

LDD3 MATH-PHYSIQUE, ANNÉE 2024-2025
“INTRODUCTION AUX EDP”, MDD358
CORRIGÉ DU PARTIEL

STéphANE NONNENMACHER

Deux rappels pouvant être utiles :

1. Formule de Leibniz pour la dérivée k -ième du produit de deux fonctions lisses $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} f^{(\ell)}(x) g^{(k-\ell)}(x),$$

où $\binom{k}{\ell}$ est le coefficient binomial.

2. Formule de Taylor basée en $x = 0$ avec reste intégral à l'ordre N , pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^N R_N(x), \quad \text{avec } R_N(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(tx) dt.$$

Exercice 1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- (1) Rappeler la définition du support de la fonction f , et du support de la distribution T .
 $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$, ou de façon équivalente $\mathbb{L}\text{supp}(f) = \bigcup \{U \text{ ouvert t.q. } f|_U = 0\}$.
 $\mathbb{L}\text{supp}(T) = \bigcup \{U \text{ ouvert t.q. } T|_U = 0\}$. Le fait que $T|_U = 0$ indique que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset U$, on a $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
- (2) Montrer que $\text{supp}(fT) \subset \text{supp}(T) \cap \text{supp}(f)$.
 La proposition est équivalente au fait que $\mathbb{L}\text{supp}(T) \cup \mathbb{L}\text{supp}(f) \subset \mathbb{L}\text{supp}(fT)$. Supposons que le support d'une fonction test φ est inclus dans l'ouvert $\mathbb{L}\text{supp}(f)$. Alors en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, on aura $f(x) = 0$. Donc $f\varphi$ est la fonction nulle. Par conséquent, $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle = \langle T, 0 \rangle = 0$. Cela montre que la distribution fT s'annule sur toute fonction test supportée dans l'ouvert $\mathbb{L}\text{supp}(f)$, autrement dit que cet ouvert est inclus dans $\mathbb{L}\text{supp}(fT)$: $\mathbb{L}\text{supp}(T) \subset \mathbb{L}\text{supp}(fT)$. Supposons maintenant que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{L}\text{supp}(T)$. Pour toute fonction f on a $\text{supp}(f\varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$, donc on aura aussi $\text{supp}(f\varphi) \subset \mathbb{L}\text{supp}(T)$, ce qui implique $\langle T, f\varphi \rangle = 0$ par la définition de $\text{supp}(T)$. On a donc montré que l'ouvert $\mathbb{L}\text{supp}(T) \subset \mathbb{L}\text{supp}(fT)$. Finalement, on a bien montré que $\mathbb{L}\text{supp}(T) \cup \mathbb{L}\text{supp}(f)$ est inclus dans $\mathbb{L}\text{supp}(fT)$.
- (3) Exhiber une distribution T et une fonction f telles que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \text{supp}(T)$, mais néanmoins $fT \neq 0$. Pourquoi n'a-t-on pas de contradiction avec la question précédente ?
 La question suivante nous propose de regarder des distributions $\delta_0^{(q)}$, supportées en $\{0\}$, multipliées par des monômes x^p qui s'annulent effectivement en $x = 0$ dès que $p \geq 1$. On a $x^p \delta_0 = 0$ pour tout $p \geq 1$, mais par contre $x \delta_0' = -\delta_0$ n'est pas nulle. On n'a pas de contradiction avec la question 2 car la fonction $f(x) = x$ est de support $\text{supp}(f) = \mathbb{R}$.
- (4) Pour des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ quelconques, calculer la distribution $x^p \delta_0^{(q)}$, produit de la distribution $\delta_0^{(q)}$ par le monôme x^p . On distinguera les cas $q < p$ et $q \geq p$.
Conseil : vous pourrez traiter les premiers cas ($q, p = 0, 1, 2$) pour vous faire une idée, avant d'attaquer le cas général.
 On veut calculer, pour toute fonction test φ ,

$$\langle x^p \delta_0^{(q)}, \varphi \rangle = \langle \delta_0^{(q)}, x^p \varphi \rangle = (-1)^q \langle \delta_0, \frac{d^q}{dx^q} (x^p \varphi) \rangle = (-1)^q \frac{d^q}{dx^q} (x^p \varphi) (0).$$

