continue en x ssi $x \in C_{1/n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   ii. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas de classe G_δ. En déduire qu'il n'existe pas de fonctions continues en tout point rationnel et discontinues en tout point irrationnel.

Exercice 1.2 Opérateurs bornés

Soit E, F des espaces vectoriels normés. On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E vers F. On munit $\mathcal{L}(E, F)$ de la norme définie par

$$\|T\|_{E\to F} = \sup_{u\in E\backslash\{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

1. Montrer que si E, F sont des espaces de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

2. Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ et $\|\cdot\|_{E\to E} = \|\cdot\|$.

   (a) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|1-T\| < 1$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(1-T)^n$ est convergente et que T est inversible avec

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - T)^n.$$

   (b) Soit $S, T \in \mathcal{L}(E)$, S opérateur inversible. Montrer que si $\|S - T\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$, alors T est inversible et $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}\|S^{-1}\|$ avec $q = \|S - T\|\|S^{-1}\|$.

   (c) En déduire que l'ensemble des opérateurs inversibles est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

   (d) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{C}$ de $z = 1$ tel que $\forall z \in V$ la résolvante $R_z(T)$ est bien définie. (On rappelle que, par définition, $R_z(T) = (zI - T)^{-1}$.)

3. (a) Soit $E = L^2([0,1])$ muni de la norme usuelle. On définit $T : E \to E$ en posant pour tout $f \in E$
$$(Tf)(x) = xf(x).$$
Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, calculer la norme de T et montrer qu'elle n'est pas atteinte. Montrer que T n'admet pas de fonctions propres.

   (b) Soit $E = l^2(\mathbb{N})$ muni de la norme usuelle. On définit $T : E \to E$ en posant pour tout $f \in E$
$$Tf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \langle f, e_n\rangle e_n,$$
où e_n est la base canonique de $E = l^2(\mathbb{N})$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, calculer la norme de T et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 1.3 Equation d'évolution en dimension finie.

On se place sur l'espace vectoriel $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$, équipé de la structure hermitienne
$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{d} \bar{u}_i v_i,$$
et de la norme associée $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Soit A une matrice $d \times d$ complexe, et on considère l'équation différentielle
$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0,$$
de donnée initiale $u(0) = u_0 \in \mathcal{H}$ qu'on supposera de norme 1.

1. Montrer que la solution de cette équation peut s'obtenir à partir de la famille de matrices exponentielles $S(t) = \exp(-tA)$, qu'on définira sous forme d'une série absolument convergente pour la norme matricielle. Montrer que la famille $\{S(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ forme un groupe abélien. On s'intéressera plus précisément au semi-groupe $\{S(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

2. On suppose que A est diagonale, $A = diag(\lambda_j)_{j=1,\dots,d}$, avec λ_j rangés par ordre de parties réelles croissantes. Pour $t \geq 0$, obtenir une borne exponentielle explicite sur $\|u(t)\|$ en fonction de $\Re\lambda_1$. En déduire que si $\Re\lambda_1 \geq 0$, le semi-groupe $\{S(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ est *contractant.*

3. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_d\}$. Montrer qu'on retrouve les mêmes résultats qu'à la question précédente.

4. On suppose à présent que A est diagonalisable, mais que ses vecteurs propres $\{e_1, \dots, e_d\}$ ne sont plus orthogonaux. En utilisant l'équivalence avec la norme hermitienne adaptée aux $\{e_1, \dots, e_d\}$, montrer que le semi-groupe $\{S(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ admet une borne de la forme
$$\|u(t)\| \leq M\, e^{-t\Re\lambda_1}\|u_0\|,$$
pour une certaine constante $M \geq 1$.

5. On considère maintenant un cas où la matrice A n'est pas diagonalisable. On prendra comme exemple le bloc de Jordan $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en dimension $d = 2$. Montrer que le semi-groupe $S(t)$ admet une croissance polynômiale. En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe M_ϵ tel que
$$\|u(t)\| \leq M_\epsilon \, e^{t\epsilon} \|u_0\|,$$
mais qu'on ne peut pas prendre $\epsilon = 0$.

Exercice 1.4 *Fonction continue dont la série de Fourier diverge*

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit D_n le n-ième noyau de Dirichlet, i.e. $D_n : t \mapsto \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. Soit C l'ensemble de fonctions sur $\mathbb{R}$ continues 2π-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$. Expliquer pourquoi C muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ est un espace de Banach.

   On définit $l_n : C \to \mathbb{C}$ par
$$l_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) dt.$$

   Montrer que l_n est un opérateur borné et que $\|l_n\|_{C \to \mathbb{C}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$.

3. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln n.$$

4. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C$ dont la serie de Fourier diverge en 0, i.e. telle que $\limsup_{n \to \infty} |l_n(f)| = \infty$.

Exercice 1.5 *Théorème de Grothendieck sur la finitude des sous-espaces de L^∞ fermés dans L^p*

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose qu'il existe $p \in [1, +\infty[$ tel que F soit fermé dans $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$. On se propose d'en déduire que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans $L^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$ et en déduire qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in F$, on ait
$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^p} \ .$$

2. Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $f \in F$,
$$\|f\|_{L^\infty} \leq B \|f\|_{L^2}$$

(on pourra distinguer les cas $p > 2$ et $p < 2$: dans le second cas, on pensera à utiliser l'inégalité de Hölder ; dans le premier cas, on établira préalablement l'estimation

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\theta} \, \|f\|_{L^2}^{\theta} \ ,$$

avec $\theta = 2/p$).

3. On munit F du produit scalaire L^2. Montrer que, pour tout système orthonormé $(e_1, \cdots, e_N)$ de F, pour μ -presque tout $x \in X$, pour tous $c_1, \cdots, c_N \in \mathbf{C}$,

$$\left| \sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x) \right| \leq B \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \right)^{1/2} .$$

En déduire que, pour μ -presque tout $x \in X$,

$$\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 \leq B^2 \ ,$$

et que $\dim(F) \leq B^2 \mu(X)$.

4. Montrer que

$$F = \{ f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{i 2^n x} \, , \, \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty \}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2([0, 2\pi], dx)$. Etablir que les normes L^2 et L^4 sont équivalentes sur l'intersection de F avec l'espace des polynômes trigonométriques. En déduire que F est aussi fermé dans $L^4([0, 2\pi], dx)$.