Université Paris-Saclay, LDD3 Math-Physique, 2024-2025

EDP : APPROCHE MATHÉMATIQUE

STEPHANE NONNENMACHER

Table des matières

1. Introduction 2
2. distributions : des suites de fonctions aux formes linéaires 5
2.1. Mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ 6
2.2. Prendre la dérivée d'une mesure : des mesures aux distributions 11
2.3. Support et continuité d'une distribution à support compact 14
2.4. Continuité séquentielle d'une distribution à support compact 17
2.5. Distributions à support quelconque 18
3. Opérations sur les distributions 22
3.1. Différentiation et multiplication par une fonction lisse 22
3.2. Multiplication par une fonction lisse 25
3.3. Distributions supportées en un point 31
4. Distributions à plusieurs variables 33
4.1. Définitions et opérations sur les distributions sur $\mathbb{R}^d$ 34
4.2. Exemples de distributions sur $\mathbb{R}^d$ 35
4.3. Produit tensoriel de distributions 36
4.4. Une première EDP 41
4.5. Une EDP inhomogène 43
4.6. Une EDP d'ordre 2 43
4.7. Changement affine de coordonnées 44
4.8. Solution fondamentale de l'équation de d'Alembert 49
4.9. Convolution des distributions 50
5. Transformée de Fourier et application aux EDP 54
5.1. Définition de la transformée de Fourier et propriétés élémentaires. 54
5.2. Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz. 55
5.3. Formule d'inversion de Fourier. 58
5.4. Formule de Plancherel. 60
5.5. Action d'une EDP linéaire sur les fonctions de Schwartz 61

Date: 15 avril 2025.

5.6. Espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées 61
5.7. Transformée de Fourier des distributions tempérées 63
5.8. Transformation de Fourier des EDP linéaires 65
5.9. Solutions fondamentales 66
5.10. Problème de Cauchy pour une équation d'évolution 68

1. Introduction

L'objectif est de résoudre explicitement certaines EDP linéaires sur $\mathbb{R}^d$. Par exemple :

(1) Equation de Dirichlet :

$$-\Delta u(x) = \rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(2) L'équation des ondes sur $\mathbb{R}^{1+d}$, équation d'évolution, dont le problème aux données initiales (problème de Cauchy) s'écrit :

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1\,.$$

(3) L'équation de la chaleur :

$$(\partial_t - \Delta)\, u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0) = u_0$$

(4) L'équation de Schrödinger (sans potentiel) :

$$(i\partial_t + \Delta)\, u(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$
$$u(0) = u_0.$$

Les trois dernières équations sont des équations d'évolution (elles décrivent une évolution temporelle). Elles peuvent toute 3 s'écrire sous la forme

$$Pu(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

où P est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^{1+d}$, à coefficients constants, avec en plus une "donnée initiale" (soit seulement u_0,soit u_0 et u_1) . La première équation (Dirichlet) n'est une équation d'évolution, mais elle prend aussi la forme

$$Pu(x) = S(x),$$

avec P un opérateur différentiel en x (ici, le laplacien) et $S(x)$ une fonction source.

On peut mettre les deux dernières équations (chaleur et Schrödinger) sous la forme

$$(\partial_t + A)u = 0, \quad t > 0 \tag{1.1}$$
$$u(t=0) = u_0,$$

où A est un opérateur agissant sur la variable x (ici A est un multiple du laplacien). Cette équation est typique d'une équation d'évolution. L'équation des ondes (qui est du second ordre en temps) peut en fait également s'écrire de cette façon, en remplaçant $u(t,x)$ par une fonction $U(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (fonction vectorielle).

On n'a volontairement pas donné d'hypothèse de régularité ou de support compact sur les fonctions impliquées. Même si les données initiales sont très régulières (C^∞), il n'est pas toujours évident de résoudre ces équations explicitement, et les solutions ne restent pas forcémemnt aussi régulières. On peut utiliser plusieurs stratégies pour résoudre ces équations, valides pour des données initiales possiblement peu régulières :

— Utiliser une **solution fondamentale** de l'équation, c'est-à-dire une "fonction" $E(t,x)$ sur $\mathbb{R}^{1+d}$, ayant des propriétés de support définies (en général on demande que $E(t,x)=0$ si $t<0$), qui satisfait l'équation

$$PE = \delta_{(0,0)},$$

où $\delta_{(0,0)}$ est la **distribution de Dirac** au point $(t=0, x=0)$ d'origine dans l'espace-temps $\mathbb{R}^{1+d}$. Pour l'équation de Dirichlet, on résoudra $PE=\delta_0$, où E ne dépend que de x. Une fois connue cette solution fondamentale, on peut résoudre l'équation inhomogène

$$Pu(t,x) = S(t,x), \quad \text{resp. } Pu(x) = S(x)$$

(la fonction S est interprétée comme une "source") en prenant la *convolution spatio(-temporelle)*

$$u = E * S.$$

Dans le cas d'une équation d'évolution avec $P=\partial_t + A$, une source de la forme $S(t,x) = \delta_0(t)u_0(x)$, obtenue par convolution spatiale de $\delta_{(0,0)}$ par $u_0(x)$, nous permet de résoudre le problème homogène avec condition initiale (1.1).

— Utiliser le fait que l'opérateur A (par ex. le laplacien) est invariant par translation. Si on note τ_{x_0} l'opérateur de translation par le vecteur x_0 : $[\tau_{x_0}u](x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x-x_0)$, alors l'invariance de l'opérateur A par translation de x_0 est l'identité :

$$\tau_{x_0}(Au) = A(\tau_{x_0}u).$$

Cette invariance implique que l'opérateur A est, en quelque sorte, diagonalisé par la *transformée de Fourier* sur $\mathbb{R}^d$. Plutôt que de résoudre l'équation (1.1), on va écrire l'équation satisfaite par la transformée de Fourier spatiale de $u(t,x)$, c'est-à-dire la fonction

$$\hat{u}(t,\xi) = [\mathcal{F}u](t,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} u(t,x)\,dx.$$

Ici la coordonnée $\xi \in \mathbb{R}^d$ est appelée le paramètre de Fourier, ou le vecteur d'onde, c'est la coordonnée duale de la coordonnée de position x. L'équation satisfaite par $\hat{u}$ sera de la forme

$$(\partial_t + a(\xi))\hat{u}(t,\xi) = 0,$$

avec $a(\xi)$ une fonction sur $\xi \in \mathbb{R}^d$, appelée le *symbole* de l'opérateur A. L'équation ci-dessus est beaucoup plus simple à résoudre que (1.1), les différentes valeurs de ξ étant découplées : on obtient une famille d'EDOs paramétrées par ξ.

Pour ces deux méthodes, les solutions présentées schématiquement sont pour l'instant formelles. L :'analyse doit nous fournir les classes de données initiales u_0 pour lesquelles l'une ou l'autre méthode peut effectivement être appliquée. On rentre alors dans la sphère de l'analyse fonctionnelle, l'étude des espaces de fonctions ayant des propriétés précises de régularité ou de (dé)croissance à l'infini.

2. DISTRIBUTIONS : DES SUITES DE FONCTIONS AUX FORMES LINÉAIRES

On se place sur $\mathbb{R}$ ($d = 1$), et on cherche à définir proprement la "fonction de Dirac" $\delta(x)$. Quelles sont les propriétés de cette "fonction" ?

— $\delta(x) = 0$ pour tout point $x \neq 0$.
— $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$.

Il est clair que cette "fonction" ne peut pas réellement en être une au sens des fonctions $L^1(\mathbb{R}, dx)$. En effet, le point $\{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, donc même si on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

qui serait le candidat naturel, celle-ci vérifie $\int f_0(x)\, dx = 0$.

Une façon de définir $\delta(x)$ est par un processus de limite : on considère une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ supportée sur $[-1, 1[$ et telle que $\int_{-1}^1 \chi(x)\, dx = 1$, puis on prend ses dilatations

$$\chi_n(x) = n\chi(nx), \qquad n \geq 1.$$

Lorsque $n \to \infty$, les supports de χ_n sont des voisinages de plus en plus petits de 0, tandis que ces fonctions vérifient toujours la normalisation $\int \chi_n(x)\, dx = 1$. La suite (χ_n) converge ponctuellement vers la fonction f_0 ci-dessus, mais elle ne converge pas vers f au sens de $L^1(\mathbb{R})$, puisque $\int f_0 dx \neq \lim_n \int \chi_n dx$.

Pour caractériser le fait que $\int \chi_n dx = 1$, et que le support de χ_n est de plus en plus étroit autour de 0, on considère n'importe quelle fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$, et on montre que :

Lemme 1. *Soit une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Alors $\lim_{n\to\infty} \int \chi_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$.*

Démonstration. A faire. □

Cette propriété permet donc de définir la "fonction" delta de Dirac : c'est celle qui, lorsqu'on l'intègre multipliée par une fonction continue φ, donne $\varphi(0)$. Cette "fonction" delta est donc définie par son action sur les fonctions continues, avec une valeur dans $\mathbb{C}$. Il est clair que cette action $\varphi \mapsto \varphi(0)$ est linéaire par rapport à φ : on dit que c'est une forme linéaire sur l'espace fonctionnel $C(\mathbb{R})$.

Définition 2. La "fonction delta" est définie comme la forme linéaire $\varphi \in C(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0)$. On notera cette forme linéaire δ_0, et son action sera notée avec des crochets :

$$\varphi \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

On appellera δ_0 la distribution de Dirac en 0.

On peut de même considérer, pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, distribution de Dirac en x_0, notée δ_{x_0}, qui agit sur les fonctions continues par $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$.

Lorsqu'on applique la forme linéaire δ_0 à une fonction φ, ne dépend pas du comportement de φ en-dehors du point 0. Si on considère une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$ dont le support $\operatorname{supp} \varphi$ ne contient

pas x_0, alors $\langle \delta_0, \varphi \rangle = 0$. On dira que le support de la distribution δ_0 est réduite au point x_0, et on notera $\mathrm{supp}(\delta_0) = \{0\}$. En particulier, on dira que δ_0 est une distribution à support compact.

Une autre propriété de la distribution δ_0 est sa positivité : pour toute fonction φ positive, on vérifie que $\langle \delta_0, \varphi \rangle \geq 0$.

2.1. **Mesures de Radon sur $\mathbb{R}$.** La distribution δ_0 est parfois appelée "mesure de Dirac en 0". En effet, si on considère la mesure μ_0 borélienne définie par les propriétés

$$\mu_0(\{0\}) = 1, \quad \mu_0(\mathbb{R}^*) = 0,$$

on voit tout de suite que pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$, on peut intégrer cette fonction sur la mesure μ_0, et on a :

$$\int \varphi \, d\mu_0 = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

La distribution de Dirac δ_0 peut donc être assimilée à une mesure borélienne particulière sur $\mathbb{R}$, la mesure de Dirac μ_0.

Pourquoi utiliser deux terminologies différentes ? Parce qu'on va vouloir appliquer sur la distribution δ_0 des opérations qu'on ne peut pas pas appliquer aux mesures.

2.1.1. *Rappels sur les mesures de Radon et les mesures signées.* Une mesure borélienne μ est une application allant de l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, vers $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \infty$, satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont des boréliens deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}).$$

La mesure $\mu(A)$ peut être interprétée comme la masse de A. La mesure μ représente donc une distribution de masse sur la droite réelle.