Il s'agit donc de calculer la q -ième dérivée de la fonction $x \mapsto x^p \varphi(x)$, et de l'évaluer au point $x = 0$. On peut se servir de la formule de Leibniz pour calculer la dérivée en tout point x :

$$\frac{d^q}{dx^q}(x^p \varphi)(x) = \sum_{\ell=0}^q \binom{q}{\ell} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^p) \frac{d^{q-\ell}}{dx^{q-\ell}}(\varphi)(x).$$

Les dérivées du monôme x^p sont connues : si $\ell \leq p$ on a $\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^p) = p(p-1) \cdots (p-\ell+1)x^{p-\ell}$, tandis que pour $\ell > p$ on obtient la fonction nulle. Lorsqu'on évalue le résultat en $x = 0$, le seul cas non nul est lorsque $\ell = p$, pour lequel $\frac{d^p}{dx^p}(x^p) = p!$ est constante. Ceci montre que, lorsqu'on évalue la fonction $\frac{d^q}{dx^q}(x^p \varphi)$ en $x = 0$, le seul terme non nul de la somme ne peut être que pour $\ell = p$. Pour que ce terme existe, il faut que $q \geq p$, et ce terme vaut alors $\binom{q}{p} p! \varphi^{(q-p)}(0)$, de sorte que

$$\langle x^p \delta_0^{(q)}, \varphi \rangle = (-1)^q \binom{q}{p} p! \varphi^{(q-p)}(0) = (-1)^q \frac{q!}{(q-p)!} (-1)^{q-p} \langle \delta_0^{(q-p)}, \varphi \rangle.$$

Au final, cette égalité montre que lorsque $q \geq p$, la distribution $x^p \delta_0^{(q)} = (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \delta_0^{(q-p)}$. Par contre, lorsque $q < p$, la distribution $x^p \delta_0^{(q)} = 0$.

Exercice 2. Dans cet exercice λ sera un paramètre réel.

- (1) On suppose que $\lambda > -1$. Expliquer pourquoi la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\varphi \mapsto \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx,$$

définit une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On notera cette distribution x_+^λ .

La fonction $x^\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc elle est intégrable sur tout intervalle borné fermé ne contenant pas 0. Comme $\lambda > -1$ elle est aussi intégrable sur $] -1, 1[$. Donc cette fonction est localement intégrable sur $\mathbb{R}$: $x^\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Cette fonction définit donc une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- (2) Quel est l'ordre de cette distribution ? Quel est son support ?

Comme toute distribution définie par une fonction $L_{loc}^1(\mathbb{R})$, la distribution x_+^λ est d'ordre zéro. Plus précisément, pour tout intervalle $[-a, a]$, on aura pour toute fonction test φ supportée sur $[-a, a]$:

$$\left| \langle x_+^\lambda, \varphi \rangle \right| \leq \int_0^\infty x^\lambda |\varphi(x)| dx = \int_0^a x^\lambda |\varphi(x)| dx \leq \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \int_0^a x^\lambda dx = \frac{a^{\lambda+1}}{\lambda+1} \|\varphi\|_{C^0}.$$

- (3) La fonction x_+^λ est non nulle et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ mais s'annule partout sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour toute fonction test φ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}_-^*$ on a donc $\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = 0$; d'après la définition de support, ceci montre que $\mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{C} \text{supp}(x_+^\lambda)$. Fixons maintenant un $x_0 \geq 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, on construit une fonction test φ supportée sur $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$, telle que $\varphi(x_0) \geq 1$ et positive sur son support. La positivité et continuité de φ implique alors que $\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle > 0$. Donc la distribution x_+^λ ne s'annule pas sur ce petit voisinage de x_0 . En conséquence, x_0 est dans le support de x_+^λ . On a donc $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp}(x_+^\lambda)$. On conclut que $\text{supp}(x_+^\lambda) = \mathbb{R}_+$.

- (4) Cette expression définit-elle encore une distribution si $\lambda < -1$?

Si $\lambda < -1$, la fonction $x^\lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ n'est plus intégrable près de l'origine, de sorte que l'intégrale $\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$ n'est pas définie si φ ne s'annule pas dans un voisinage de 0. L'expression n'a donc pas de sens pour les fonctions test non nulle près de zéro, et ne peut définir de distribution sur $\mathbb{R}$.

- (5) Toujours pour $\lambda > -1$, montrer que la distribution x_+^λ peut se décomposer en la somme des 3 termes :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1},$$

chaque terme définissant une distribution.

