

Exercice 2.1 Soit $E = \ell^2(\mathbb{Z})$ muni de la norme usuelle. Etant donnés $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in E$ et $t \geq 0$, on notera $S(t)u = (e^{-t|n|}u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

- Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est un semi-groupe de contractions sur E .
- Déterminer le générateur infinitésimal A du semi-groupe S .
- Soient $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $u \in E$. On définit $u_\psi \in E$ en posant

$$u_\psi = \left(\int_0^\infty e^{-t|n|} u_n \psi(t) dt \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Vérifier que l'on a bien $u_\psi \in D(A)$ et $Au_\psi = u_{\psi'}$.

Exercice 2.2 Etant donnés $t \geq 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ on note

$$S(t)u(x) = u(xe^t).$$

- Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$ est un semi-groupe de contractions. Dans la suite, on notera A le générateur infinitésimal de S et $D(A)$ son domaine.
- Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$, établir dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u(x) - u(x)}{t} = xu'(x).$$

Que peut-on en déduire concernant A ?

- Soient $t \geq 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $v = xu' \in L^1(\mathbb{R})$. Etablir l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$u(xe^t) - u(x) = t \int_0^1 v(xe^{rt}) dr.$$

On pourra utiliser la notation $\phi_\lambda(x) = \phi(xe^{-\lambda})e^{-\lambda}$. Déterminer A .

Exercice 2.3 Etant donnés $t \in \mathbb{R}$ et $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ on définit $S(t)u \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ en posant

$$S(t)u(x) = u(x) \cos(tx) - u(-x) \sin(tx).$$

- Montrer que S définit un semi-groupe d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$.
 - Vérifier que $S(t)^{-1} = S(-t)$ et que $S(t)$ est une isométrie.
 - Déterminer le générateur infinitésimal de $S(t)$.
 - Pour tous $t > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$ on note $u_t(x) = u(tx)$. Montrer que

$$\|S(t)u_t - u_t\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{C(u)}{\sqrt{t}},$$

où $C(u)$ est une constante que l'on calculera. En déduire que $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ n'est pas continue à droite en 0.

2. a. Montrer que S définit un semi-groupe d'opérateurs sur $L^1(\mathbb{R})$.
 b. Montrer que si $t > 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} |S(t)u(x)| dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} |S(1)u(\frac{x}{t})| dx.$$

En déduire que $\|S(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|S(1)\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

- c. Vérifier que $|\cos x| + |\sin x| \leq \sqrt{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quels sont les cas d'égalité ? En déduire que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\|S(1)u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

- d. En considérant $u_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]}(x)$ pour un réel a bien choisi, montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|S(1)u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\|u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}} = \sqrt{2}.$$

En conclure que $\|S(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sqrt{2}$ pour tout $t > 0$.

- e. Que peut-on en déduire concernant $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$?

3. La fonction $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))$ est-elle bien définie ? Est-ce un semi-groupe ?

Exercice 2.4 Soit $E = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\| = \sup |u|$. On définit sur E un opérateur non borné A en posant $D(A) = \{u \in E : u' \in E\}$ et $Au = u'$ pour tout $u \in D(A)$.

1. Dans cette question, on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$. Soient $u \in D(A)$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés. On note $\phi_x(t) = S(t)u(x+t)$.
 - a. Montrer que $\phi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et calculer $\phi'_x(t)$ pour tout $t \geq 0$.
 - b. En déduire les valeurs de $\phi_x(t)$ puis de $S(t)u(x)$ en fonction de u, t, x .
2. a. Montrer que l'expression trouvée à la question précédente permet de définir un semi-groupe sur E . Quel est son générateur infinitésimal ?
 b. En conclure que A est bien le générateur d'un semi-groupe S que l'on explicitera.
 c. Calculer $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 2.5 Pour $k = 0, 1$, on note $E_k = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]) : u(k) = 0\}$ que l'on munit de la norme $\|u\|_k = \sup |u|$. On définit sur E_k un opérateur non borné A_k en posant $A_k u = u'$ pour tout u appartenant au domaine $D(A_k) = \{u \in E_k : u' \in E_k\}$.

1. a. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que A_0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(E_0)$ dont on déterminera l'expression.
 b. Calculer $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E_0)}$ pour tout $t \geq 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que A_1 ne peut pas être le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs sur E_1 .