Les boréliens forment une classe des parties de $\mathbb{R}$, qui contient les ouverts, les fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, les unions dénombrables de fermés, et ainsi de suite. Cette classe contient tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ construits à partir des intervalles, obtenus par une succession d'unions et d'intersections dénombrables. Les sous-ensembles non-boréliens sont compliqués à construire, et peuvent être vus comme "pathologiques".

Définition 3. Une mesure μ est dite finie si $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

Une mesure μ est dite localement finie si, pour tout compact $K \Subset \mathbb{R}$, $\mu(K) < \infty$. De façon équivalente, si pour tout $n \geq 0$, $\mu([-n, n]) < \infty$. Les mesures localement finies sont appelées mesures de Radon.

Pour une mesure μ, on peut considérer $U \subset \mathbb{R}$ le plus grand ouvert tel que $\mu(U) = 0$. Il suffit de prendre l'union de tous les ouverts de mesure nulle. Alors le complémentaire de U définit le support de μ.

A partir d'une mesure de Radon μ, on peut intégrer toute fonction μ-intégrable, en particulier toute fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Pour cela, on approxime f par des fonctions étagées $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{I(n)} \alpha_{i,n} \mathbb{1}_{A_{i,n}}(x)$, et on calcule

$$\int \varphi_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{I(n)} \alpha_{i,n} \mu(A_{i,n}).$$

On montre ensuite que les intégrales $\int \varphi_n \, d\mu$ admettent une limite lorsque $n \to \infty$, qu'on note $\mu(f) = \int \varphi \, d\mu \in \mathbb{R}$. Cette intégration est une opération linéaire sur $C_c(\mathbb{R})$: pour $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on vérifie que

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Ceci montre l'intégration sur la mesure μ agit comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel $C_c(\mathbb{R})$. Cette forme linéaire est positive : pour toute fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ à valeurs positives, $\mu(f) \geq 0$. Enfin cette forme linéaire satisfait la borne suivante :

(2.1)

si $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ est supportée dans $[-a, a]$,alors $\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leq \int |\varphi| \, d\mu = \int_{[-a,a]} |\varphi| \, d\mu \leq \sup |\varphi| \, \mu([-a, a])$.

On a donc une borne supérieure sur $\mu(\varphi)$ en fonction de la valeur maximale de f, et de la taille de son support. Du fait de cette borne supérieure, on dit que la forme linéaire $\mu(\cdot)$ est *continue* (par rapport à la topologie de l'espace $C_c(\mathbb{R})$, qu'on ne cherchera pas à définir proprement).

Quelles sont les opérations possibles sur les mesures localement finies :

(1) on peut additionner les mesures de Radon pour former des mesures de Radon, et les multiplier par des nombres positifs. On obtient encore des mesures de Radon. Pour μ, ν deux mesures de Radon et $\alpha, \beta \geq 0$, la mesure de Radon $(\alpha\mu + \beta\nu)$ est définie par

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(A) = \alpha\mu(A) + \beta\mu(A).$$

(2) On peut aussi prendre des combinaisons de deux mesures de Radon avec des coefficients réels (ou complexes), pour obtenir des *mesures signées* (ou des *mesures complexes*). Pour deux mesures localement finies μ, ν et deux nombres complexees α, β, la mesure complexe $\alpha\mu + \beta\nu$ ne peut a priori s'appliquer qu'aux boréliens *bornés* $A \Subset \mathbb{R}$, et prennent la valeur

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(A) = \alpha\mu(A) + \beta\mu(A).$$

La nécessité de prendre A borné vient du fait qu'on exige que $\mu(A)$ et $\nu(A)$ soient finis, de façon à ce qu'on puisse les soustraire l'un à l'autre si α, β sont de signes différents. L'espace des mesures signées (ou complexes) forme alors un espace vectoriel réel (ou complexe). Toute fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ est intégrable par rapport à μ, ν, et son intégrale par rapport à la mesure signée $(\alpha\mu + \beta\nu)$ est obtenue par linéarité :

$$\int \varphi \, d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int \varphi \, d\mu + \beta \int \varphi \, d\nu.$$

(3) On peut multiplier une mesure de Radon μ par une fonction borélienne positive f, on obtient alors une mesure (positive) $f\mu$, définie par :

$$\forall A \subset \mathbb{R} \text{ borélien}, \qquad f\mu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Si la fonction f est intégrable par rapport à μ (ce qu'on note $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$), alors la mesure $f\mu$ est finie. Plus généralement, si la fonction f est localement intégrable (ce qu'on note $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$), autrement dit si pour tout borélien borné $A \Subset \mathbb{R}$ on a $\int_A f\, d\mu < \infty$, alors $f\mu$ est une mesure de Radon. On dit que la mesure $f\mu$ est une modulation (par la fonction f) de la mesure μ.

(4) Si f est localement intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $f\mu$ sera une mesure de Radon signée (ou complexe). La mesure de Radon $f\mu$ agit sur les fonctions test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi \mapsto \int \varphi\, f\, d\mu,$$

qui est bien définie puisque $\varphi f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}, \mu)$ comme produit d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu)$ et d'une fonction $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

On a vu plus haut que μ agit comme une forme linéaire continue positive sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$.

Le théorème de Riesz-Markov nous dit que les mesures de Radon sont équivalentes aux formes linéaires continues positives sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$. Il s'étend aux mesures signée : chaque mesure de Radon signée est une forme linéaire continue sur $C_c(\mathbb{R})$, et vice-versa. Cela signifie que connaître les valeurs de $\int \varphi\, d\mu$ pour toutes les fonctions $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ permet de reconstruire entièrement la mesure signée μ, c'est-à-dire calculer toutes les valeurs $\mu(A)$ pour $A \Subset \mathbb{R}$ borélien. Les fonctions φ sont appelées "fonctions test", parce qu'on se sert d'elles pour "tester" la mesure μ.

Voir une mesure μ de Radon comme une forme linéaire sur l'espace des fonctions tests, ce n'est pas la définition originale d'une mesure, mais c'est un point de vue très utile.

Comme on le verra plus loin, les mesures de Radon fournissent une sous-classe de distributions.

2.1.2. *Modulations de la mesure de Lebesgue.* On se restreint maintenant au cas de la mesure de Lebesgue dx, qui est une mesure de Radon, et à ses modulations $f dx$ pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$.

Ci-dessus on a cherché à approcher la mesure de Dirac par une suite de fonctions $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Chacune de ces fonctions χ_n engendre une mesure $\chi_n dx$ sur $\mathbb{R}$. On note cette forme linéaires sur $C_c(\mathbb{R})$ par le crochet $\langle \chi_n dx, \varphi \rangle$. La propriété énoncée dans le Lemme~1 peut donc se réécrire :

$$\forall \varphi \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \chi_n dx, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \tag{2.2}$$

Ce type de convergence des formes linéaires χ_n vers la forme linéaire δ_0 est appelée *convergence simple* (on a convergence pour chaque fonction test φ). C'est une convergence plus faible que la convergence uniforme, ou au sens L^1. On l'appelle aussi la convergence faible-étoile sur l'espace des mesures de Radon [1].

1. Plus précisément, la convergence au sens des mesures de Radon est la convergence simple pour chaque fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

On a vu ci-dessus qu'à partir de toute fonction localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$, on produit la mesure de Radon $f\,dx$, qui peut être vue comme une forme linéaire sur les fonctions test dans $C_c(\mathbb{R})$. On peut donc, là aussi, écrire l'intégrale comme un crochet (forme linéaire) :

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}), \qquad \int \varphi(x)\, f(x)\, dx = \langle f dx, \varphi \rangle.$$

Si la fonction f n'est pas à support compact, il est important que les fonctions test soient elles-mêmes à support compact, pour qu'on soit sûr que l'intégrale ci-dessus a un sens. Par contre, si f est à support compact, l'intégrale aura un sens pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Remarque 4. On se souvient qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est en fait une classe d'équivalence de fonctions intégrables, égales deux à deux presque partout (p.p.). Que se passe-t-il si on choisit un autre représentant $\tilde{f}$ dans la même classe d'équivalence $[f]$? La définition de l'intégrale de Lebesgue implique que

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}), \quad \int \varphi\, \tilde{f}\, dx = \int \varphi\, f\, dx,$$

autrement dit la mesure $f dx$ est bien définie par la classe d'équivalence $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On verra plus bas que si $[f]$ est non triviale, alors la forme linéaire est non nulle.

Support compact vs non-compact. On observe ici une propriété récurrente des objets (fonctions, mesures) pouvant s'interpréter comme des formes linéaires sur un espace de fonctions test : si l'objet n'est pas à support compact, et qu'on ne fait pas d'hypothèse sur son "comportement à grand x", on ne pourra l'appliquer qu'à des fonctions à support compact. Par contre, si l'objet est lui-même à support compact, alors on pourra l'appliquer à des fonctions test sans hypothèses de support. On considèrera donc deux classes distinctes de distributions :

(1) les distributions à support compact, agissant sur des fonctions test sans condition de support.
(2) les distributions sans conditions de support, agissant sur les fonctions test à support compact.

Néanmoins, comme on le verra plus loin, les distributions de second type (plus général) peuvent être approchées par une famille de distributions à support compact. Montrons-le dans le cas des mesures modulées $f\,dx$, avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ qui n'est, a priori, pas à support compact. Commençons par approcher f par des fonctions continues à supports compacts.

Proposition 5. *(v. Exo 1.2) Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\|f - f_n\|_{L^1} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Démonstration. La théorie des fonctions L^1 nous apprend qu'on peut approcher f par des fonctions continues à supports compacts g_M supportées dans $[-M, M]$:

$$\|f - g_M\|_{L^1} \overset{M\to\infty}{\to} 0.$$

Fixons un petit $\epsilon > 0$. Il existe donc un $M = M(\epsilon)$ tel que

$$\|f - g_M\|_{L^1} \leq \epsilon. \tag{2.3}$$

Ensuite, on se sert des fonctions χ_n définies ci-dessus (approximations de δ_0) pour régulariser la fonction g_M par convolution :

$$g_M * \chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int g_M(x-y)\,\chi_n(y)\,dy = \int g_M(y)\,\chi_n(x-y)\,dy.$$

La seconde égalité est obtenue par le changement de variable $z = x - y$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour montrer que $g_M * \chi_n$ dépend de façon C^∞ de x, puisque c'est le cas de χ_n. On vérifie aussi que pour tout n, $g_M * \chi_n$ est supporté dans $[-M-1, M+1]$.

Comme $g_M \in C_c(\mathbb{R})$, elle est uniformément continue. Toujours pour le même $\epsilon > 0$, il existe $n = n(\epsilon) \geq 1$ tel que,

$$\forall x, y \in]\mathbb{R},\ |y| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow |g_M(x-y) - g_M(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

En insérant cette inégalité dans l'intégrale définissant $g_M * \chi_n(x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |g_M * \chi_n(x) - g_M(x)| \stackrel{\text{def}}{=} \int |g_M(x-y) - g_M(x)|\ \chi_n(y)\,dy \leq \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

Ceci montre la convergence uniforme de $g_M * \chi_n$ vers g_M. Comme ces deux fonctions sont supportées sur $[-M+1, M+1]$, en intégrant cette inégalité on trouve

$$\|g_M * \chi_n - g_M\|_{L^1} \leq \epsilon,$$

En additionnant cette inégalité avec (2.3), on trouve donc, par inégalité triangulaire :

$$\|g_M * \chi_{n_\epsilon} - f\|_{L^1} \leq 2\epsilon.$$

On est donc parvenu à approcher f à 2ϵ près pour la norme L^1, par une fonction $g_M * \chi_{n_\epsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. □

On montre ensuite facilement que cette convergence $f_n \to f$ au sens L^1 implique que les mesures de Radon $f_n dx$ approchent également la mesure $f dx$ au sens de la convergence faible-étoile.