On découpe l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ en deux parties (sur $[0, 1]$ et sur $[1, \infty[$), et on insère un terme $-x^\lambda \varphi(0)$ dans la première intégrale (qu'on compense et calcule ensuite) :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx &= \int_0^1 x^\lambda \varphi(x) dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_0^1 x^\lambda \varphi(0) dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \varphi(0) \left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right]_0^1 + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Notons qu'on ne pouvait pas insérer le terme $-x^\lambda \varphi(0)$ dans l'intégrale complète, ce terme n'étant pas intégrable lorsque $x \rightarrow \infty$.

- (6) Montrer que chacun des trois termes ci-dessus définit encore une distribution lorsqu'on prend $-2 < \lambda < -1$. On notera encore x_+^λ la distribution formée par la somme de ces 3 distributions. Quel est l'ordre de la distribution x_+^λ ?

La présence du facteur $(\varphi(x) - \varphi(0))$, et le fait que le “danger” dans la première intégrale provient du comportement lorsque $x \searrow 0$, devait inciter à utiliser le DL de φ en 0. En effet, ce DL montre que $\varphi(x) - \varphi(0) = \mathcal{O}(x)$, de sorte que l'intégrand est d'ordre $\mathcal{O}(x^{\lambda+1})$, qui est maintenant intégrable lorsque $x \searrow 0$. Plus précisément, en se servant de la formule de Taylor avec reste intégral, $\varphi(x) - \varphi(0) = xR_1(x)$, avec $R_1(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$ qui est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$. En insérant cette expression dans la première intégrale, on obtient l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\lambda+1} R_1(x) dx,$$

qui converge lorsque $-2 < \lambda < -1$. Cette expression dépend linéairement de φ' , donc de φ , et elle est bornée par

$$\|R_1\|_{C^0} \int_0^1 x^{\lambda+1} dx = \frac{\|R_1\|_{C^0}}{\lambda+2} \leq \frac{\|\varphi'\|_{C^0}}{\lambda+2}.$$

C'est donc une distribution d'ordre ≤ 1 . Le second terme $\frac{\varphi(0)}{\lambda+1}$ est correspond à la distribution $\frac{\delta_0}{\lambda+1}$, qui est d'ordre zéro. Enfin, $x^\lambda \in L_{loc}^1([1, \infty[)$, donc le dernier terme $\int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$ correspond à une distribution d'ordre zéro. Au total, la somme de ces 3 distributions donne une distribution d'ordre ≤ 1 .

Bonus : Pour montrer que cette distribution n'est pas d'ordre 0 mais exactement d'ordre 1, il faut montrer qu'aucune borne $C\|\varphi\|_{C^0}$ n'est valable pour toutes les fonctions test φ supportées dans un intervalle contenant l'origine (par exemple l'intervalle $[-1, 1]$). On peut, par exemple, construire des fonctions φ_n nulles sur $] -\infty, 0]$, et qui “montent” pour atteindre la valeur 1 sur $[1/n, 1 - 1/n]$ puis redescendre à zéro sur $[1, \infty[$. Pour de telles fonctions φ_n qui sont toujours positives ou nulles et telles que $\varphi(0) = 0$, l'intégrale

$$\int_0^1 x^\lambda (\varphi_n(x) - \varphi_n(0)) dx \geq \int_{1/n}^{1-1/n} x^\lambda dx = \frac{n^{-(\lambda+1)}}{|\lambda+1|} + O(1).$$

D'autre part, les deux autres termes s'annulent pour ces fonctions φ_n . On a donc, pour un certain $c \in \mathbb{R}$,

$$\langle x_+^\lambda, \varphi_n \rangle \geq \frac{n^{-(\lambda+1)}}{|\lambda+1|} + c,$$

une borne inférieure qui diverge lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme les bornes $\sup \|\varphi_n\|_{C^0} = 1$ pour tout $n \geq 1$, ceci montre que la distribution x_+^λ ne peut pas être contrôlée par $C\|\varphi_n\|_{C^0}$. Donc elle est d'ordre 1.

- (7) Dans le cas $-2 < \lambda < -1$, calculer la distribution $x.x_+^\lambda$ (c'est-à-dire le produit de la fonction lisse $x \mapsto x$ et de la distribution x_+^λ).

