Exercice 4.1 Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit un opérateur A sur l'espace $H^s(\mathbb{R})$ en posant $Au = iu''$ pour tout u appartenant au domaine $D(A) = H^{s+2}(\mathbb{R})$.

1. a. Soient $f \in H^s(\mathbb{R})$ et $\lambda \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique $u \in H^{s+2}(\mathbb{R})$ solution de l'équation $\lambda u + iu'' = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq |\lambda|^{-1}\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$.

   b. En déduire que A est le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire U sur $H^s(\mathbb{R})$.

2. On suppose désormais que $s = -1$.

   a. Montrer que pour tous $\lambda \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a
   $$L_\lambda(U(\lambda^2 t)\delta_0) = U(t)\delta_0\,,$$
   où $L_\lambda \in \mathcal{L}(H^{-1}(\mathbb{R}))$ est défini par $L_\lambda u(x) = |\lambda| u(\lambda x)$.

   b. En déduire l'expression de $U(t)\delta_0$ en fonction de $h = U(1)\delta_0$.

3. On va montrer que h vérifie une certaine équation différentielle ordinaire.

   a. En explicitant le problème de Cauchy satisfait par $t \mapsto U(t)\delta_0$, montrer que
   $$\forall(\phi,\psi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*) \qquad \int_0^\infty \langle h(x), \phi(x\sqrt{t})\psi'(t) - i\phi''(x\sqrt{t})\psi(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} dt = 0\,.$$

   b. En déduire que pour tout $t > 0$ on a
   $$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \qquad \langle h(x)\,, \frac{x}{2\sqrt{t}}\phi'(x\sqrt{t}) + i\phi''(x\sqrt{t})\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = 0\,.$$

   c. En conclure que h est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle
   $$(*) \quad 2ih''(x) - xh'(x) - h(x) = 0\,.$$

4. On cherche maintenant l'expression de h.

   a. Montrer que l'espace des solutions $\mathcal{C}^\infty$ de $(*)$ est somme directe du sous-espace des solutions paires et du sous-espace des solutions impaires, tous deux de dimension 1.

   b. On pose $h = \eta g$ avec $\eta(x) = \exp(-ix^2/4)$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par g ? En déduire que h est $\mathcal{C}^\infty$ et en conclure qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $h(x) = a\eta(x)$.

   c. Sachant que $\mathcal{F}(\eta)(\xi) = \sqrt{2\pi}(1-i)\exp(i\xi^2)$, calculer la valeur de a.

5. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$ à support compact. On utilisera dans cette question la notation $U_s : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}))$ pour désigner le groupe d'opérateurs obtenu plus haut.

   a. Soit $s' < s$. Montrer que $U_{s'}(t)_{|H^s(\mathbb{R})} = U_s(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   b. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on note $\Gamma(u) = u * f$. Etant donné un réel σ fixé, montrer qu'il existe σ' assez petit pour que l'opérateur $\Gamma : H^\sigma(\mathbb{R}) \to H^{\sigma'}(\mathbb{R})$ soit bien défini et continu.

   c. Déduire de ce qui précède l'expression de $U_s(t)f$.

Exercice 4.2 Pour tout $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on définit $Lu \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ en posant $Lu(x) = xu(-x)$.

1. Soient $\lambda \neq 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $(L + \lambda)u = f$ admet dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une unique solution que l'on explicitera.

2. On définit un opérateur A sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ en posant $Au = Lu$ pour tout élément du domaine $u \in D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ Lu \in L^2(\mathbb{R})\}$.

   a. Soient $\lambda \neq 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $(A + \lambda)u = f$ admet une unique solution u dans $D(A)$ telle que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\lambda|^{-1}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

   b. En déduire que A est le générateur d'un groupe d'isométries $S : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$.

   c. Soit $u_0 \in D(A)$ tel que $Au_0 \in D(A)$. Quelle équation différentielle d'ordre 2 en temps la fonction $u : t \mapsto S(t)u_0$ vérifie-t-elle ? En déduire l'expression de $S(t)u(x)$.

3. On définit un opérateur A sur l'espace $L^1(\mathbb{R})$ en posant $Au = Lu$ pour tout élément du domaine $u \in D(A) = \{u \in L^1(\mathbb{R}) \ : \ Lu \in L^1(\mathbb{R})\}$.

   a. Soient $\lambda \neq 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $(A + \lambda)u = f$ admet une unique solution $u \in D(A)$ mais que l'on ne peut pas trouver $\lambda_0 > 0$ tel que

   $$\forall \lambda > \lambda_0 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \|(\lambda + A)^{-1}f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

   On pourra considérer des fonctions de la forme $f_\varepsilon = \mathbf{1}_{[\lambda/2-\varepsilon,\lambda/2+\varepsilon]}$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

   b. On a vu à l'exercice **2.3** que l'opérateur A génère un semi-groupe sur $L^1(\mathbb{R})$. Cela est-il contradictoire avec l'observation précédente ?

Exercice 4.3 Soient E un espace de Banach, A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E et $B \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu sur E.

a. On fixe $f \in E$. Montrer que l'équation

$$v + B(A + \lambda)^{-1}v = f$$

admet une unique solution $v \in E$ lorsque λ est assez grand.

b. En déduire que l'opérateur $A + B$, défini par $(A + B)u = Au + Bu$ pour tout $u \in D(A)$, est le générateur d'un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$. Donner une majoration de $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4.4 Pour tout $t \geq 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ on note $S(t)f(x, v) = f(x - tv, v)$.

a. Montrer que pour tout $p \geq 1$, la fonction S définit un semi-groupe de contractions sur $L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ dont on déterminera le générateur infinitésimal.

b. Soient $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ de l'équation :

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + m(x, v)f(t, x, v) + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(w)f(t, x, v - w)dw = 0$$

posée dans $\mathcal{D}'((0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et vérifiant $f(0, x, v) = f_0(x, v)$.

c. S'il existe $b > a > 0$ tels que $m(x, v) \in [a, b]$ pour presque tout $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donner une condition sur les paramètres $\|\sigma\|_1$, a, b pour qu'existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \leq e^{-ct}\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}\,, \qquad t \geq 0\,.$$