Proposition 6. *Si une suite $(f_n \in L^1(\mathbb{R}))_{n\geq 1}$ converge au sens L^1 vers $f \in L^1$ lorsque $n \to \infty$, alors pour toute fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, on a la convergence*

$$\langle f_n, \varphi\rangle \stackrel{n\to\infty}{\to} \langle f, \varphi\rangle.$$

Autrement dit, les mesures de Radon signées $f_n dx$ convergent vers la mesure signée $f\,dx$ au sens de la convergence faible-étoile. La convergence au sens L^1 est donc plus forte que la convergence faible-étoile.

Démonstration. Comme $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, la fonction est bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| &= \left| \int (f_n - f)\,\varphi\,dx \right| \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^1} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \stackrel{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

□

Un autre corollaire à la Proposition 5 :

Corollaire 7. *Supposons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ n'est pas la classe nulle. Alors la mesure de Radon $\mu_f = f dx$ n'est pas la mesure nulle. En conséquence, l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \mapsto f\,dx$ est injective.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que $f \in L^1_{loc}$ n'est pas nulle, mais que la mesure $f\,dx$ est nulle.

Si $[f]$ n'est pas nulle dans L^1_{loc}, on peut choisir une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $[\psi f]$ n'est pas non plus nulle dans $L^1_{comp}(\mathbb{R})$. En utilisant les approximations χ_n de δ_0, on considère les approximations $(\psi f) * \chi_n$ de ψf. D'après la preuve de Prop. 5, on a $(\psi f) * \chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \psi f$. Mais on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\psi f) * \chi_n(x) = \int \psi(y) f(y) \chi_n(x-y)\,dy = \langle \mu_f, \psi(\cdot)\chi_n(x-\cdot)\rangle,$$

où dans le membre de droite on utilise le fait que la fonction $\psi(\cdot)\chi_n(x-\cdot)$ est dans $C_c(\mathbb{R})$. Si la mesure μ_f est nulle, l'expression ci-dessus doit donc être nulle, donc $(\psi f) * \chi_n$ est la fonction nulle (en tout point, c'est une fonction continue). La convergence $(\psi f) * \chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \psi f$ implique donc que ψf doit être nulle dans L^1, ce qui contredit notre hypothèse. □

2.2. **Prendre la dérivée d'une mesure : des mesures aux distributions.** On a rencontré deux exemples de suites $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers une limite au sens de la convergence simple des formes linéaires agissant sur l'espace $C_c(\mathbb{R})$ (convergence faible-étoile). Dans les deux cas, la limite est donnée par une mesure de Radon (en général complexe) sur $\mathbb{R}$:

— dans le premier cas, il s'agit de la mesure de Dirac en un point $x_0 \in \mathbb{R}$;
— dans le second cas, il s'agit de la mesure $f\,dx$ associée à une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.

On verra plus loin que toute mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ peut être obtenue ainsi, comme limite faible-étoile d'une suite de fonctions C^∞.

2.2.1. *Dériver la distribution de Dirac.* Cependant, notre objectif initial est de résoudre des équations aux dérivées partielles (en 1d, des équations différentielles ordinaires). On a dont besoin de manipuler des objets qu'on peut dériver ! Or, la théorie de Lebesgue ne permet pas de dériver une mesure. C'est dans ce but qu'a été introduite la notion de distribution : un objet aussi (voire plus) singulier qu'une mesure, mais sur lequel on peut agir par l'opération de dérivation !

Revenons à l'approximation de la mesure de Dirac δ_0 par les fonctions $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme ces fonctions sont dérivables, on peut donc considérer la suite des fonctions dérivées $(\chi_n')_{n\geq 1}$, qui sont également dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Chaque fonction χ_n' définit donc aussi une forme linéaire sur $C_c(\mathbb{R})$. On se pose alors la question suivante :

Pour une fonction test arbitraire $\varphi \in C(\mathbb{R})$, la suite des valeurs $\left(\langle \chi_n', \varphi\rangle = \int \chi_n' \varphi\,dx\right)_{n\geq 1}$ a-t-elle une limite ?

En général NON. Mais si on suppose que la fonction test est dans $C^1(\mathbb{R})$, une simple intégration par parties montre que c'est le cas :

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\langle \chi_n, \varphi'\rangle \overset{n\to\infty}{\to} -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

En restreignant ainsi l'espace des fonctions test aux fonctions $C^1(\mathbb{R})$, on peut donc définir comme limite de la suite $(\chi_n')_{n\geq 1}$ la fonction sur l'espace $C^1(\mathbb{R})$ (pour éviter de parler d'une "fonction sur l'espace des fonctions", on parle alors plutôt de "fonctionnelle") définie par :

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \mapsto -\varphi'(0) \in \mathbb{C}$$

On vérifie aisément que cette fonctionnelle est une *forme linéaire* sur l'espace de fonctions tests $C^1(\mathbb{R})$, on la notera δ_0'. En reprenant la convergence $\chi_n \to \delta_0$ de l'équation (2.2), on peut donc écrire :

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to\infty} \langle \chi_n', \varphi\rangle = -\varphi'(0) \overset{\text{def}}{=} \langle \delta_0', \varphi\rangle.$$

On interprètera cette nouvelle forme linéaire δ_0' comme la dérivée par rapport à x de la forme linéaire δ_0. On s'autorisera à noter :

$$\delta_0' = \frac{d}{dx}\delta_0. \tag{2.4}$$

Question. *Cette forme linéaire δ_0' est-elle une mesure de Radon ?*

Nous avions noté que la distribution/mesure δ_0 était de support réduit au point $\{0\}$. La distribution δ_0' est également de support réduit à ce point $\{0\}$. En effet, pour toute fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ dont le support [2] ne contient pas 0, ce qui implique qu'il existe une intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ sur lequel φ s'annule, alors on vérifie aisément que pour n assez grand, $\langle \chi_n', \varphi\rangle = 0$, de sorte que $\langle \delta_0', \varphi\rangle = 0$. Or les seules mesures de Radon supportées sur le singleton $\{0\}$ sont les multiples complexes de δ_0. En prenant la fonction test $\varphi(x) = x$, on trouve $\langle \delta_0', \varphi\rangle = -1$, tandis que $\langle \delta_0, \varphi\rangle = 0$. La distribution δ_0' ne peut donc pas être de la forme $\alpha\delta_0$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$. On aboutit donc à l'affirmation suivante :

Affirmation 8. La forme linéaire δ_0' définie ci-dessus n'est pas une mesure de Radon. Il s'agit d'un objet plus singulier, qu'on appellera une *distribution d'ordre 1*. L'identité (2.4) n'est donc pas une dérivée usuelle, mais est à interpréter *au sens des distributions*.

Remarque. Une autre façon de comprendre pourquoi δ_0' n'est pas une mesure est le fait que les fonctions χ_n' ne sont pas positives, elles ont forcément des grandes valeurs positives et négatives. Par construction, $\int \chi_n' dx = 0$, donc les χ_n' n'ont pas de "poids" au sens des mesures. En fait, en électrostatique les fonctions χ_n' représentent la distribution de charge d'un dipôle électrique, une charge positive et une charge négative de même charge absolue, très proches l'une de l'autre. La distribution δ_0' est donc une idéalisation mathématique d'un tel dipôle.

2.2.2. *Dérivée d'une mesure de Radon.* Au-delà de la mesure de Dirac, on peut considérer la mesure de la forme $f\,dx$, pour f une fonction dans $L^1_{comp}(\mathbb{R})$ (positive ou réelle ou complexe). Une telle mesure définit une forme linéaire sur l'espace $C(\mathbb{R})$. Plus haut on a noté l'action de

2. Rappelons que le support d'une fonction continue est la *fermeture* de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$.

cette forme linéaire $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$. On utilisera aussi la forme T_f pour spécifier qu'on considère f comme une forme linéaire (une distribution), plutôt que comme une fonction. Comme dans le cas de la mesure de Dirac, on peut alors définir, sur l'espace $C^1(\mathbb{R})$, la dérivée de cette distribution par une intégration par :

$$\langle T_f', \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Dans le cas où la fonction f est elle-même dans $C_c^1(\mathbb{R})$, on a le droit d'appliquer l'intégration par parties, qui nous donne

$$\langle T_f', \varphi \rangle = \int f'(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

autrement dit $T_f' = T_{f'}$, la forme linéaire associée à la mesure de Radon $f'(x)\, dx$. Mais lorsque f n'est pas dérivable au sens usuel, on ne peut pas considérer la fonction f', mais on a le droit de considérer la distribution T_f'. Celle-ci n'est pas une mesure, elle ne peut agir que sur les fonctions C^1 : c'est une distribution d'ordre 1.

Comme pour la mesure de Dirac, on dit que T_f' est la dérivée de T_f (ou de f) *au sens des distributions.*

2.2.3. *Dérivées d'ordre supérieur d'une distribution (à support compact).* Si on souhaite appliquer une seconde dérivée à δ_0 en suivant la même stratégie (approximer δ_0 par χ_n, puis utiliser 2 intégrations par parties pour pouvoir prendre la limite $n \to \infty$), il va falloir se restreindre aux fonctions test $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ pour que la suite $\langle \chi_n'', \varphi \rangle$ admette une limite. Une double intégration par parties permet alors de définir la forme linéaire sur $C^2(\mathbb{R})$:

$$\varphi \in C^2 \mapsto \langle \delta_0'', \varphi \rangle = (-1)^2 \varphi''(0) = \varphi''(0),$$

et on dira que cette forme linéaire est la dérivée seconde de la distribution δ_0, $\delta_0'' = \frac{d^2}{dx^2}\delta_0$, cette identité étant à comprendre *au sens des distributions.* La distribution δ_0'' n'a de sens que si on l'applique aux fonctions C^2 : on dit que c'est une distribution d'ordre 2.

On peut de même définir la dérivée seconde de la distribution $f dx$, pour $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, comme la forme linéaire sur les fonctions test $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ par :

$$\langle T_f'', \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^2 \langle T_f, \varphi'' \rangle = \int f(x) \varphi''(x)\, dx.$$

Si la fonction $f \in C_c^2(\mathbb{R})$, alors une double IPP montre que la distribution T_f'' est identique à la distribution $T_{f''}$.

On voit que, si on dérive une distribution T agissant sur les fonctions $C^0(\mathbb{R})$, la distribution dérivée, elle, n'agira que sur les fonctions C^1, et la dérivée seconde n'agira que sur les fonctions C^2. L'opération de dérivation a donc réduit l'espace des fonctions test. Si on souhaite définir les distributions comme agissant sur un même espace de fonctions test, on ne pourra les faire agir que sur les fonctions test infiniment dérivables $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. De cette façon, on peut itérer autant qu'on veut cette procédure de dérivation, tout en conservant le même espace test. C'est la raison pour laquelle on préfère définir les distributions comme des formes linéaires agissant sur les fonctions C^∞.

