Exercice 2.1 Soit $E = \ell^2(\mathbb{Z})$ muni de la norme usuelle. Etant donnés $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$ et $t \geq 0$, on notera $S(t)u = (e^{-t|n|}u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

a. Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ est un semi-groupe de contractions sur E.

b. Déterminer le générateur infinitésimal A du semi-groupe S.

c. Soient $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $u \in E$. On définit $u_\psi \in E$ en posant

$$u_\psi = \left(\int_0^\infty e^{-t|n|} u_n \psi(t) dt \right)_{n\in\mathbb{Z}} .$$

Vérifier que l'on a bien $u_\psi \in D(A)$ et $Au_\psi = u_{\psi'}$.

Exercice 2.2 Etant donnés $t \geq 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ on note

$$S(t)u(x) = u(xe^t) .$$

a. Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$ est un semi-groupe de contractions. Dans la suite, on notera A le générateur infinitésimal de S et $D(A)$ son domaine.

b. Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$, établir dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u(x) - u(x)}{t} = xu'(x) .$$

Que peut-on en déduire concernant A ?

c. Soient $t \geq 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $v = xu' \in L^1(\mathbb{R})$. Etablir l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$u(xe^t) - u(x) = t \int_0^1 v(xe^{rt}) dr .$$

On pourra utiliser la notation $\phi_\lambda(x) = \phi(xe^{-\lambda})e^{-\lambda}$. Déterminer A.

Exercice 2.3 Etant donnés $t \in \mathbb{R}$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on définit $S(t)u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ en posant

$$S(t)u(x) = u(x)\cos(tx) - u(-x)\sin(tx) .$$

1. a. Montrer que S définit un semi-groupe d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$.
   b. Vérifier que $S(t)^{-1} = S(-t)$ et que $S(t)$ est une isométrie.
   c. Déterminer le générateur infinitésimal de $S(t)$.
   d. Pour tous $t > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$ on note $u_t(x) = u(tx)$. Montrer que

$$\|S(t)u_t - u_t\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{C(u)}{\sqrt{t}} ,$$

   où $C(u)$ est une constante que l'on calculera. En déduire que $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ n'est pas continue à droite en 0.

2. a. Montrer que S définit un semi-groupe d'opérateurs sur $L^1(\mathbb{R})$.

   b. Montrer que si $t > 0$ et $u \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} |S(t)u(x)|dx = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} |S(1)u(\frac{x}{t})|dx\,.$$

   En déduire que $|||S(t)|||_{L^1(\mathbb{R})} = |||S(1)|||_{L^1(\mathbb{R})}$.

   c. Vérifier que $|\cos x| + |\sin x| \le \sqrt{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quels sont les cas d'égalité ? En déduire que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\|S(1)u\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \sqrt{2}\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

   d. En considérant $u_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{[a-\varepsilon,a+\varepsilon]}(x)$ pour un réel a bien choisi, montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\|S(1)u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\|u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})}} = \sqrt{2}\,.$$

   En conclure que $|||S(t)|||_{L^1(\mathbb{R})} = \sqrt{2}$ pour tout $t > 0$.

   e. Que peut-on en déduire concernant $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$?

3. La fonction $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))$ est-elle bien définie ? Est-ce un semi-groupe ?

Exercice 2.4 Soit $E = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\| = \sup|u|$. On définit sur E un opérateur non borné A en posant $D(A) = \{u \in E \;:\; u' \in E\}$ et $Au = u'$ pour tout $u \in D(A)$.

1. Dans cette question, on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$. Soient $u \in D(A)$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés. On note $\phi_x(t) = S(t)u(x+t)$.

   a. Montrer que $\phi_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et calculer $\phi_x'(t)$ pour tout $t \ge 0$.

   b. En déduire les valeurs de $\phi_x(t)$ puis de $S(t)u(x)$ en fonction de u, t, x.

2. a. Montrer que l'expression trouvée à la question précédente permet de définir un semi-groupe sur E. Quel est son générateur infinitésimal ?

   b. En conclure que A est bien le générateur d'un semi-groupe S que l'on explicitera.

   c. Calculer $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ pour tout $t \ge 0$.

Exercice 2.5 Pour $k = 0, 1$, on note $E_k = \{u \in \mathcal{C}([0,1]) \;:\; u(k) = 0\}$ que l'on munit de la norme $\|u\|_k = \sup|u|$. On définit sur E_k un opérateur non borné A_k en posant $A_k u = u'$ pour tout u appartenant au domaine $D(A_k) = \{u \in E_k \;:\; u' \in E_k\}$.

1. a. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que A_0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E_0)$ dont on déterminera l'expression.

   b. Calculer $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E_0)}$ pour tout $t \ge 0$.

2. En raisonnant par l'absurde, montrer que A_1 ne peut pas être le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs sur E_1.