

Examen partiel, 22 mai 2024

L'examen dure 3 heures, les documents ne sont pas autorisés. Nous vous demandons de justifier les calculs que vous faites, en faisant référence aux théorèmes du cours.

**Exercice 1.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  une mesure finie. Soit  $f$  une fonction dans  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ .

- (1) Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $K(\epsilon) > 0$  tel que  $\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f| \geq K(\epsilon)\}} d\mu \leq \epsilon$ .  
*Notation :* l'ensemble  $\{|f| \geq K(\epsilon)\} = \{x \in E : |f(x)| \geq K(\epsilon)\}$ .
- (2) Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions dans  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ . On suppose que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $K(\epsilon) > 0$  tel que,

$$(0.1) \quad \forall n \geq 1, \quad \int_E |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq K(\epsilon)\}} d\mu \leq \epsilon.$$

On choisit  $K > 0$  arbitraire. Pour tout entier  $p \geq 1$ , on définit la fonction  $F_p(x) = \max_{1 \leq n \leq p} |f_n(x)|$ . Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_E F_p \mathbb{1}_{\{F_p \leq K\}} d\mu = 0.$$

- (3) Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout entier  $p \geq 1$ ,

$$\frac{1}{p} \int_E F_p \mathbb{1}_{\{F_p > K(\epsilon)\}} d\mu \leq \epsilon.$$

- (4) En déduire que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_E F_p d\mu = 0$ .
- (5) Montrer que le facteur  $\frac{1}{p}$  dans le résultat du 4 ne peut pas, en général, être remplacé par  $\frac{1}{p^\alpha}$  pour une puissance  $\alpha < 1$ . Pour cela, on pourra construire un contre-exemple de la forme  $f_n = a_n \mathbb{1}_{A_n}$ , où les ensembles  $A_n \subset E$  et les coefficients  $a_n > 0$  seront bien choisis.

**Exercice 2.** Sur  $[0, 1]^2$  on définit la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

- (1) Montrer que cette fonction est borélienne sur  $[0, 1]^2$ .
- (2) Calculer explicitement les deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 dy \left( \int_0^1 dx f(x, y) \right), \quad I_2 = \int_0^1 dx \left( \int_0^1 dy f(x, y) \right),$$

puis en conclure que  $f$  n'est pas Lebesgue-intégrable sur  $[0, 1]^2$ .

- (3) Re-montrer la non-intégrabilité de  $f$  en vous servant des coordonnées polaires sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3.** On cherche à construire la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  en se servant de la famille des intervalles dyadiques *semi-ouverts* :

$$\mathcal{D} := \left\{ [n2^k, (n+1)2^k[, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Pour un  $k \in \mathbb{Z}$  donné, les intervalles  $\{[n2^k, (n+1)2^k[, n \in \mathbb{Z}\}$  sont dits “d’ordre  $k$ ”. Chaque intervalle d’ordre  $k$  est de longueur  $|I| = 2^k$ .

- (1) Montrer que la tribu  $\sigma(\mathcal{D})$  engendrée par  $\mathcal{D}$ , est égale à la tribu de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
- (2) Pour deux intervalles  $I, I' \in \mathcal{D}$ , que peut valoir  $I \cap I'$ ? En déduire que la famille  $\mathcal{D}$  est stable par intersections finies.

On définit la fonction suivante sur l’ensemble des parties de  $\mathbb{R}$  :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_j |I_j|, \quad A \subset \bigcup_j I_j, \quad I_j \in \mathcal{D} \right\},$$

où les  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont des suites d’intervalles de  $\mathcal{D}$ .

