

Différents laplaciens sur $[0, 1]$

Exercice 5.1 Propriétés de $H^1(I)$ et $H_0^1(I)$

Soit $I =]0, 1[$. On considère $H^1(I) = \{u \in L^2(I) : u' \in L^2(I)\}$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)}$. L'objet de l'exercice est de retrouver quelques propriétés de cet espace.

1. Soit $u \in H^1(I)$. Rappeler pourquoi il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour presque tout $x \in I$ on a

$$u(x) = a + \int_0^x u'(y) dy$$

et montrer pourquoi le membre de droite est continu en x . On identifiera désormais u avec son représentant continu. Etablir la relation suivante :

$$\forall u, v \in H^1(I) \quad \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u(x)v'(x)dx.$$

2. En remarquant que pour tout $u \in H^1(I)$ la fonction $x \mapsto u(0)$ est une fonction constante et donc $|u(0)| = \|u(0)\|_{L^2(I)}$, montrer qu'on a

$$|u(0)| \leq \|u\|_{L^2(I)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I).$$

En déduire que l'injection $i : H^1(I) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$ est continue.

3. On rappelle que, par définition, $H_0^1(I)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(I)$ dans $H^1(I)$. On note $K = \{u \in H^1(I) : u(0) = u(1) = 0\}$. Pour tout $u \in L^2(I)$, on note $\bar{u}$ son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}$ et on pose $u_a(x) = \bar{u}(1/2 + a(x - 1/2))$ pour tout $a > 1$.

- a. Montrer que $H_0^1(I) \subset K$.
- b. Vérifier que pour tout $u \in K$ on a $(u_a)' = a(u')_a \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $u \in K$ on a $u_{a|I} \in H_0^1(I)$, où $u_{a|I}$ est la restriction de u_a sur I .
- c. Montrer que si $a \rightarrow 1$, alors $u_a \rightarrow \bar{u}$ dans $H^1(\mathbb{R})$ pour tout $u \in K$. En déduire que $K \subset H_0^1(I)$.

4. En déduire l'inégalité de Poincaré

$$(1) \quad \forall u \in H_0^1(I) \quad \|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)}.$$

5. Pour tout $u \in L^2(I)$ on note u^* sa valeur moyenne sur I . En remarquant que $u(0) = u(0)^*$, exprimer $u(x) - u^*$ en fonction de u' , puis établir une autre inégalité de Poincaré :

$$\exists c > 0 \quad \forall u \in H^1(I) \quad \|u - u^*\|_{L^2(I)} \leq c \|u'\|_{L^2(I)}.$$

Exercice 5.2 Laplacien de Neumann sur I et Laplacien périodique sur le tore $\mathbb{T}^1$

Soit $I =]0, 1[$. On considère $L^2(I)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. Etant donné $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit un opérateur non borné A sur $L^2(I)$ en posant $Au = -(au')'$ pour tout élément $u \in D(A) = \{u \in H^2(I) : u'(0) = u'(1) = 0\}$.

a. Montrer que A est un opérateur accréatif sur $L^2(I)$.

b. Montrer que l'application

$$H^1(I) \times H^1(I) \ni (u, v) \mapsto b(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle au', v' \rangle_{L^2(I)}$$

définit une forme sesquilinéaire, continue et coercive sur $H^1(I)$. En déduire, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, que A est maximal accréatif.

c. On note $S(t)$ le semi-groupe de générateur A et on choisit $u_0 \in L^2(I)$. De quel problème d'évolution la fonction $u(t) = S(t)u_0$ est-elle solution ?

d. Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(I)$ on a

$$\forall t \geq 0 \quad \int_I S(t)u_0(x)dx = \int_I u_0(x)dx.$$

e. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(I)$

$$\forall t \geq 0 \quad \left\| S(t)u_0 - \int_I u_0(x)dx \right\|_{L^2(I)} \leq e^{-ct} \left\| u_0 - \int_I u_0(x)dx \right\|_{L^2(I)}.$$