Par définition, la distribution $x.x_+^\lambda$ est définie, pour toute fonction test φ , par $\langle x.x_+^\lambda, \varphi \rangle =$

$\langle x_+^\lambda, x\varphi \rangle$. Comme $-2 < \lambda < -1$, il faut utiliser l'expression de x_+^λ donnée dans la question précédente :

$$\begin{aligned}\langle x_+^\lambda, x\varphi \rangle &= \int_0^1 x^\lambda (x\varphi(x) - 0\varphi(0)) dx + \frac{0\varphi(0)}{\lambda+1} + \int_1^\infty x^\lambda x\varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\lambda+1} \varphi(x) dx + \int_1^\infty x^{\lambda+1} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^{\lambda+1} \varphi(x) dx = \langle x_+^{\lambda+1}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Finalement on retrouve bien l'expression "intuitive" $x.x_+^\lambda = x_+^{\lambda+1}$, au sens des distributions.

- (8) Dans le cas $-1 < \lambda < 0$, montrer que $\frac{d}{dx}x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1}$, où la dérivée est comprise au sens des distributions.

Indication : il faudra à un moment procéder au découpage de l'intégrale comme dans la question 5.

Pour toute fonction test φ , on a, par définition de la dérivée :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx}x_+^\lambda, \varphi \right\rangle &= -\langle x_+^\lambda, \varphi' \rangle \\ &= -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx.\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale en fonction de φ , on souhaiterait intégrer par parties. Seulement, une intégration par parties est délicate, puisque la fonction x^λ diverge en $x = 0$. Comme la fonction $x^\lambda \varphi'$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$, on peut utiliser le fait que

$$-\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} -\int_\epsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx.$$

Pour $\epsilon > 0$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}-\int_\epsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx &= -\left[x^\lambda \varphi\right]_\epsilon^\infty + \lambda \int_\epsilon^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x) dx \\ &= \epsilon^\lambda \varphi(\epsilon) + \lambda \int_\epsilon^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Mais comme $\lambda \in]-1, 0[$, on se retrouve avec deux termes singuliers lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En effet, le DL d'ordre 1 de φ en $x = 0$ montre que le premier terme se comporte comme $\epsilon^\lambda \varphi(0) + o(1)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et la seconde intégrale diverge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ si $\varphi(0) \neq 0$. Comme on veut retrouver l'expression de $x_+^{\lambda-1}$, qui est donnée par la somme de 3 termes (v. la question 6), on va découper la seconde intégrale et lui soustraire un multiple de $x^{\lambda-1} \varphi(0)$ pour retrouver une expression similaire à celle de la question 6 :

$$\begin{aligned}-\int_\epsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx &= \epsilon^\lambda \varphi(\epsilon) + \lambda \int_\epsilon^1 x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \\ &\quad + \lambda \varphi(0) \int_\epsilon^1 x^{\lambda-1} dx + \lambda \int_1^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Comme $\lambda - 1 \in]-2, -1[$, la première intégrale converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. La seconde intégrale donne $\lambda \varphi(0) \left[\frac{x^\lambda}{\lambda}\right]_\epsilon^1 = (1 - \epsilon^\lambda) \varphi(0)$. La troisième intégrale est indépendante de ϵ , et est bien définie (la fonction $x^{\lambda-1}$ est dans $L^1([1, \infty[))$). En sommant tous les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\epsilon^\lambda \varphi(0) + o(1)\right) &+ \lambda \int_\epsilon^1 x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \left(1 - \epsilon^\lambda\right) \varphi(0) + \lambda \int_1^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x) dx \\ &= \lambda \int_\epsilon^1 x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \varphi(0) + \lambda \int_1^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x) dx + o(1)_{\epsilon \rightarrow 0}.\end{aligned}$$

Comme les deux termes singuliers $\epsilon^\lambda \varphi(0)$ se sont compensés et ont disparu, on peut maintenant faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$ dans le premier terme. En comparant avec l'expression de la question 6, on reconnaît finalement l'expression de $\lambda \langle x_+^{\lambda-1}, \varphi \rangle$.

- (9) Soit $N \geq 2$. et prenons un paramètre $-N-1 < \lambda < -N$. Proposer la définition d'une distribution x_+^λ qui généraliserait les situations ci-dessus.

Indication : on pourra se servir de la formule de Taylor à l'ordre N .

