Exercice 8b.1 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \partial_t u + \partial_x^4 u + a\partial_x^2 u + bu = 0\,, & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{array} \right. \tag{1}$$

a. Etant donnée une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ du problème (1), on note $c_n(t)$ les coefficients de Fourier de $u(t,\cdot)$. Déterminer la relation satisfaite par ces coefficients.

b. Montrer que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (1) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R})$.

c. Déterminer le sous-espace F_1 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données initiales u_0 pour lesquelles la solution u trouvée à la question précédente vérifie de plus $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$.

d. Déterminer le sous-espace F_2 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données initiales u_0 pour lesquelles la solution u vérifie $\|u(t,\cdot)\|_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R})} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

e. Déterminer le sous-espace F_3 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données u_0 pour lesquelles il existe $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ tel que $u(0) = u_0$ et vérifiant l'équation considérée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8b.2 Soient a, b, c, d des nombres complexes. On souhaite déterminer à quelles conditions le problème suivant admet une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 2π-périodique en espace :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u = a\,\partial_x^2 u + 2b\,\partial_t\partial_x u + c\,\partial_t u + d\,\partial_x u\,, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,, \\ u_{|t=0} = u_0\,, \qquad \partial_t u_{|t=0} = u_1\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{array} \right.$$

a. Ecrire l'équation satisfaite par les coefficients de Fourier $c_n(t)$ de la fonction $u(t,\cdot)$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ les racines de l'équation caractéristique s'écrivent $\lambda_n = n\mu_n$ avec $P_n(\mu_n) = 0$, où P_n est un trinôme que l'on déterminera.

c. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $P_n(z) = P(z) + R_n(z)$, où P est un polynôme indépendant de n et $R_n(z)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

d. On suppose ici que les racines de P sont distinctes. Montrer que la distance entre les racines de P_n et celles de P est en $O(n^{-1})$ lorsque $n \to +\infty$. Conclure dans ce cas.

e. On suppose maintenant que P a une racine double. Etudier le comportement des racines de P_n lorsque $n \to +\infty$. Conclure.

Exercice 8b.3 On considère la fonction $2\pi-$périodique f définie par

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} + \frac{e^{-ix}}{2 - e^{-ix}}\,.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f. On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $g : z \mapsto z/(2-z)$ en précisant son rayon de convergence.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $u_c \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $u_c(0,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vérifiant l'équation $\partial_t u_c - i\partial_x^2 u_c = f(x - ct)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des réels c tels que $N(t) = \|u_c(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)}$ n'est pas une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, et donner dans ce cas un équivalent de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

3. Soit $g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ de moyenne nulle sur $[0,2\pi]$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ on se propose d'étudier la structure de l'ensemble $\mathcal{V}$ des $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_t v - i\partial_x^2 v = g(x - ct)$.

   a. On suppose d'abord que $c \notin \mathcal{C}$. Montrer que tout élément de $\mathcal{V}$ se décompose de manière unique sous la forme $v(t,x) = h(x - ct) + w(t,x)$ où $h \in H^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ est de moyenne nulle sur $[0,2\pi]$ et vérifie une équation différentielle à préciser, et où $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ est solution de l'équation $\partial_t w - i\partial_x^2 w = 0$.

   b. Comment doit-on modifier le résultat de la question précédente si $c \in \mathcal{C}$?

Exercice 8b.4 On considère le problème suivant pour l'équation des cordes vibrantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0\,, & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,l)\,, \\ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,l) = 0\,, & t \in (0,+\infty)\,, \\ (u, \partial_t u)(0,x) = (u_0, u_1)(x)\,, & x \in (0,l)\,. \end{cases}$$

On supposera le réel $l > 0$ fixé. Pour tout entier $k \geq 0$, on notera X_k le sous-espace de $H^k_{2l}(\mathbb{R})$ formé des fonctions paires, à valeurs réelles et de valeur moyenne nulle.

1. Vérifier que tout $u \in X_2$ vérifie la condition au bord $u'(0) = u'(l) = 0$.

2. Soient $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(]-1,1[)$ qui vaut 1 au voisinage de 0, et $\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi((x + nl)/\varepsilon)$.

   a. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^*_+)$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X_2)$. Montrer, en intégrant par parties, que
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\psi(t)(\phi\chi_\varepsilon)''(x)\,dxdt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\psi(t)\phi''(x)\,dxdt\,.$$

   b. On suppose désormais que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X_2)$ vérifie l'équation $\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0$ au sens des distributions dans $\mathbb{R}^*_+ \times]0,l[$. Montrer que u vérifie encore cette équation dans $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \setminus l\mathbb{Z}$.

   c. En déduire que u vérifie l'équation $\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R})$.

3. Montrer que le problème (2) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X_2) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, X_1)$ pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in X_2 \times X_1$. Etablir en outre l'égalité $E(t) = E(0)$ avec
$$E(t) = \int_0^l (\partial_t u)^2(t,x) + (\partial_x u)^2(t,x)\,dx\,.$$
   Vérifier enfin que $t \mapsto u(t,0) \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$ et calculer $\|\partial_t u(\cdot,0)\|^2_{L^2(0,2l)}$ en fonction de $E(0)$.

4. Soit $T > 0$. On considère l'application Λ définie par :
$$\Lambda : \begin{array}{ccc} X_2 \times X_1 & \to & H^1(]0,T[) \\ (u_0,u_1) & \mapsto & u(\cdot,0) \end{array}$$
   Montrer que si $T = 2l$ alors Λ est injective. Est-ce encore le cas si $T < 2l$?