Définition 9. Une distribution sur $\mathbb{R}$ à support compact est une forme linéaire T agissant sur les fonctions test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Chaque distribution à support compact T est la restriction d'une forme linéaire sur $C^M(\mathbb{R})$, pour un certain $M \in \mathbb{N}$. On dit alors que T est une distribution à support compact, d'ordre au plus M. On verra que toute distribution à support compact est contrôlée par une certaine semi-norme sur les fonctions $C^M(\mathbb{R})$.

Une fois qu'on agit sur $C^\infty(\mathbb{R})$, on peut dériver T autant qu'on veut, en restant dans la famille des distributions :

Définition 10. Soit T une distribution à support compact. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée k-ième de T est définie comme la forme linéaire agissant sur les fonctions test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle.$$

Remarque 11. Pour une fonction $f \in C_c^k(\mathbb{R})$ et la distribution associée T_f, alors pour $j \leq k$, la dérivée j-ième de T_f coincide avec la distribution $T_{f^{(j)}}$ (on le montre en appliquant j IPP). La dérivée au sens des distributions pest donc une *extension* de la dérivée usuelle des fonctions.

2.3. **Support et continuité d'une distribution à support compact.** On a déjà mentionné ci-dessus la notion de support d'une distribution, dans le cas de la mesure de Dirac, ou d'une distribution T_f pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De quoi s'agit-il précisément ? Comme une distribution est définie par son action sur les fonctions test, la notion même de support doit utiliser les propriétés des fonctions test. Dans le cas de la mesure de Dirac δ_0 ou de ses dérivées, on comprend intuitivement que son support doit être réduit à l'origine. Autrement dit, le complémentaire du support de $\delta_0^{(k)}$ est $\mathbb{R}^*$. Peut-on détecter cette propriété en termes de fonctions test ? Si une fonction test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ a son support contenu dans $\mathbb{R}^*$, alors, comme $\operatorname{supp} \varphi$ est un fermé dans $\mathbb{R}^*$, cela implique que pour un certain $\varepsilon > 0$, ce support sera contenu dans $\mathbb{R} \backslash]-\varepsilon, \varepsilon[$. Par conséquent, φ sera identiquement nulle sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, et sera tuée par toutes les distributions $\delta_0^{(k)}$.

On aboutit à la définition suivante pour le support d'une distribution T :

Définition 12. Le complémentaire du support d'une distribution T à support compact est le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En particulier, le support de T est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 13. Dans le cas de δ_0, on a vu qu'en prenant $U = \mathbb{R}^*$, on a bien la propriété voulue. Agrandir U consisterait à rajouter le point 0, donc à considérer $\mathbb{R}$ tout entier. Or, il est clair que $\mathbb{R}$ ne remplit pas les conditions voulues, puisqu'il existe des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui ne sont pas tuées par $\delta_0^{(k)}$. $\mathbb{R}^*$ est donc bien le plus grand ouvert possible, ce qui montre que $\operatorname{supp}(\delta_0^{(k)}) = \{0\}$.

2.3.1. *Support essentiel d'une fonction L^1.* Que donne cette définition sur les fonctions $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$? Il faut se souvenir qu'une fonction dans L^1 (ou L^1_{loc}, ou L^1_{comp}) n'est pas une "fonction", c'est une classe d'équivalence de fonctions égales les unes aux autres, sauf sur des ensembles négligeables. On confond souvent $f \in L^1$ avec un de ses représentants, qui est une vraie fonction. Par exemple, la classe de la fonction $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ contient également la fonction

$\tilde{f} = \mathbb{1}_{[0,1]} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}}$. Dans ces conditions, quelle est la bonne notion de support pour la classe $[f]$ de ces deux fonctions ? Est-ce l'intervalle $[0,1]$? Ou bien $[0,1] \cup \bigcup_{n\geq 2} \{n\}$?

La bonne notion de support pour les classes $[f] \in L^1$ est celle de *support essentiel* de f, défini par

$$ess - supp(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup \{U \text{ ouvert},\ f = 0 \text{ p.p. sur} U\},$$

ou de façon équivalente, $\complement ess - supp(f)$ est le plus grand ouvert U tel que $f = 0$ p.p. sur U. On voit que si un représentant f vérifie $f = 0$ p.p. sur U, alors c'est aussi le cas pour tout autre représentant de $[f]$, puisque ces fonctions sont égales p.p. Dans l'exemple ci-dessus, cet ouvert maximal sera $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, ce qui montre que $ess - \operatorname{supp} f = [0,1]$.

On remarque que cette notion de support essentiel est définie par son complémentaire, comme l'est le support d'une distribution. Montrons que les deux notions coincident.

Si une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est supportée dans $U = \complement ess - supp(f)$, alors automatiquement

$$\langle T_f, \varphi\rangle = 0,$$

ce qui montre que U est contenu dans $\complement \operatorname{supp}(T_f)$.

Inversement, si un ouvert $\tilde{U}$ est tel que $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{U})$, alors pour toute boule $B \subset \tilde{U}$, une adaptation du Corollaire 7 montre que la restriction $f_{\restriction B}$ est nécessairement nulle dans $L^1(B)$, autrement dit que f est nulle p.p. dans B. Par conséquent, $f = 0$ p.p. dans $\tilde{U}$, donc $\tilde{U}$ est contenue dans $U = \complement ess - supp(f)$. On a donc montré :

Proposition 14. *Pour toute $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, le support essentiel de f est identique au support (compact) de la distribution T_f.*

La même preuve montre que cette propriété est aussi vérifiée dans le cas d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, correspondant à une distribution T_f (de support possiblement non compact).

2.3.2. *Bornes uniformes d'une distribution à support compact.* On a vu en (2.1) que pour toute mesure de Radon et pour toute fonction test $\varphi \in C_c(]-a,a[)$, l'action de la mesure μ était bornée par $C_a\|\varphi\|_\infty = C_a\|\varphi\|_{C^0}$. On a aussi dit qu'une mesure était une distribution d'ordre zéro (i.e., qui agit sur les fonction continues).

Définition 15. [Ordre 0] Soit $a > 0$. Pour toute distribution T d'ordre zéro à support compact tel que $\operatorname{supp} T \Subset [-a,a]$, l'action de T sur une fonction $C^0(\mathbb{R})$ ne dépendra que des propriétés de φ sur l'intervalle $[-a,a]$, et sera bornée comme ceci :

$$\exists C_T > 0,\ \forall \varphi \in C(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_T \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)| = C_T\|\varphi\|_{C^0([-a,a])}.$$

Comme on l'a vu plus haut, une façon de "fabriquer" des distributions d'ordre $N > 0$ consiste à prendre N dérivées d'une distribution d'ordre zéro. La définition même de la dérivée $T^{(N)}$ d'une distribution T d'ordre zéro montre que $T^{(N)}$ satisfait la borne suivante :

$$\forall \varphi \in C^N(\mathbb{R}), \quad \left|\langle T^{(N)}, \varphi\rangle\right| \leq C_T \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(N)}(x)| \leq C_T\|\varphi\|_{C^N([-a,a])}. \tag{2.5}$$

Ici on a utilisé la semi-norme sur l'espace $C^N(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\|\varphi\|_{C^N([-a,a])} = \sum_{j=0}^{N} \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = \sum_{j=0}^{N} \|\varphi^{(j)}\|_{C^0([-a,a])}.$$

On aurait pu aussi utiliser la semi-norme équivalente $\max_{j=0,..,N} \|\varphi^{(j)}\|_{C^0([-a,a])}$.

Ces propriétés de bornitude nous permettent de compléter la définition d'une distribution à support compact d'ordre M (v. la Définition 9). Rappelons que toute distribution à support compact doit avoir un ordre $M \in \mathbb{N}$. Comme on l'a vu plus haut, on ne fera agir la distribution que sur les fonctions lisses, même si celle-ci peut s'étendre aux fonctions C^M.

Définition 16. [Ordre N] Soit T une distribution à support compact $\operatorname{supp} T \Subset [-a,a]$ d'ordre M. Alors il existe $C_T > 0$ tel que,

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_T \|\varphi\|_{C^N([-a,a])} = C_T \sum_{j=0}^{M} \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| \tag{2.6}$$

Cette borne reste vraie si on étend la distribution aux fonctions $\varphi \in C^M(\mathbb{R})$.

2.3.3. *Les distributions à support compact comme limites de fonctions.* Au départ, on avait défini la distribution δ_0 comme limites de fonctions $\chi_n \in C_c(\mathbb{R})$, au sens de la topologie faible.

Théorème 17. *Toute distribution T à support compact peut s'obtenir comme limite (au sens faible) de fonctions $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si $\operatorname{supp} T \Subset]-a,a[$, on peut choisir des fonctions f_n toutes supportées dans $[-a,a]$.*

Démonstration. Pour montrer cette affirmation, on régularise la distribution T par une *convolution* par les fonctions $\chi_n \in C_c^\infty$ introduites ci-dessus. Il faudra pour cela définir la convolution des distributions (v. le chapitre ? ?). □

On peut prendre le contrepied du théorème ci-dessus, et considérer a priori toutes les suites $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(]-a,a[)$, qui convergent au sens faible, autrement dit telles que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \int f_n \varphi \, dx \quad \text{a une limite, qu'on note } \langle T, \varphi\rangle. \tag{2.7}$$

Il est clair que $\varphi \mapsto \langle T_{f_n}, \varphi\rangle$ est une forme linéaire, donc que leur limite $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ est également une forme linéaire. Comme toutes les f_n sont supportées dans $]-a,a[$, alors la forme linéaire T a son support inclus dans $[-a,a]$. Par contre, il n'est pas évident, a priori, que la limite T est une distribution d'ordre fini, bornée comme dans la Définition 16. Mais ce fait est au c¡ur du Théorème de borne uniforme (pour les distributions).

Théorème 18. *[Borne uniforme - support compact] Supposons qu'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(]-a,a[)$ converge au sens faible, vers la forme linéaire T, au sens de l'équation (2.7).*

Alors, il existe $M_T \in \mathbb{N}$ et $C_T > 0$ tels que T est une distribution à support compact dans $[-a,a]$, d'ordre M_T, et qui vérifie la borne (2.6).

La preuve de ce théorème utilise des méthodes un peu avancées d'analyse fonctionnelle (théorème de Baire), nous ne la donneront pas. Elle est due originellement à Banach et Steinhaus dans le cadre des espaces de Banach.

2.4. **Continuité séquentielle d'une distribution à support compact.** Une distribution à support compact, satisfaisant une borne du type (2.6), est appelée une forme linéaire continue, pour la raison suivante. Il existe une notion naturelle de convergence pour une suite de fonctions tests $\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, autrement dit une topologie sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 19. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R})$. On dit que la suite (φ_n) converge vers la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ si, pour tout $a > 0$ et tout $j \geq 0$,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^j([-a,a])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On notera cette convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{C^\infty} \varphi$, ou $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans C^∞.