Cas $N = 1$: on est parti d'une expression de x_+^λ pour $\lambda > -1$ qui scinde l'intégrale en

$$\int_0^1 x^\lambda \varphi(x) dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx.$$

La première intégrale présente une singularité quand $x \rightarrow 0$, la seconde ne présente pas de singularité. La première contribution a été transformée pour faire apparaître la fonction $\varphi(x) - \varphi(0) = x\psi(x)$. Le facteur x permet d'étendre cette première intégrale au cas où $\lambda \in]-2, -1[$, et les deux autres termes ont aussi un sens dans ce cas.

Si on veut que la première intégrale ait un sens lorsque $\lambda \in]-N-1, -N[$, il faut que la fonction qui multiplie x^λ se comporte comme $O(x^N)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Il est donc naturel d'utiliser le DL à l'ordre N de φ en $x = 0$, qui contient un reste $x^N R_N(x) = O(x^N)$. On part donc du cas $\lambda > -1$, et on écrit la première intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\lambda \varphi(x) dx &= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right) dx + \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^{(n)}(0) \int_0^1 \frac{x^{\lambda+n}}{n!} dx \\ &= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right) dx + \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^{(n)}(0) \left[\frac{x^{\lambda+n+1}}{n!(\lambda+n+1)} \right]_0^1 \\ &= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right) dx + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!(\lambda+n+1)}. \end{aligned}$$

Cette expression garde un sens si $\lambda \in]-N-1, N[$, et permet de définir une distribution, qui est d'ordre N . La seconde intégrale $\int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx$ continue également à être une distribution d'ordre zéro. Au final on obtient une distribution d'ordre N .

Remarque : l'expression ci-dessus s'applique aussi aux cas où $\lambda \in]-j-1, j[$ pour $j = 0, \dots, N-1$, et donne le même résultat que si on ne retranche que $\sum_{n=0}^{j-1} \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0)$ dans la première intégrale.

Exercice 3. On utilisera un paramètre réel $\alpha \geq 0$. Pour tout $N \geq 1$, on définit les distributions $T_N^{\alpha,+} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \delta_{1/n}$ et $T_N^{\alpha,-} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \delta_{-1/n}$.

- (1) Montrer que si $\alpha > 1$, la suite de distributions $(T_N^{\alpha,+})_{N \geq 1}$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution, notée $T^{\alpha,+}$. Quel est l'ordre de $T^{\alpha,+}$?

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, les termes de la somme

$$\langle T_N^{\alpha,+}, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \varphi(1/n)$$

sont bornés par $|\frac{1}{n^\alpha} \varphi(1/n)| \leq \frac{1}{n^\alpha} \|\varphi\|_{C^0}$. Si $\alpha > 1$, la série de terme $\frac{1}{n^\alpha}$ converge, ce qui montre que la série de terme $\frac{1}{n^\alpha} \varphi(1/n)$ converge absolument, et sa somme est bornée par $S(\alpha) \|\varphi\|_0$, avec $S(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. On a donc montré que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite des crochets $\langle T_N^{\alpha,+}, \varphi \rangle$ converge vers la série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \varphi(1/n),$$

qui converge et est bornée par $S(\alpha) \|\varphi\|_{C^0}$. Cette expression dépend linéairement de φ , elle définit donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La borne $C_\alpha \|\varphi\|_{C^0}$ montre qu'il s'agit d'une distribution d'ordre zéro, qu'on note $T^{\alpha,+}$. On a donc montré, dans ce cas $\alpha > 1$, que $T_N^{\alpha,+} \rightarrow T^{\alpha,+}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

- (2) La suite de distributions $\left(T_N^{\alpha,+}\right)_{N \geq 1}$ converge-t-elle si $\alpha \leq 1$?

Lorsque $\alpha \leq 1$, la série de terme $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge. En effet, on peut utiliser la borne inférieure :

$$s_N(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{N+1} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1, \\ [\ln(x)]_1^{N+1} \sim \ln(N), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si on prend une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) \geq 1$ pour $x \in [0, 1]$, on aura alors

$$\forall N \geq 1, \langle T_N^{\alpha,+}, \varphi \rangle \geq s_N(\alpha) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty,$$

donc la suite $(\langle T_N^{\alpha,+}, \varphi \rangle)_{N \geq 1}$ ne converge pas. Cela exclut la possibilité que la suite de distributions $\left(T_N^{\alpha,+}\right)_{N \geq 1}$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$.