On pourra commencer par montrer que l'espace $L_*^2 = \{u \in L^2(I) : u^* = 0\}$ muni de produit scalaire de $L^2(I)$ est un espace de Hilbert (on rappelle que u^* désigne la valeur moyenne de u sur I). Ensuite, en utilisant une inégalité de Poincaré, on pourra montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'opérateur $A - c$ est maximal accréatif sur L_*^2 .

f. On suppose que $a(0) = a(1)$. Reprendre les questions précédentes pour un domaine

$$D(A) = \{u \in H^2(I) : u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}.$$

On pourra commencer par montrer que l'espace $H_{per}^1 = \{u \in H^1(I) : u(0) = u(1)\}$ muni de produit scalaire de $H^1(I)$ est un espace de Hilbert. Ensuite on pourra étudier la forme $b(u, v)$, définie dans la question b, sur l'espace $H_{per}^1 \times H_{per}^1$.

Exercice 5.3 Laplacien avec conditions au bord mixtes

Soit $I =]0, 1[$. On considère l'espace $L^2(I)$ muni de son produit scalaire usuel. Etant donné $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit un opérateur A_α sur $L^2(I)$ en posant $A_\alpha u = -(au')'$ pour $u \in D(A_\alpha) = \{u \in H^2(I) : \alpha u(0) = u'(0), u(1) = 0\}$. On note $H_d^1 = H^1(I) \cap \{u(1) = 0\}$ et

$$I(\alpha) = \inf_{u \in S} F(\alpha, u), \quad F(\alpha, u) = \alpha a(0)|u(0)|^2 + \int_0^1 a(x)|u'(x)|^2 dx,$$

où $S = \{u \in H_d^1 : \|u'\|_{L^2(I)} = 1\}$.

1. Montrer que H_d^1 muni du produit scalaire de $H^1(I)$ est un espace de Hilbert. Démontrer l'inégalité de Poincaré (1) pour tout $u \in H_d^1$.
2. Montrer que si $I(\alpha) \geq 0$ (resp. > 0) alors A_α est accréatif (resp. maximal accréatif).
3. a. Montrer que I est croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur un voisinage de 0.
b. Trouver $k > 0$ tel que $|F(\alpha, u) - F(\alpha', u)| \leq k|\alpha - \alpha'|$ pour tout $u \in S$. En déduire que I est une fonction lipschitzienne.
4. On veut montrer que I admet un unique zéro que l'on notera α_0 dans la suite. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux zéros $\alpha < \alpha'$. Soit une suite d'éléments $u_n \in S$ telle que $F(\alpha', u_n) \rightarrow 0$. Montrer que $u_n(0) \rightarrow 0$ et trouver une contradiction.
5. Soit $\lambda > 0$. On note $J = \inf_{u \in S} (F(\alpha_0, u) + \lambda \|u\|_{L^2(I)}^2)$.
a. Vérifier que $J \geq 0$. Montrer que si $J > 0$ alors l'opérateur $A_{\alpha_0} + \lambda$ est maximal accréatif.
b. On suppose par l'absurde que $J = 0$. Parvenir à une contradiction en considérant une suite minimisante et en utilisant un argument de compacité dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.
6. On note $q_\alpha(u, v) = \alpha a(0)\bar{u}(0)v(0) + \int_0^1 a(x)\bar{u}'(x)v'(x)dx$.
a. Montrer qu'il existe une suite d'éléments $u_n \in S$ telle que $F(\alpha_0, u_n) \rightarrow 0$ et $u \in H_d^1$ non nul tels que $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ et $u'_n \rightharpoonup u'$ dans $L^2(I)$.
b. Vérifier que $F(\alpha_0, u) = \inf_{u \in H_d^1} F(\alpha_0, u)$. En déduire que $q_{\alpha_0}(u, v) = 0$, pour tout $v \in H_d^1$, puis que u vérifie dans $\mathcal{D}'(I)$ l'équation $(au')' = 0$ avec les conditions $u(1) = 0$ et $u'(0) = \alpha_0 u(0)$.
c. En conclure que $\alpha_0 = u'_*(0)$, où u_* est solution d'un problème à préciser.