A partir de cette notion de convergence dans l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$, on montre la caractérisation suivante des distributions à support compact ;

Théorème 20. *Soit T une forme linéaire à support compact sur $C^\infty(\mathbb{R})$. Alors T est une distribution à support compact si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{C^\infty} \varphi$, elle vérifie :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$: Si T vérifie la borne (2.6) et la suite $\varphi_n \to \varphi$ dans C^∞, alors il est immédiat que $\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle \to 0$.

$\Longleftarrow$: Supposons que $\operatorname{supp} T \Subset]-a, a[$, et que pour toute suite de fonctions φ_n convergeant vers 0 dans C^∞, $\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = 0$. On veut montrer qu'il existe $N_T \geq 0$ et $C_T > 0$ tels que T vérifie (2.6). On procède par contradiction : on suppose que la contraposée est vraie :

$$\forall N \geq 0,\ \forall C > 0,\ \exists \varphi \in C^\infty, \qquad |\langle T, \varphi\rangle| > C\|\varphi\|_{C^N([-a,a])}.$$

Ainsi, pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $C = N$, et il existe une fonction test $\varphi = \varphi_N \in C^\infty$ telle que

$$|\langle T, \varphi_N\rangle| > N\|\varphi_N\|_{C^N([-a,a])}.$$

On peut renormaliser chaque fonction φ_N, en prenant $\psi_N \overset{\text{def}}{=} \frac{\varphi_N}{\langle T, \varphi_N\rangle}$. On obtient donc :

$$\forall N \geq 1, \qquad \langle T, \psi_N\rangle = 1, \quad \text{et} \quad \|\psi_N\|_{C^N([-a,a])} < \frac{1}{N}.$$

En particulier, pour tout $k \geq 0$, on observe que $\|\psi_N\|_{C^k([-a,a])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Comme on ne contrôle pas ψ_N en-dehors de $[-a, a]$, on va utiliser une fonction plateau $\chi_a \in C_c^\infty(]-a, a[)$ telle que $\chi_a(x) = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp}(T)$. Ainsi, on aura pour toute fonction test :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi_a\varphi\rangle + \langle T, (1-\chi_a)\varphi\rangle = \langle T, \chi_a\varphi\rangle,$$

puisque $(1 - \chi_a)$ a son support dans le complémentaire de $\operatorname{supp}(T)$. Considérons maintenant la suite $\tilde{\psi}_N = \chi_a\psi_N \in C^\infty$. En appliquant itérativement la règle de Leibnitz aux dérivées de $\tilde{\psi}_N$,

on montre que

$$\tilde{\psi}_N^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{j} c_{j,\ell} \chi_a^{(j-\ell)}(x) \psi_N^{(\ell)}(x),$$

ce qui montre que $\|\tilde{\psi}_N\|_{C^k([-a,a])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, et donc que $\|\tilde{\psi}_N\|_{C^k([-b,b])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ pour tout $b > 0$, puisque la fonction est nulle à l'extérieur de $[-a, a]$. On a donc $\tilde{\psi}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ dans C^∞. Par contre, on a toujours $\langle T, \tilde{\psi}_N \rangle = 1$. Ceci contredit notre hypothèse, et donc prouve l'assertion. □

2.5. **Distributions à support quelconque.** On a déjà rencontré des mesures de Radon à support non compact. Celles-ci agissaient, a priori, uniquement sur les fonctions $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. En effet, sans aucune information a priori sur la croissance de la mesure lorsque $|x| \to \infty$, on ne peut pas la faire agir sur une classe particulière de fonctions continues à support non compact. Ces mesures de Radon constituent des exemples de distributions (d'ordre zéro). Comme on l'a vu dans la borne (2.1), on peut borner l'action $\langle \mu, \varphi \rangle$ en termes de la taille du support de φ, et de la norme sup de cette dernière.

On va généraliser cette propriété pour définir les distributions d'ordre zéro, puis les distributions d'ordre fini N, enfin les distributions générales sur $\mathbb{R}$.

Définition 21. Une distribution d'ordre fini (au plus) $M \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire T sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que pour tout $a > 0$ il existe $C_a > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in C_c(]-a, a[), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_a \sum_{j=0}^{M} \sup_{[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = C_a \|\varphi\|_{C^M(\mathbb{R})}.$$

Ces distributions forment un espace vectoriel, qu'on note $\mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$. En tant que formes linéaires, elles s'étendent naturellement aux fonctions $\varphi \in C_c^M(\mathbb{R})$.

La différence avec le cas des distributions à support compact, c'est que

(1) on ne peut appliquer T qu'à des fonctions test à support compact ;
(2) la constante C_a dans la borne dépend explicitement de l'intervalle $[-a, a]$ contenant le support de la fonction test. A priori, cette constante peut exploser lorsque $a \to \infty$.

2.5.1. *Une distribution d'ordre M est une somme de distributions à supports compacts.* Une distributions T d'ordre M peut être vue comme une somme de distributions à supports compacts d'ordre M. En effet, considérons une partition lisse de l'unité :

Définition 22. Une partition lisse de l'unité est une collection de fonctions $(\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{Z}}$, telles que

$$\operatorname{supp} \chi_n \subset]-n-1, n+1[, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_n(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Exemple 23. Soit $\tilde{\chi} \in C_c^\infty([-1, 1[, \mathbb{R}_+)$ telle que $\tilde{\chi}_{|[-1/2,1/2]} \geq 1$. La fonction $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\chi}(x-n)$ est bien définie en tout point x (en chaque x il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls), elle est $\mathbb{Z}$-périodique, et vérifie $S(x) \geq 1$ en tout point. On définit alors

$$\chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\chi}(x-n)}{S(x)},$$

et on vérifie que cette famille de fonctions vérifie bien (2.8).

Pour $T \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$, on définit les distributions $T_n = \chi_n T$ par :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \chi_n T, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \chi_n \varphi \rangle.$$

On vérifie facilement que T_n est une distribution à support compact d'ordre N, dont le support est inclus dans $]n-1, n+1[$. On peut en fait l'étendre à toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, puisque $\chi_n \varphi$ sera supportée dans $]n-1, n+1[\subset]-|n|-1, |n|+1[$. En raison des supports de T_n

Proposition 24. *En utilisant les notations précédentes, toute distribution d'ordre M $T \in \mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$ se décompose en la somme $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n$ au sens des distributions : pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$, où dans la somme de droite, seuls un nombre fini de termes sont non nuls, en raison des supports respectifs de T_n et φ.*

Inversement, pour toute famille $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de distributions d'ordre M supportées respectivement à l'intérieur de $]n-1, n+1[$, la somme $T = \sum_n T_n$ est bien définie au sens des distributions, et définit une distribution d'ordre M sur $\mathbb{R}$.

Exemple 25. Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution d'ordre zéro.

Pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients réels, la distributions $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n$ définit une distribution d'ordre zéro.

La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n^{(k)}$ définit une distribution d'ordre k.

2.5.2. *Distributions d'ordre infini.* Ci-dessus on a défini les distributions d'ordre $M \in \mathbb{N}$ comme somme de distributions d'ordre M à supports dans $]n-1, n+1[$. Mais on peut tout aussi bien sommer des distributions T_n à support dans $]n-1, n+1[$, d'ordres M_n quelconques. Si $\sup_n M_n = \infty$, on obtient une distribution d'ordre infini. Néanmoins, pour des fonctions test φ supportées sur $]-a, a[$, seuls les "morceaux" T_n tels que $\operatorname{supp} T_n \cap [-a, a] \neq \emptyset$ sont pertinents lorsqu'on calcule $\langle T, \varphi \rangle$, donc lorsque $|n| \leq a+1$. Pour une telle fonction φ, on aura donc une borne

$$\forall \varphi \in C_c(]-a, a[), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}(\mathbb{R})} = C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}([-a,a])},$$

avec $M(a) = \max\{M_n,\ |n| \leq a+1\}$.

On aboutit à la définition suivante d'une distribution générale.

Définition 26. Une distribution sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que pour tout $a > 0$ il existe $M(a) \in \mathbb{N}$ et $C_a > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in C_c(]-a, a[), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_a \sum_{j=0}^{M(a)} \sup_{[-a,a]} |\varphi^{(j)}(x)| = C_a \|\varphi\|_{C^{M(a)}(\mathbb{R})}. \tag{2.9}$$

Ces distributions forment un espace vectoriel, qu'on note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La différence avec les distributions d'ordre M, c'est qu'ici, à la fois l'ordre $M(a)$ et la constante C_a dépendent du support de la fonction test, et on peut avoir $\lim_{a\to\infty} M(a) = \infty$. L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ contient comme sous-espace les distributions d'ordre fini $\mathcal{D}'_M(\mathbb{R})$, et les distributions à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est défini de façon similaire au cas des distributions à support compact.

Définition 27. Le complémentaire du support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset U$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En particulier, le support de T est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 28. Pour une suite de points $x_n \to \infty$, et une suite de coefficients ($c_n \in \mathbb{R}$), la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_{x_n}^{(n)}$ définit une distribution qui est d'ordre infini si un nombre infini de coefficients c_n ne s'annulent pas. Son support est donné par $\bigcup_{n|c_n\neq 0}\{x_n\}$, qui est alors non compact. Les bornes () sont faciles à montrer, en fonction de $]-a, a[$ et des coefficients c_n.

Comme on l'avait fait dans le cas des distributions à support compact, on peut définir une notion naturelle de convergence de suites de fonctions test $(\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))_{n\geq 1}$, pour laquelle une distribution satisfait une propriété de continuité.

Définition 29. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$. On dit que la suite (φ_n) converge vers la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si

1. Il existe $a > 0$ tel que toutes les fonctions φ_n sont supportées à l'intérieur de $]-a, a[$;
2. Pour tout $j \geq 0$,

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{C^j(\mathbb{R})} = \|\varphi_n - \varphi\|_{C^j([-a,a])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En conséquence, la fonctipn $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est elle-même supportée dans $]-a, a[$. On notera cette convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, ou $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}$.

Munis de cette définition, on a alors la propriété de continuité des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Théorème 30. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors T est une distribution si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, elle vérifie :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

La preuve du théorème est très similaire à celle du Thme 20.

De même, en se servant de partitions lisses de l'unité, on montre comme dans la Proposition 24 que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut se décomposer en une somme de distributions T_n à supports compacts dans les intervalles $]n-1, n+1[$: $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n$.

Le théorème 17 nous informe que chacune des T_n peut s'obtenir, au sens des distributions à support compact, comme limite de fonctions $f_{n,k} \in C_c^\infty(]n-1, n+1[)$. On montre alors aisément que les fonctions

$$f_k = \sum_{n=-k}^{k} f_{n,k}$$

sont bien définies et C_c^∞ (en effet, pour chaque x il n'y a au plus que 2 termes non nuls). Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le crochet $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|n|\leq k} \langle T_n, \varphi \rangle$ n'impliquera qu'un nombre fini de termes (les $\{|n| \leq a+1\}$). Pour chacun de ces termes on a d'après le théorème 17 que

$$\langle f_{n,k}, \varphi \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle T_n, \varphi \rangle,$$

et en sommant les termes non triviaux on obtient, lorsque $k \geq a+1$

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \sum_{n=-[a]-1}^{[a]+1} \langle f_{n,k}, \varphi \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=-[a]-1}^{[a]+1} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Ceci montre que T_{f_k} converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (= au sens des distributions).

