Exercice 3.1 Soit $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\text{Re } a(x) \leq \lambda$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \geq 0$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$(T(t)u)(x) = e^{ta(x)}u(x)\,.$$

Montrer que T définit un semi-groupe sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et déterminer son générateur infinitésimal.

Exercice 3.2 Semi-groupe de la chaleur discrétisée

Etant donné $h > 0$, on définit un opérateur $A_h \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ en posant

$$A_h u(x) = -\frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2}\,,$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$. Dans la suite, on notera $S_h(t) = \exp(-tA_h)$. On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

On rappelle que pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\xi^2/4\lambda}\,.$$

a. Exprimer la transformée de Fourier de $A_h u$ puis de $S_h(t)u$ en fonction de celle de u.

b. Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $S_h(t)u$ tend vers une limite $S(t)u$ lorsque $h \to 0^+$ et que cette limite définit un semi-groupe sur $L^2(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $t > 0$, montrer que l'on peut écrire $S(t)u = k_t * u$ où $k_t \in L^1(\mathbb{R})$.

d. Déterminer le générateur infinitésimal de S et l'équation d'évolution associée. En déduire que $-A_h$ peut être appelé le laplacien discrétisé.

Exercice 3.3 Vitesse de décroissance d'un semi-groupe

Soient E un espace de Banach et $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ un semi-groupe d'opérateurs tel que pour tout $u \in E$, la fonction $t \mapsto S(t)u$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. On s'intéresse dans cet exercice à la vitesse de convergence vers 0.

1. Montrer que l'on est nécessairement dans l'un des deux cas suivants :

   i/ Il existe des réels a, $M > 0$ tels que $\|S(t)\| \leq Me^{-at}$ pour tout $t \geq 0$.

   ii/ Pour tout $\phi : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ continu de limite 0 en $+\infty$, il existe $u \in E$ tel que

   $$(*) \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\|S(t)u\|}{\phi(t)} = +\infty\,.$$

   On pourra commencer par supposer que ii/ n'est pas vrai.

2. On considère ici le cas particulier de l'espace $E = \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \; : \; m|u|^2 \in L^1(\mathbb{R})\}$ muni de la norme $\|u\| = \|u\sqrt{m}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ où l'on a noté $m(x) = e^{-\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) + \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)$.

   a. On note $S(t)u(x) = u(x-t)$ pour tous $u \in E$ et $t \geq 0$. Vérifier que ceci définit bien un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$. Quelle est la valeur de $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ pour $t \geq 0$?

   b. Soit $u \in E$. Montrer que l'on a bien $\lim_{t\to+\infty} S(t)u = 0$.

   c. Soit ϕ comme en ii/. Expliciter un élément $u \in E$ tel que la limite $(*)$ soit vérifiée.

Exercice 3.4 Semi-groupes régularisants

Soit $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ un semi-groupe de générateur A. On suppose qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $S(t)u \in D(A)$ pour tous $t \geq t_0$ et $u \in E$.

1. a. Montrer que le graphe $\{(u, Au)\,,\; u \in D(A)\}$ est fermé dans $E \times E$.

   b. En déduire que $AS(t) \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $t \geq t_0$.

   c. Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ est continu sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

2. On suppose désormais que $E = L^1(\mathbb{R})$. Pour tous $t \geq 0$ et $u \in E$, on note

$$S(t)u(x) = \exp(itx^2 - t\ln(1+x^2))u(x)\,.$$

   a. Vérifier que ceci définit bien un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ dont on précisera le générateur infinitésimal A.

   b. Etablir la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \max_{|x|\leq|h|^{-1/4}} |e^{-h\ln(1+x^2)} - 1| = 0\,.$$

   En déduire que pour tout $t > 0$ on a

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(e^{ihx^2 - h\ln(1+x^2)} - 1)e^{itx^2 - t\ln(1+x^2)}| = 0\,.$$

   Montrer que $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ est continu sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   c. Pour quelles valeurs de t a-t-on $S(t)u \in D(A)$ pour tout $u \in E$?

Exercice 3.5 Approximations bornées du générateur d'un semi-groupe

Soient E un espace de Banach et $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ un semi-groupe de générateur infinitésimal A.

1. On suppose donnée une suite de semi-groupes $S_n : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ dont les générateurs sont des opérateurs bornés $A_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

   i/ Il existe $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\|S_n(t)\| \leq Me^{at}$ pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

   ii/ $A_nS(t) = S(t)A_n$ pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

   iii/ Pour tout $u \in D(A)$ la suite (A_nu) tend vers Au.

   Soient $u \in E$ et $t > 0$. On note $\phi_t(\tau) = S_n(\tau)S(t-\tau)u$ si $\tau \in [0, t]$.

a. On suppose $u \in D(A)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$ on peut écrire

$$S_n(t)u - S(t)u = \int_0^t \phi_t'(\tau) d\tau \, .$$

b. En déduire que pour tous $u \in E$ et $T > 0$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{t \in [0,T]} \|S_n(t)u - S(t)u\| = 0 \, .$$

2. On pose $A_n = 2^n(\mathrm{Id}_E - S(2^{-n}))$ pour $n \geq 0$ et on note $S_n(t) = \exp(-tA_n)$. Montrer que les hypothèses de la question précédente sont satisfaites.

3. On se place désormais dans le cas où $E = C_0(\mathbb{R})$ est muni de la norme du sup et l'on considère le semi-groupe défini par $S(t)u(s) = u(s+t)$ pour tout $u \in E$.

   a. Quel est le générateur A du semi-groupe S ?

   b. Déduire de qui précède une démonstration du théorème de Weierstrass (sur l'approximation d'une fonction continue par des polynomes).