- (3) Montrer que  $\mu^*$  définit une mesure extérieure.  
Dans les questions qui suivent, on cherche à montrer que pour tout intervalle  $I \in \mathcal{D}$ , on a  $\mu^*(I) = |I|$ .
- (4) Montrer que pour tout  $I \in \mathcal{D}$ ,  $\mu^*(I) \leq |I|$ .
- (5) Supposons que pour une famille finie  $(I_j)_{j=1, \dots, J}$  d’intervalles dyadiques,  $I \subset \bigcup_{j=1}^J I_j$ .  
Montrer que  $|I| \leq \sum_{j=1}^J |I_j|$ .  
*Indication* : on pourra comparer l’ordre maximal  $k_{\max}$  des intervalles  $I_j$  et l’ordre  $k$  de  $I$ ; dans le cas  $k_{\max} < k$ , on pourra se servir des “enfants” de  $I$  (les intervalles d’ordre  $k-1$  inclus dans  $I$ ), ou plus généralement les “descendants” de  $I$  (intervalles d’ordre  $< k$  inclus dans  $I$ ).
- (6) Supposons que pour une famille dénombrable  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  d’intervalles dyadiques,  $I \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ . Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $|I| \leq (1 + \epsilon) \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j|$ .  
*Indication* : on approximera  $I$  par un intervalle compact  $K \subset I$  composé d’une union d’intervalles dyadiques fermés; on approximera chaque  $I_j$  par un ouvert  $O_j \supset I_j$ , intérieur d’une union d’intervalles dyadiques.
- (7) Conclure que  $\mu^*(I) = |I|$  pour tout  $I \in \mathcal{D}$ .
- (8) Rappeler la définition d’un ensemble  $\mu^*$ -mesurable. Montrer que pour qu’un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  soit  $\mu^*$ -mesurable, il suffit de vérifier que  $\mu^*(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I \cap A^c)$  pour chaque intervalle dyadique  $I$ .
- (9) En déduire que si  $A \in \mathcal{D}$ , alors  $A$  est  $\mu^*$ -mesurable.
- (10) Montrer que la tribu  $\mathcal{M}(\mu^*)$  des ensembles  $\mu^*$ -mesurables contient la tribu de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Montrer que sur la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , la mesure  $\mu$  est égale à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ .

**Exercice 4.** Soient  $p_1, p_2, p_3 \in [1, \infty[$  tels que  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$ .

- (1) Montrer que pour toute fonctions boréliennes positives  $f_1, f_2, f_3$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$(0.2) \quad \int_{\mathbb{R}} f_1 f_2 f_3 dx \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3},$$

où  $\|\bullet\|_p$  représente la norme de l’espace  $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$  (mesurer de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ). Montrer que cette inégalité reste vraie pour des fonctions  $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}, \lambda)$ .

- (2) On considère des indices réels  $p, q, r \in [1, \infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ . Montrer que pour toutes fonctions positives  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$  et  $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \lambda)$ , alors la fonction de convolution  $f * g$  est dans  $L^r(\mathbb{R})$ , et vérifie l'inégalité :

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Indication* : on pourra décomposer le produit  $f(x-y)g(y)$  en un produit de 3 facteurs

$$f(x-y)g(y) = (f(x-y)^p g(y)^q)^{\alpha_r} (f(x-y)^p)^{\alpha_p} (g(y)^q)^{\alpha_q},$$

où  $\alpha_r = \frac{1}{r}$  et  $\alpha_p, \alpha_q$  sont à déterminer. Utiliser ensuite l'inégalité (0.2) en choisissant bien les exposants  $p_1, p_2, p_3$ .

- (3) On considère une fonction  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ . Soit  $p \in [1, \infty]$ . Montrer que si  $h \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ , alors  $f * h \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ , et vérifie  $\|f * h\|_p \leq \|f\|_1 \|h\|_p$ .
- (4) On suppose que la fonction  $f$  vérifie  $\|f\|_1 < 1$ . En déduire que l'application  $h \mapsto f * h$  sur l'espace de Banach  $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$  est strictement contractante. Montrer que pour toute  $g \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ , l'équation

$$h - f * h = g$$

admet une unique solution  $h \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ , qu'on explicitera.

*Indication* : se souvenir du développement en série de  $(1 - X)^{-1}$  lorsque  $|X| < 1$ .