Définition 31. Une suite de distributions $(T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}))_{k\geq 1}$ converge (au sens des distributions) vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Remarque. Comme pour les mesures de Radon, ou les distributions à support compact, il s'agit d'une convergence faible, c'est-à-dire d'une convergence simple pour chaque fonction test. La différence entre ces deux notions réside dans l'espace fonctionnel des fonctions test (pour les mesures de Radon, on prend les fonctions test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, alors que pour les distributions il faut prendre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On a montré ci-dessus la première partie de la Proposition suivante :

Proposition 32. *Toute distribution T peut être obtenue comme la limite faible d'une suite de fonctions $(f_k \in C_c^\infty)$.*

Inversement, si une suite $(f_k \in L^1_{loc})$ admet converge au sens faible vers une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (au sens de la définition ci-dessus), alors T est une distribution.

3. Opérations sur les distributions

On sait déjà que les distributions forment un espace vectoriel. On a vu qu'on peut dériver une distribution. Lorsqu'il s'agit de fonctions continues, on sait multiplier une telle fonction avec une autre. En général, on ne sait pas multiplier deux distributions. Par contre, on va pouvoir :

(1) multiplier une distribution avec une fonction C^∞, pour obtenir une nouvelle distribution. Composé avec la différentiation, cela permettra d'appliquer à une distribution un opérateur différentiel à coefficients lisses.
(2) convoluer une distribution avec une fonction à support compact, ou même une distribution à support compact.

3.1. **Différentiation et multiplication par une fonction lisse.**

3.1.1. *Différentiation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.* On a déjà vu que la différentiation d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est définie en faisant passer la dérivée sur la fonction test, au biais d'une intégration par parties formelle. La même procédure permet de définir les dérivées d'une distribution générale $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: pour tout degré $m \geq 1$, la dérivée k-ième de T est la distribution $T^{(k)}$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T^{(m)} \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle.$$

Comme la fonction $\varphi^{(m)}$ est elle-même dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'expression de droite est bien définie. On remarque que si T est une distribution d'ordre M, alors $T^{(m)}$ est d'ordre $M + m$.

Comme on l'avait fait dans le cas de distributions à support compact, on peut justifier cette définition de T' en considérant une suite de fonctions $f_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que T_{f_k} converge vers T au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour chaque k on a bien

$$\langle T_{f_k'}, \varphi \rangle = \int f_k'(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int f_k(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\langle T_{f_k}, \varphi' \rangle.$$

En interprétant $T_{f_k'}$ comme la dérivée de la distribution T_{f_k}, on a donc

$$\lim_k \langle T_{f_k}', \varphi \rangle = -\lim_k -\langle T_{f_k}, \varphi' \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle,$$

et donc que les distributions T_{f_k}' convergent vers la forme linéaire de droite. Il est simple de vérifier que celle-ci est une distribution, et on définit celle-ci comme la dérivée de la distribution $T = \lim_k T_{f_k}$, au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Cette définition de la dérivée nous montre aussi une propriété de continuité :

Proposition 33. *L'opération de dérivation $\frac{d}{dx} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est continue, au sens de la convergence des suites de distributions. Si une suite $(T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}))_{k \geq 1}$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors T_k' converge vers T'.*

Démonstration. Si $T_k \to T$, alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$\langle T_k', \varphi \rangle = -\langle T_k, \varphi' \rangle \xrightarrow[k \to \infty]{} -\langle T, \varphi \rangle = \langle T', \varphi \rangle.$$

Ceci montre l'affirmation $T_k' \xrightarrow[k \to \infty]{\mathcal{D}'} T'$. □

3.1.2. *Une première EDO sur les distributions.* L'objectif du cours étant de résoudre certaines EDP, commençons déjà par résoudre l'EDO la plus simple, autrement dit :

$$T' = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Cette équation est à interpréter dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Autrement dit, on veut que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\langle T', \varphi\rangle = \langle 0, \varphi\rangle = 0$. Donc on veut en fait résoudre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi'\rangle = 0. \tag{3.2}$$

Si $T = T_f$ avec f une fonction dérivable, cette équation s'écrit $T_{f'} = 0$ au sens des distributions. Comme $f' \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cela amène à l'équation $f' = 0$ au sens des fonctions continues. On connait les solutions de cette équation : les fonctions $f = Cste$, qui forment un espace de dimension 1.

Notre but est de montrer qu'il n'existe pas d'autres solutions à l'équation (3.1). Pour cela, on va caractériser les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui s'écrivent comme la dérivée d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

Lemme 34. *Une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est égale à la dérivée d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0$. Ces fonctions forment un sous-espace fermé de codimension 1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Les conditions $\psi(x) = \varphi'(x)$ pour tout x et le fait que $\psi(x) = 0$ et $\varphi(0) = 0$ pour $x \leq -a$, pour a assez grand, on tire que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x > \operatorname{supp}\psi$, on obtient $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy$, une valeur indépendante de x. Si on suppose que φ est à support compact, cela impose que cette dernière intégrale est nulle.

Inversement, si $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy = 0$, la fonction φ définie par l'intégrale ci-dessus est bien dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et c'est la seule primitive de ψ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L'espace des fonctions dérivables coincide donc avec le noyau de la forme linéaire continue $T_1 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$. Cet espace est un hyperplan (fermé) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qu'on notera $H = \ker T_1$. □

Toute solution T de (3.1) doit s'annuler lorsqu'on l'applique aux fonctions $\varphi \in H$. Comment agit-elle sur les fonctions qui ne sont pas dans cet hyperplan ? Choisissons une fonction $\chi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans cet hyperplan, par exemple telle que $\langle 1, \chi_0\rangle = 1$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\tilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \langle 1, \varphi\rangle \chi_0 \tag{3.3}$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et vérifie $\langle 1, \tilde{\varphi}\rangle = 0$, donc $\tilde{\varphi} \in H$ [3].

Comme $\tilde{\varphi}$ est une dérivée, toute solution T doit satisfaire

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle T, \varphi\rangle = \langle 1, \varphi\rangle \langle T, \chi_0\rangle.$$

3. Ici, on a juste utilisé le fait géométrique que tout point de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut se décomposer comme somme d'un point de l'hyperplan H et d'un point sur une droite transversale à l'hyperplan (ici, la droite $\mathbb{R}\chi_0$).

Notons $C = \langle T, \chi_0 \rangle$. On a donc montré que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = C\langle 1, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle$. Cela montre que T est la distribution donnée par la fonction constante $f = C$. On a donc retrouvé les solutions simples (fonctions constantes), et ce sont les seules solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (3.1)..

3.1.3. *La version inhomogène de cette EDO.* Considérons maintenant une distribution arbitraire $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et cherchons à résoudre l'équation inhomogène (c'est-à-dire, avec un "terme source")

$$T' = S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En général, on n'aura pas de solution T "simple" à cette équation. Cherchons néanmoins à la résoudre. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'équation s'écrit :

$$-\langle T, \varphi' \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

Si $\psi \in H$ est dans l'hyperplan des dérivées, elle aura *une unique* primitive $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\, dy$ qui est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. L'action de toute solution T sur ψ est alors donnée de façon unique par

$$\langle T, \psi \rangle = -\langle S, \Psi \rangle.$$

Prenons maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitraire. En utilisant la fonction χ_0 de référence comme ci-dessus, on fabrique la fonction $\tilde{\varphi} \in H$ par (3.3). Cette fonction admet une unique primitive $\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}$, donnée par

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On aura donc, pour toute solution T :

$$\begin{aligned} &\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle \\ \Longrightarrow\ &\langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle + \langle 1, \varphi \rangle \langle T, \chi_0 \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En revenant à la définition de $\tilde{\varphi}$ et sa primitive $\tilde{\Phi}$, on voit que l'application $Q : \varphi \in \mathcal{D} \mapsto \tilde{\Phi} \in \mathcal{D}$ est linéaire, de sorte que l'expression ci-dessus est bien une forme linéaire en φ. Il reste à vérifier que cette forme linéaire est une distribution, autrement dit que le membre de droite est borné par une expression de la forme (2.9). Si φ est supportée dans un intervalle $]-a, a[$, alors $\tilde{\Phi}$ sera supportée sur $]-a, a[\cup \operatorname{supp} \chi_0$. Quitte à supposer a assez grand, on peut supposer que cette union vaut $]-a, a[$. L'expression de $\tilde{\Phi}$ montre alors que

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq a\|\tilde{\varphi}\|_{C^0} \leq a(1 + \|\chi_0\|_{C^0})\|\varphi\|_{C^0},$$

et les dérivées supérieures de $\tilde{\Phi}$ vérifient

$$\|\tilde{\Phi}^{(k)}\|_{C^0} = \|\tilde{\varphi}^{(k-1)}\|_{C^0} \leq \|\varphi^{(k-1)}\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^0}\|\chi_0^{(k-1)}\|_{C^0},$$

de sorte que pour tout $k \geq 1$, il existe une constante C_{k,χ_0} telle que

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^k} \leq C_{k,\chi_0}\|\varphi\|_{C^{k-1}}.$$

En rajoutant la borne satisfaite par la norme sup de $\tilde{\Phi}$, on trouve pour tout $k \geq 0$, une constante $C_{k,a,\chi_0} > 0$ telle que :

$$\|\tilde{\Phi}\|_{C^k} \leq C_{k,a,\chi_0} \|\varphi\|_{C^k}.$$

Avec l'équation (3.4), ce contrôle sur les normes C^k de $\tilde{\Phi}$ montre que $\varphi \mapsto \langle S, \tilde{\Phi} \rangle$ est une distribution. C'est aussi bien sûr le cas pour le second terme $\varphi \mapsto \langle C, \varphi \rangle$. On conclut que T est une distribution

En rajoutant à notre solution particulière T la distribution T_c pour $c \in \mathbb{R}$ arbitraire, qui vérifie $T_c' = 0$, on voit que $T + T_c$ est une solution de $T' = S$. L'ensemble des solutions est donc formé par les distributions

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi} \rangle + \langle C, \varphi \rangle,$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$ arbitraire. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 35. *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $T' = S$ admet comme uniques solutions les distributions*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = -\langle S, Q(\varphi) \rangle + \langle C, \varphi \rangle,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, et $Q(\varphi)$ est la fonction $\tilde{\Phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie ci-dessus.

Remarque 36. La construction de $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ dépend d'un choix de fonction χ_0. Si on change χ_0 par une autre fonction $\chi_0^\flat$ satisfaisant aussi $\int \chi_0^\flat = 1$, on obtiendra une autre fonction $\tilde{\varphi}^\flat \in H$, donc une autre primitive $\tilde{\Phi}^\flat$. On vérifie que la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \tilde{\Phi}^\flat \rangle + \langle 1, \varphi \rangle \langle T, \chi_0^\flat \rangle$$

donne la même distribution T que (3.4).

3.2. **Multiplication par une fonction lisse.** On a en fait déjà rencontré cette situation au moment de "découper" une distribution T en la somme de distributions $T_n \stackrel{\text{def}}{=} \chi_n T$: il s'agissait de multiplier $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par les fonctions $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en faisant passer la fonction χ_n du côté de la fonction test. Cette manipulation peut se généraliser à la multiplication par une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, sans condition de support.

