Exercice 7.1 Soient E un espace de Banach et A le générateur d'un semi-groupe de contractions $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$. On définit une norme sur $D(A)$ en posant $\|u\|_{D(A)} = \|u\| + \|Au\|$.

a. Montrer que $D(A)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

b. On pose $A_1 u = Au$ pour tout $u \in D(A^2) = \{u \in D(A) \ : \ Au \in D(A)\}$. Montrer que l'opérateur A_1 ainsi défini engendre un semi-groupe de contractions sur $D(A)$.

c. On définit une norme sur $D(A^2)$ en posant $\|u\|_{D(A^2)} = \|u\|_{D(A)} + \|Au\|_{D(A)}$. Déduire du résultat de la question précédente que pour tout $u_0 \in D(A^2)$ la fonction $u(t) = S(t)u_0$ vérifie

$$u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, D(A^2))\,.$$

Exercice 7.2 Régularisation due à un générateur positif

Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert H vérifiant les propriétés :

i/ $A + I : D(A) \to H$ est surjectif,

ii/ $\forall (u, v) \in D(A) \times D(A) \qquad \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle\,,$

iii/ $\forall u \in D(A) \qquad \langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}_+\,.$

On note $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(H)$ le semi-groupe engendré par A. L'objet de la question est de montrer que pour tout $t > 0$ l'opérateur $S(t)$ est à valeurs dans $D(A)$.

a. On se donne $u_0 \in D(A)$ et on pose $u(t) = S(t)u_0$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que la fonction $\phi : t \mapsto \|u(t)\|^2$ est décroissante et que pour tout $t_1 > 0$ on a

$$\int_0^{t_1} \langle Au(t), u(t)\rangle dt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2\,.$$

b. Soit $v_0 \in D(A^2) = \{v \in D(A) \ : \ Av \in D(A)\}$. On pose $v(t) = S(t)v_0$ pour tout $t \geq 0$. En utilisant la décroissance de ϕ, définie dans la question a, montrer que $\psi : t \mapsto \langle Av(t), v(t)\rangle$ est décroissante et que pour tout $t_2 > 0$ on a

$$t_2\|Av(t_2)\|^2 \leq \frac{1}{2}\langle Av_0, v_0\rangle\,.$$

Montrer que ces propriétés sont encore vraies si l'on suppose seulement $v_0 \in D(A)$.

c. Soient $u_0 \in D(A)$ et $t > 0$. En utilisant ce qui précède avec $t_1 = t_2 = t/2$ et $v_0 = u(t_1)$, montrer que l'on a l'inégalité $\|Au(t)\|^2 \leq t^{-2}\|u_0\|^2$. En déduire que pour tout $t > 0$ l'opérateur $S(t)$ est à valeurs dans $D(A)$ (on pourra utiliser le fait que $\{(u, Au), u \in D(A)\}$ est fermé dans $H \times H$).

Exercice 7.3 On reprend les hypothèses de l'exercice **7.2**. Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $D(A^k) = \{u \in D(A^{k-1}) \ : \ A^{k-1}u \in D(A)\}\,.$ On munit $D(A)$ de la norme $\|u\|_{D(A)} = \|u\| + \|Au\|$. La norme sur $D(A^k)$ est définie par récurrence: $\|u\|_{D(A^k)} = \|u\|_{D(A^{k-1})} + \|Au\|_{D(A^{k-1})}$.

Soit $u(t) = S(t)u_0$ pour $u_0 \in H$. Montrer :

i/ $u(t) \in D(A^k)$ pour tous $t > 0$ et $k \geq 1$.

ii/ $A^k u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, H)$ avec $(A^k u)'(t) + A^{k+1}u(t) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

iii/ $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, D(A^k))$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 7.4 *(Application: régularité et décroissance des solutions de l'équation de la chaleur)*
Etant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on définit un opérateur A sur $L^2(\Omega)$ en posant $Au = -\Delta u$ pour tout $u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ -\Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

1. Pour tout $v \in L^2(\Omega)$, on note $P_0(v) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ le prolongement de v à tout $\mathbb{R}^d$ par 0. Montrer que si $v \in L^2(\Omega)$ est telle que $P_0(v) \in H^2(\mathbb{R}^d)$ alors $v \in H^2(\Omega)$.

2. On rappelle que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\mathbf{1}_K \leq \chi \leq \mathbf{1}_\Omega$.

   a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que si $v \in H^k(\mathbb{R}^d)$ et $\Delta v \in H^k(\mathbb{R}^d)$ alors $v \in H^{k+2}(\mathbb{R}^d)$.

   b. Soit $v \in L^2(\Omega)$ une fonction à support compact telle que $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Montrer que $\Delta(P_0(v)) = P_0(\Delta v)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. En déduire que $v \in H^2(\Omega)$.

   c. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $v \in H^k(\Omega)$ une fonction à support compact telle que $\Delta v \in H^k(\Omega)$. Vérifier que $v \in H^{k+2}(\Omega)$.

   d. Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, que pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, l'application linéaire $\Lambda : D(A^k) \to H^{k+1}(\Omega)$, qui à v associe χv, est bien définie et continue.

3. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. On note $u(t) = S(t)u_0$ pour tout $t \geq 0$. En utilisant ce qui précède et le résultat de l'exercice **7.3**, montrer que $\chi u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, H^k(\Omega))$ pour tous $k \geq 1$ et $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

4. Soit $a \in \Omega$. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a l'égalité

$$-\int_\Omega \frac{(x-a)\cdot\nabla_x |u|^2}{\sqrt{1+|x-a|^2}}dx = \int_\Omega \frac{d+(d-1)|x-a|^2}{(1+|x-a|^2)^{3/2}}|u(x)|^2 dx\,.$$

   Soient $R > 0$ et $u \in L^2(\Omega)$. Déduire du résultat de l'exercice **7.2** l'existence de $C > 0$ tel que

$$\|S(t)u\|_{L^2(\Omega \cap B(a,R))} \leq C t^{-1/4} \|u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$