- (3) On suppose $\alpha \in]0, 1]$. Montrer que la suite de distributions $\left(T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}\right)_{N \geq 1}$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$ vers une distribution, notée T^α .

Indication : on pourra se servir de la formule de Taylor de $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $x = 0$.

On sait d'après la question précédente que si $\alpha \in]0, 1]$ et pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \geq 1$ sur $[-1, 1]$, chaque somme individuelle vérifie

$$\langle T_N^{\alpha,+}, \varphi \rangle \geq s_N(\alpha), \quad \langle T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle \geq S_N(\alpha),$$

donc chacune des deux sommes diverge lorsque $N \rightarrow \infty$. Mais on s'intéresse à la différence entre ces deux sommes. Pour cela, on regroupe les termes de même ordre n : pour tout N ,

$$\begin{aligned} \langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \varphi(1/n) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \varphi(-1/n) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} (\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)). \end{aligned}$$

Le DL à l'ordre 1 de φ montre que $\varphi(x) = \varphi(0) + xR_1(x)$, avec $R_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ donné par $R_1(x) = \int_1^1 \varphi'(tx) dt$, donc dépendant linéairement de φ . En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \left(\varphi(0) + \frac{1}{n} R_1(1/n) - \left(\varphi(0) - \frac{1}{n} R_1(-1/n) \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha+1}} (R_1(1/n) + R_1(-1/n)). \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge, donc la série $\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle$ est absolument convergente, et converge vers

$$\langle T^\alpha, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1}} (R_1(1/n) + R_1(-1/n)).$$

Cette expression dépend linéairement de φ (car R_1 dépend linéairement de φ).

- (4) Quel est l'ordre de T^α ? Quel est son support ?

Comme la fonction $R_1(x)$ est bornée uniformément par $\|\varphi'\|_{C^0}$, cette forme linéaire T^α satisfait la borne $|\langle T^\alpha, \varphi \rangle| \leq 2s_\infty(\alpha+1)\|\varphi'\|_{C^0}$, donc T^α est une distribution d'ordre ≤ 1 .

Bonus : Pour montrer que cette distribution n'est pas d'ordre zéro, on peut procéder de façon un peu similaire à la question 6 de l'exercice 2. On considère des fonctions test φ_n à valeurs dans $[0, 1]$, égales à 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$, nulles sur $] -\infty, \frac{1}{n+1}] \cup [2, \infty[$, en particulier elles sont toutes supportées sur l'intervalle $[0, 2]$. Pour une telle fonction, on aura $\langle T_N^{\alpha,-}, \varphi_n \rangle = 0$ pour tout N , donc

$$\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi_n \rangle = \langle T_N^{\alpha,+}, \varphi_n \rangle = \sum_{k=1}^{\min(n,N)} \frac{1}{k^\alpha} = s_{\min(n,N)}(\alpha).$$

Donc pour toute fonction φ_n , on aura $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle T_N^{\alpha,+}, \varphi_n \rangle = s_n(\alpha)$. En remarquant que $\|\varphi_n\|_{C^0} = 1$ pour tout n , et que $s_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, on voit que $\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi_n \rangle$ ne peut pas être borné par une expression de la forme $C\|\varphi_n\|_{C^0}$. Donc la distribution $T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}$ n'est pas d'ordre zéro, elle est donc forcément d'ordre 1.

- (5) A-t-on une telle convergence de la suite $(T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-})_{N \geq 1}$ si $\alpha \leq 0$?

A partir de la formule trouvée dans la question précédente,

$$\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha+1}} (R_1(1/n) + R_1(-1/n)),$$

et du fait que R_1 est C^∞ , on voit que $R_1(1/n) = R_1(0) + \mathcal{O}(1/n)$, et de même pour $R_1(-1/n)$. L'expression ci-dessus nous donne donc :

$$\begin{aligned} \langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha+1}} (2R_1(0) + \mathcal{O}(1/n)) \\ &= 2R_1(0)s_N(\alpha+1) + \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \\ &= 2R_1(0)s_N(\alpha+1) + \mathcal{O}(s_N(\alpha+2)). \end{aligned}$$