Définition 37. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors on définit la distribution $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle.$$

Il est simple de vérifier que cette expression définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, la fonction $f\varphi$ est bien dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et l'opération est linéaire. Les formules de Leibnitz montrent que si $\operatorname{supp} \varphi \subset]-a, a[$, les normes $\|f\varphi\|_{C^k}$ sont contrôlées par :

$$\|f\varphi\|_{C^k} \leq C_k \|f\|_{C^k([-a,a])} \|\varphi\|_{C^k(\mathbb{R})},$$

avec C_k un facteur combinatoire ne dépendant que de k. Par conséquent, si T vérifie les bornes (2.9), alors fT vérifiera des bornes similaires, où il sera nécessaire de modifier les constantes C_a en fonction de f, mais pas les ordres $M(a)$. La forme linéaire fT est donc bien une distribution.

Remarque 38. On a le droit de multiplier T par une fonction C^∞, qui est un cas très particulier de distribution. Mais *on ne peut pas multiplier entre elles deux distributions T, S quelconques.* C'est la conséquence d'autoriser ces objets très singuliers que sont les distributions.

Comme on sait multiplier par une fonction lisse et qu'on sait dériver, a-t-on un analogue à la formule de Leibniz ?

Proposition 39. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors la dérivée de la distribution fT satisfait la règle de Leibniz :*

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

Démonstration. Comme d'habitude, on transfère les calculs vers la fonction test : pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle (fT)', \varphi \rangle &= -\langle fT, \varphi' \rangle \\
&= -\langle T, f\varphi' \rangle \\
&= -\langle T, ((f\varphi)' - f'\varphi) \rangle \\
&= \langle T', f\varphi \rangle + \langle T, f'\varphi \rangle \\
&= \langle fT', \varphi \rangle + \langle f'T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

3.2.1. *Une équation fonctionnelle.* Cette procédure de multiplication permet de poser des équations "fonctionnelles" sur les distributions. Par exemple, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, quelles distributions T satisfont l'équation

$$fT = 0 \ ?$$

Plus généralement, pour une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quelconque, quelles distributions T satisfont

$$fT = S \ ? \tag{3.5}$$

La réponse va dépendre des propriétés de f.

Proposition 40. *Supposons que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ne s'annule jamais. Alors, pour tout $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la seule solution de l'équation $fT = S$ est la distribution $T = \frac{1}{f}S$, où on remarque que $\frac{1}{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On veut trouver $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, f\varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

Comme f ne s'annulle pas, l'application $\varphi \in \mathcal{D} \mapsto \psi = f\varphi \in \mathcal{D}$ est bijective, d'inverse $\psi \mapsto \frac{1}{f}\psi$. En utilisant cette bijection, on voit que la propriété ci-dessus peut s'écrire

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \psi \rangle = \langle S, \frac{1}{f}\psi \rangle,$$

ce qui définit uniquement T. □

Si on relaxe la condition de non-annulation de f, la situation devient plus compliquée. Commençons par le cas le plus simple.

Proposition 41. *L'équation $xT = 0$ admet comme uniques solutions les distributions $T = c\delta_0$, avec $c \in \mathbb{R}$.*

Remarque 42. Ce résultat montre l'identité $x\delta_0 = 0$. Plus généralement, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $(x - x_0)\delta_{x_0} = 0$.

Démonstration. On cherche à résoudre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, x\varphi \rangle = 0. \tag{3.6}$$

Pour définir T, on a besoin de calculer $\langle T, \psi \rangle$ pour toute $\psi \in \mathcal{D}$. Mais contrairement à la proposition précédente, ici l'application $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto x\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas bijective, puisqu'il existe des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui ne s'annulent pas en l'origine. On va d'abord considérer le sous-espace $\mathcal{D}_{ext}$des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui sont supportées à l'extérieur de l'intervalle $]-1, 1[$. Pour de telles fonctions, l'application $\varphi \in \mathcal{D}_{ext} \mapsto x\varphi \in \mathcal{D}_{ext}$ est bijective, puisque la fonction $1/x$ est bien définie et lisse à l'extérieur de $]-1, 1[$. On aura donc, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{ext}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Cela montre que T est supportée dans $[-1, 1]$ [4].

Choisissons une fonction plateau $\chi_0 \in C_c^\infty(]-2, 2[)$ telle que $\chi_0(x) = 1$ pour $x \in [-1, 1]$. On peut s'en servir pour décomposer toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $\varphi = \chi_0\varphi + (1 - \chi_0)\varphi$. La seconde fonction $(1 - \chi_0)\varphi$ est supportée à l'extérieur de $]-1, 1[$, donc elle est "tuée" par T. Il reste donc à étudier l'action de T sur la fonction $\chi_0\varphi$, ou plus généralement sur toutes les fonctions φ supportées dans $]-2, 2[$.

Pour étudier l'action de T sur une telle fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{]-2,2[}(\mathbb{R})$, on va procéder comme dans la section 3.1.2, c'est-à-dire décomposer φ en une partie "simple", et une partie de la forme $x\psi$. Pour cela on utilise le Lemme de Hadamard, une variation sur le développement limité en zéro : φ peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\theta(x),$$

où $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Cependant, si $\varphi(0) \neq 0$, la fonction θ ne sera pas à support compact. Pour pallier ce "défaut", on se sert d'une fonction plateau $\chi_1 \in C_c^\infty(]-3, 3[)$ telle que $\chi_1 = 1$ sur $[-2, 2]$. Pour simplifier les calculs ultérieurs, on suppose que χ_1 est paire. En tenant compte du fait que $\operatorname{supp} \varphi \subset]-2, 2[$, on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0)\,\chi_1(x) + x\psi(x), \qquad \text{avec } \psi = \theta\chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

Les deux fonctions du membre de droite étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, cette décomposition permet de calculer l'action de T sur φ :

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)\langle T, \chi_1 \rangle + \langle T, x\psi \rangle = c\varphi(0) = c\langle \delta_0, \varphi \rangle = \langle c\delta_0, \varphi \rangle.$$

en définissant $c \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \chi_1 \rangle$, et en se servant de la propriété (3.6).

En conclusion, on a montré que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = \langle c\delta_0, \varphi \rangle$, donc que $T = c\delta_0$. □

4.

Démonstration. En fait, au lieu de $]-1, 1[$ on aurait pu choisir un intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui montre que T est supportée dans $]-\epsilon, \epsilon[$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a finalement $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$. □

Remarque 43. Si on avait supposé que $T = T_f$ avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, l'équation $xT_f = 0$ serait équivalente à $T_{xf} = 0$ (le montrer !), et donc que xf est la fonction nulle dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Cela impose que $f = 0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$, donc aussi dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque $\{0\}$ est de mesure nulle.

3.2.2. *Une équation fonctionnelle inhomogène : la partie principale de* $\frac{1}{x}$. Cherchons maintenant à résoudre l'équation

$$xT = 1. \tag{3.8}$$

(plus exactement, $xT = T_1$). Là encore, on peut séparer l'étude entre les fonctions φ supportées à une certaine distance de l'origine, et celles dont $0 \in \operatorname{supp}\varphi$.

Considérons les fonctions test φ telles que $\operatorname{supp}\varphi \cap [-1,1] = \emptyset$. Pour ces fonctions, la fonction $\psi = \frac{1}{x}\varphi$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et est également supportée dans le complémentaire de $[-1,1]$. Pour un tel φ, on aura donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, x\psi\rangle = \langle xT, \psi\rangle = \langle 1, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Cette expression définit bien une distribution, qui agit comme la mesure de Radon $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\frac{1}{x}dx$. En effet, en supposant que $\operatorname{supp}\varphi \subset]-a,a[\setminus[-1,1]$, l'expression de droite est bornée en valeur absolue par $2(a-1)\|\varphi\|_{C^0}$. On aurait pu remplacer $[-1,1]$ par $[-\epsilon,\epsilon]$ pour n'importe quel $\epsilon > 0$.

Concentrons-nous maintenant sur les fonctions φ supportées près de l'origine, disons dans l'intervalle $]-2,2[$. La décomposition de Hadamard (3.7) permet d'écrire

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \langle T, x\psi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle + \langle xT, \psi\rangle = \langle c\delta_0, \varphi\rangle + \langle 1, \psi\rangle, \tag{3.9}$$

en notant $c = \langle T, \chi_1\rangle$, et en rappelant que la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\chi_1(x)}{x}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et est supportée dans $]-3,3[$. La formule

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x} = \int_0^1 (\varphi'(tx) - \varphi(0)\chi_1'(tx))\, dt$$

montre que l'application $\varphi \mapsto \psi$ est linéaire, et en utilisant l'expression intégrale on voit que

$$\|\psi\|_{C^0} \le \|\varphi'\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^0}\|\chi'\|_{C^0} \le C_\chi\|\varphi\|_{C^1}.$$

En tenant compte de la longueur du support de ψ, et du premier terme, on trouve finalement, pour toute fonction test supportée dans $]-3,3[$.

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le |c|\|\varphi\|_{C^0} + 6C_\chi\|\varphi\|_{C^1} \le C\|\varphi\|_{C^1},$$

pour une certaine constante C. Si on ajoute à cette solution $C_0\delta_0$, on aura toujours une solution de $xT = 1$. Notons que $C_0\delta_0$ agit trivialement sur les fonctions φ supportées en-dehors de 0.

On a montré l'existence d'une famille à 1 paramètre de solutions à cette équation. On sait aussi que toutes ces solutions agissent de la même façon sur les fonctions test supportées en-dehors de l'origine, par la mesure de Radon $\frac{1}{x}dx$, bien définie en-dehors de l'origine. Mais comment décrire ces distributions au voisinage de zéro ? Si on reprend la formule (3.9), on trouve

$$\langle 1, \psi\rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi_1(x)}{x}\, dx,$$

où on a vu que l'intégrand est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On rappelle que la fonction plateau χ_1 a été choisie paire. Comme l'intégrale est celle d'une fonction continue, on

$$\int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\chi_1(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\chi_1(x)}{x}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon\searrow 0} I_\epsilon(\varphi).$$

Sur $\{|x|\geq\epsilon\}$, les deux termes de l'intégrand sont bien définis et sont continus. La parité de χ_1 implique que la contribution du second terme est nulle, de sorte que

$$I_\epsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx,$$

en utilisant le changement de variable $x\mapsto -x$ dans la seconde intégrale. La fonction $x\mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(x)}{x} = \psi(x)+\psi(-x)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, en particulier elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\langle 1,\psi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{|x|\geq\epsilon}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Définition 44. Cette limite d'intégrales définit une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée la **valeur principale de** $\frac{1}{x}$, qu'on note $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$. L'expression ci-dessus permet de la définir sur les fonctions $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, même lorsque l'origine est dans le support de φ. Sur les fonctions φ supportées en-dehors de 0, cette distribution a le même effet que la mesure $\frac{1}{x}dx$, qui est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Pour φ supportée sur $]1,a[$, la distribution sera contrôlée par $\left|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi\rangle\right| \leq (a-1)\|\varphi\|_{C^0}$. Par contre, on a montré ci-dessus que lorsque $\operatorname{supp}\varphi\subset]-2,2[$, on a la borne $\left|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi\rangle\right| \leq C\|\varphi\|_{C^1}$.

