

Exercice 6.1 Oscillateur harmonique 1d en mécanique quantique

Soit $\mathcal{H} = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), xu \in L^2(\mathbb{R})\}$ muni du produit scalaire

$$(u|v)_1 = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\overline{v'(x)} + (1+x^2)u(x)\overline{v(x)} dx .$$

1. a. Vérifier que \mathcal{H} est un espace de Hilbert.
 - b. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ dans un voisinage de 0. Pour tout $u \in \mathcal{H}$, vérifier que la suite de fonctions $u_n(x) = \chi(x/n)u(x)$ converge vers u dans \mathcal{H} lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 - c. Soit $L > 0$. Montrer que sur le sous-espace $\mathcal{H}_L = \{u \in \mathcal{H} : \text{supp } u \subset [-L, L]\}$, la norme de \mathcal{H} est équivalente à la norme de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.
 - d. En déduire la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans \mathcal{H} en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$.
2. Pour $u \in D(H) = \{u \in \mathcal{H} : -u'' + x^2u \in L^2(\mathbb{R})\}$ on définit l'opérateur (oscillateur harmonique) $Hu = -u'' + x^2u$. Montrer que

$$\forall (u, v) \in D(H) \times \mathcal{H} \quad \int_{\mathbb{R}} [Hu](x)v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u'(x)v'(x) + x^2u(x)v(x) dx .$$

3. Montrer que les opérateurs $H, iH, -iH$ sont maximaux accréatifs sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$.
4. Soit $E = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : -u'' + x^2u \in L^2(\mathbb{R})\}$. On va montrer que $D(H) = E$.
 - a. Soit $q \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles telle que $q'' = (1+x^2)q$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a alors $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puis montrer que la fonction $r = \sqrt{1+q^2} - 1$ est convexe et de carré intégrable sur \mathbb{R} . En déduire que q est identiquement nulle.
 - b. Soit $u \in E$. On note $f = -u'' + x^2u$ et $v = (H+I)^{-1}(f+u)$. Pourquoi v est-il bien défini ? En distinguant parties réelles et imaginaires de $u-v$, montrer que $u \in D(H)$.
5. En déduire que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ il existe un unique $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ tel que $u(0) = u_0$ et vérifiant dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ l'équation $i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = 0$.
6. On considère le sous-espace vectoriel \mathcal{E} de $L^2(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de la forme

$$f(x) = P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

où P est un polynôme quelconque. On introduit les opérateurs suivants agissant sur \mathcal{E} ,

$$D_- = \frac{d}{dx} + x = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad D_+ = -\frac{d}{dx} + x = 2x - D_- .$$

On appelle D_- opérateur d'annihilation et D_+ opérateur de création.

- a. Vérifier que les opérateurs D_-, D_+ sont des endomorphismes de \mathcal{E} et que

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad Hf = D_- D_+ f - f = D_+ D_- f + f .$$

b. Montrer que

$$\ker D_- = \mathbb{C}\varphi, \quad \varphi(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$HD_+^n \varphi = (2n+1)D_+^n \varphi.$$

- c. Expliquer pourquoi la famille $(D_+^n \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel \mathcal{E} .
d. Montrer que \mathcal{E} est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. (On pourra montrer que si $h \in \mathcal{E}^\perp$, alors la transformée de Fourier de $h(x)e^{-x^2/2}$ est nulle.)
e. Montrer que la famille $(D_+^n \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} |D_+^n \varphi(x)|^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

On pourra utiliser (après l'avoir justifié) le fait que

$$D_+^n \varphi = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-x^2} \right).$$

f. En déduire que la suite des fonctions d'Hermite $(\phi_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\phi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} 2^{-\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-x^2} \right)$$

est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, telle que

$$H\phi_n = (2n+1)\phi_n.$$

7. a. On rappelle que l'injection $H_0^1(]-L, L[) \rightarrow L^2(]-L, L[)$ est compacte pour tout $L > 0$. En déduire que l'injection $\mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est également compacte.
b. Peut-on prévoir le fait que $(H+I)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur auto-adjoint compact en utilisant le résultat de la question 6.f? Peut-on prévoir ce fait en utilisant le résultat de la question 7.a?
c. En utilisant le résultat de la question 6.f donner un développement en série de la solution de l'équation $i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = 0$ avec la donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 6.2 Equation de convection-diffusion avec amortissement et forçage

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a > 0$ un réel, $b \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C_b^1(\Omega)$ un champ de vecteurs vérifiant $\nabla \cdot b = 0$, et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ une fonction 1-périodique. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) + b \cdot \nabla_x u(t, x) + au(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

1. Soit A l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ en posant $Au = -\Delta u + b \cdot \nabla u + au$ pour tout $u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : -\Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

- a. Vérifier que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ la partie réelle de $\langle u, b \cdot \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}$ est nulle.
 - b. En déduire que A est un opérateur accréitif sur $L^2(\Omega)$.
 - c. Montrer que si a est assez grand, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ vérifiant $\|S(t)\| \leq \exp(-ct)$ pour un certain $c > 0$.
2. Dans ce qui suit, on supposera que a est assez grand, au sens de la question précédente. On cherche une donnée initiale pour laquelle la solution du problème (*) est 1-périodique.
- a. Donner l'expression de la solution $u(t)$ de la formulation faible du problème (*), en fonction de u_0 et f . On note $P : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ la fonction qui à u_0 associe $u(1)$.
 - b. Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ la suite des itérés $(P^n u_0)_{n \geq 0}$ est bornée.
 - c. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ fixé. Pour tout entier $N \geq 1$, on définit v_N par $v_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N P^n u_0$. Vérifier que $P(v_N) - v_N = N^{-1}(P^{N+1} u_0 - P u_0)$. En déduire que $P(v_N) - v_N \rightarrow 0$.
 - d. En utilisant un argument de convergence faible, en conclure que l'on peut trouver un élément $v \in L^2(\Omega)$ tel que $P(v) = v$.
 - e. Montrer que pour toute donnée $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solution du problème (*) converge vers la solution de donnée initiale v . En déduire l'unicité de la solution 1-périodique.

Exercice 6.3 Soit $H = \{(u, v) \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$. On note

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = \int_0^1 (1 + e^{-x^2}) u_1''(x) \overline{u_2''(x)} dx + \int_0^1 u_1'(x) \overline{u_2'(x)} dx + \int_0^1 v_1(x) \overline{v_2(x)} dx.$$

On introduit sur H un opérateur non borné A de domaine

$$D(A) = \{(u, v) \in H \cap H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) : u''(0) = u''(1) = v(0) = v(1) = 0\}.$$

Pour tout $(u, v) \in D(A)$ on pose $A(u, v) = (v, -((1 + e^{-x^2})u'')'' + u'')$.

- a. Vérifier que H muni de ce produit scalaire est bien un espace de Hilbert.
- b. Montrer que A est un opérateur maximal accréitif sur H .
- c. En déduire un résultat d'existence et d'unicité concernant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((1 + e^{-x^2}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Montrer que la quantité suivante est conservée au cours du temps :

$$E(t) = \int_0^1 |\partial_t u(t, x)|^2 + (1 + e^{-x^2}) |\partial_x^2 u(t, x)|^2 + |\partial_x u(t, x)|^2 dx.$$