D'après la question 2, si $\alpha \leq 0$ la somme $s_N(\alpha+1)$ diverge lorsque $N \rightarrow \infty$. Donc si φ est telle que $R_1(0) \neq 0$, le premier terme du membre de droite diverge. La formule explicite pour $R_1(x)$ (v. ci-dessus) montre que $R_1(0) = \varphi'(0)$. Donc si φ est telle que $\varphi'(0) \neq 0$, le premier terme diverge lorsque $N \rightarrow \infty$. La seconde série convergera si $\alpha \in]-1, 0]$. Dans le cas $\alpha \leq -1$, la seconde série peut aussi diverger (au plus en $CN^{-\alpha-1}$), mais cette divergence est moins rapide que celle du premier terme (qui diverge en $\frac{N^{-\alpha}}{-\alpha}$), de sorte que la suite $(\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle)_{N \geq 1}$ divergera en $\sim C\varphi'(0)N^{-\alpha}$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Dans tous les cas où $\alpha \leq 0$, la suite de distributions $(T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-})_{N \geq 1}$ ne converge donc pas.

- (6) Dans le cas $\alpha = 0$, montrer qu'on peut introduire une suite de distributions $(S_N)_{N \geq 1}$, toutes supportées en $\{x = 0\}$, telles que $(T_N^{0,+} - T_N^{0,-} + S_N)_{N \geq 1}$ converge lorsque $N \rightarrow \infty$.

Dans la question précédente, on a montré que

$$\langle T_N^{\alpha,+} - T_N^{\alpha,-}, \varphi \rangle = 2R_1(0)s_N(\alpha+1) + \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right),$$

ce qui donne, dans le cas $\alpha = 0$,

$$\langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-}, \varphi \rangle = 2\varphi'(0)s_N(1) + \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La dernière somme converge, donc la seule singularité lorsque $N \rightarrow \infty$ vient du premier terme. Donc si on retranche le premier terme du membre de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-}, \varphi \rangle - 2\varphi'(0)s_N(1) &= \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \iff \langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-}, \varphi \rangle + 2s_N(1)\langle \delta'_0, \varphi \rangle &= \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Le membre de gauche est une forme linéaire sur φ . Le membre de droite converge lorsque $N \rightarrow \infty$, donc si on note les distributions $S_N = 2s_N(1)\delta'_0$, la suite de distributions $(\langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-} + S_N, \varphi \rangle)_{N \geq 1}$ a une limite lorsque $N \rightarrow \infty$, qui est automatiquement une distribution.

- (7) Quel est l'ordre de la distribution limite ?

Pour déterminer l'ordre de la distribution limite, il faut revenir plus précisément sur l'expression

de

$$\langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-} + S_N, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (R_1(1/n) + R_1(-1/n) - 2R_1(0)),$$

ce qui suggère d'effectuer le DL de $R_1(x)$. De façon équivalente, on peut utiliser le DL à l'ordre 2 de φ :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2 R_2(x), \quad \text{avec } R_2(x) = \int_0^1 (1-t)\varphi^{(2)}(tx) dt,$$

qui montre que $R_1(x) = \varphi'(0) + xR_2(x)$. On a donc $R_1(1/n) + R_1(-1/n) - 2R_1(0) = \frac{1}{n} (R_2(1/n) - R_2(-1/n))$, de sorte que

$$\left| \langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-} + S_N, \varphi \rangle \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2} \|R_2\|_{C^0} \leq 2s_\infty(2) \|\varphi''\|_{C^0}.$$

La distribution limite est donc d'ordre ≤ 2 .

Bonus : pour montrer qu'elle n'est pas d'ordre 1, on considère la suite de fonctions $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportées sur $[0, 2]$, telles que $\psi_n''(x) \geq 0$ sur $[0, 1/n]$ et $\psi_n(x) = x$ on $[1/n, 1]$. On peut aussi demander que $\|\psi_n'\|_{C^0} \leq 2$. On a alors, pour tout $N \geq n$:

$$\begin{aligned} \langle T_N^{0,+} - T_N^{0,-} + S_N, \psi_n \rangle &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^N \psi_n(1/n) \\ &\geq s_n(1). \end{aligned}$$

Comme $s_n(1) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, cette borne inférieure est incompatible avec une borne supérieure de la forme $C\|\psi_n\|_{C^1}$. Donc la distribution limite ne peut pas être d'ordre 1.