Affirmation. On ne peut pas améliorer cette borne pour la transformer en $C'\|\varphi\|_{C^0}$, même en prenant une constante $C'>C$. En effet, si on choisit des fonctions test φ_n de la forme $\varphi_n(x)=\varphi_1(nx)$, avec $\varphi_1\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+)$ et $\sup\varphi=1$, on voit que pour n assez grand $\operatorname{supp}\varphi_n\subset]0,2[$, alors que

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x},\varphi_n\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(x)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\varphi_1(y)}{y}dy \quad \text{(changement de variable } y=nx).$$

En choisissant une fonction φ_1 à très long support (et égale à 1 sur la majeure partie de ce support), on peut rendre cette dernière intégrale très grande. Celle-ci ne sera donc pas bornée par $C'=C'\|\varphi\|_{C^0}$.

La distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est donc bien une distribution d'ordre 1, et non d'ordre zéro. Ce n'est donc pas une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$. On aurait pu s'en douter, du fait que $\frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ du fait de la singularité en zéro.

Conclusion 45. Les distributions T solutions de $xT=1$ sont toutes de la forme $T=\mathrm{vp}\frac{1}{x}+C\delta_0$, avec $C\in\mathbb{R}$ arbitraire. Ce sont des distributions d'ordre 1, à support $\operatorname{supp}T=\mathbb{R}$.

Corollaire 46. *De même, pour toute distribution $S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ supportée dans $[-1,1]$, l'équation $xT=S$ admet une famille à un paramètre de solutions, de la forme $T=T_0+c\delta_0$, où T_0 est une solution particulière et $c\in\mathbb{R}$ est arbitraire. En utilisant la décomposition (3.7) d'une fonction test φ, une solution particulière est donnée par*

$$\langle T_0,\varphi\rangle = \langle S,\psi\rangle.$$

Exercice 47. Résoudre l'équation $xT' = 0$.

Pour une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $T' + a(x)T = S$.

On peut chercher à multiplier par des polynômes d'ordre plus élevé.

Proposition 48. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors l'équation $x^m T = 0$ admet pour solutions toutes les combinaisons linéaires des $\left\{\delta_0^{(k)},\ k = 0, \dots, m-1\right\}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence. On a déjà traité le cas $m = 1$ dans la Proposition 41. Supposons la récurrence satisfaite à l'ordre $m-1$. L'équation $x^m T = 0$ peut se lire $x^{m-1}(xT) = 0$. L'hypothèse de récurrence montre donc que

$$xT = \sum_{k=0}^{m-2} c_k \delta_0^{(k)}.$$

Pour résoudre cette équation, prenons une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}_{[-2,2]}(\mathbb{R})$ comme ci-dessus, et appliquons le Lemme de Hadamard comme en (3.7). On a donc :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \varphi(0)\chi_1\rangle + \langle T, x\psi\rangle \\
&= \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \langle xT, \psi\rangle \\
&= \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \sum_{k=0}^{m-2} c_k \langle \delta_0^{(k)}, \psi\rangle = \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \sum_{k=0}^{m-2} c_k (-1)^k \psi^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Afin de calculer les dérivées de ψ en fonction de celles de φ, on écrit le lemme de Hadamard à l'ordre m, en commençant par un DL à l'ordre m :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^m \theta_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\chi_1(x) + x^m \psi_m(x).$$

En comparant avec (3.7), on trouve que

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{k=1}^{m-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^{k-1}}{k!}\chi_1(x) + x^{m-1}\psi_m(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{x^k}{k!}\chi_1(x) + x^{m-1}\psi_m(x),
\end{aligned}$$

et donc que $\psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k+1}$ pour $k = 0, \dots, m-2$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \varphi(0)\langle T, \chi_1\rangle + \sum_{k=0}^{m-2} c_k (-1)^k \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k+1} \\
&= \langle T, \chi_1\rangle\langle \delta_0, \varphi\rangle - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{c_k}{k+1}\langle \delta_0^{(k+1)}, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui montre la récurrence à l'ordre m. □

Remarque 49. Pour résoudre l'équation $xT = c_k \delta_0^{(k)}$ pour $k \geq 0$, on aurait aussi pu utiliser le fait que pour tout $k \geq 1$, on a égalité des distributions

$$x\delta_0^{(k)} = -k\delta_0^{(k-1)} \Longleftrightarrow -\frac{x}{k}\delta_0^{(k)} = \delta_0^{(k-1)}.$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle x\delta_0^{(k)}, \varphi\rangle &= \langle \delta_0^{(k)}, x\varphi\rangle \\ &= (-1)^k \langle \delta_0, (x\varphi)^{(k)}\rangle.\end{aligned}$$

La formule de Leibniz est de la dérivée k-ième ne comporte que deux termes :

$$\frac{d^k}{dx^k}(x\varphi(x)) = x\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x),$$

et on trouve donc

$$\begin{aligned}\langle x\delta_0^{(k)}, \varphi\rangle &= (-1)^k \langle \delta_0, x\varphi^{(k)} + k\varphi^{(k-1)}\rangle \\ &= (-1)^k k\varphi^{(k-1)}(0) \\ &= -k\langle \delta_0^{(k-1)}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

L'équation $xT = c_k\delta_0^{(k)}$ peut donc se réécrire :

$$xT = -c_k \frac{x}{k+1}\delta_0^{(k+1)} \Longleftrightarrow x\left(T + \frac{c_k}{k+1}\delta_0^{(k+1)}\right) = 0.$$

En se servant de la Proposition 41, on trouve alors $T + \frac{c_k}{k+1}\delta_0^{(k+1)} = c\delta_0$, donc $T = c\delta_0 - \frac{c_k}{k+1}\delta_0^{(k+1)}$.

3.3. **Distributions supportées en un point.** Comme la fonction x^m est non nulle en-dehors de $\{x = 0\}$, on voit que les solutions T de l'équation $x^m T = 0$ vont s'annuler sur toute fonction test φ supportée en-dehors de l'origine. En effet, pour φ telle que $\operatorname{supp}\varphi \cap]-\epsilon, \epsilon[= \emptyset$, la fonction $\frac{\varphi}{x^m} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc on peut écrire

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, x^m \frac{\varphi}{x^m}\rangle = \langle x^m T, \frac{\varphi}{x^m}\rangle = 0,$$

Donc le support de T est forcément réduit à $\{0\}$.

Les distributions à support en un seul point sont en fait simples à décrire :

Proposition 50. *Supposons que le support de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est égal à l'origine :* $\operatorname{supp} T = \{0\}$. *Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(c_0, \ldots, c_m)$ tel que*

$$T = \sum_{k=0}^{m} c_k \delta_0^{(k)}.$$

Démonstration. On sait qu'il suffit de se restreindre aux fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}_{[-1,1]}(\mathbb{R})$. Il existe $m \geq \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour toutes ces fonctions test,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{k=0}^{m} \sup_x |\varphi^{(k)}(x)|. \tag{3.10}$$

On va se servir d'une fonction plateau $\chi \in C_c^\infty(]-1,1[)$ égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et à ses contractions $\chi_\epsilon(x) = \chi(x/\epsilon)$. On peut en effet découper

$$\varphi = \chi_\epsilon \varphi + (1 - \chi_\epsilon)\varphi.$$

Comme la fonction $(1-\chi_\epsilon)\varphi$ s'annule sur $[-\epsilon/2,\epsilon/2]$, la distribution T agit trivialement dessus. On a donc :

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\chi_\epsilon\varphi\rangle.$$

1. Considérons le cas où la fonction φ satisfait $0=\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\cdots=\varphi^{(m)}(0)$, ce qui implique que $\varphi(x)=x^{m+1}\psi_{m+1}(x)$ par le lemme de Hadamard. On veut ensuite appliquer la borne (3.10) à la fonction $\chi_\epsilon\varphi$. Pour cela il faut estimer les dérivées successives de $\chi_\epsilon\varphi = \chi_\epsilon x^{m+1}\psi_{m+1}$. On remarque que le support de χ_ϵ est contenu dans $[-\epsilon,\epsilon]$. Par conséquent, on trouve que

$$\sup_x |\chi_\epsilon(x)x^{m+1}\psi_{m+1}(x)| \le \epsilon^{m+1}\sup_x|\psi_{m+1}(x)| = \mathcal{O}(\epsilon^{m+1})_{\epsilon\to 0}.$$

Pour estimer les dérivées supérieures, on pourrait appliquer la règle de Leibniz sur le produit de 3 fonctions ; mais il est plus simple de remarquer que

$$\chi_\epsilon(x)x^{m+1}\psi_{m+1}(x) = \epsilon^{m+1}\rho_{m+1}(x/\epsilon)\psi_{m+1}(x),$$

où $\rho_{m+1}(t)=t^{m+1}\chi(x)$. Après ce regroupement, on peut appliquer la règle de Leibniz sur le produit de 2 termes. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\left(\rho_{m+1}(x/\epsilon)\psi_{m+1}(x)\right) &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\rho_{m+1}(x/\epsilon)\frac{d^{k-\ell}}{dx^{k-\ell}}\psi_{m+1}(x)\\ &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell}\epsilon^{-\ell}\rho_{m+1}^{(\ell)}(x/\epsilon)\frac{d^{k-\ell}}{dx^{k-\ell}}\psi_{m+1}(x).\end{aligned}$$

On voit que les termes les plus "méchants" sont $\ell=k$, qui contient un facteur ϵ^{-k}. En restaurant le préfacteur ϵ^{m+1}, on a pour tout $k\le m$:

$$\sup_k\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\chi_\epsilon(x)x^{m+1}\psi_{m+1}(x)\right)\right| = \mathcal{O}(\epsilon^{m+1-k}).$$

En sommant tous ces termes, on trouve $|\langle T,\varphi\chi_\epsilon\rangle| = \mathcal{O}(\epsilon)$. Mais comme ce crochet est égal à $|\langle T,\varphi\rangle|$, et que $\epsilon>0$ est arbitrairement petit, on trouve $|\langle T,\varphi\rangle|=0$.

2. Cas général : le lemme de Hadamard à l'ordre $m+1$ montre que toute $\varphi\in\mathcal{D}_{[-1,1]}(\mathbb{R})$ peut se décomposer en

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\chi_1(x) + x^{m+1}\psi_{m+1}(x).$$

Le terme de reste $x^{m+1}\psi_{m+1}$ est du type traité dans le 1er cas ci-dessus, donc on trouve que $\langle T, x^{m+1}\psi_{m+1}\rangle = 0$. Il nous reste donc :

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^m \varphi^{(k)}(0)\langle T,\frac{x^k}{k!}\chi_1\rangle = \sum_{k=0}^m c_k\langle\delta_0^{(k)},\varphi\rangle, \quad \text{avec } c_k = (-1)^k\langle T,\frac{x^k}{k!}\chi_1\rangle.$$

□

4. Distributions à plusieurs variables

Notation 51. On rappelle les notations pour les dérivées partielles. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_d}} \varphi(x)$$

la α-dérivée partielle. Pour une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définira pour tout $k \in \mathbb{N}$ la norme C^k :

$$\|\varphi\|_{C^k(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq k} \sup_x |\partial^\alpha \varphi(x)| .$$

Pour écrire le développement limité de φ basé en l'origine, on peut écrire, pour $x \neq 0$, $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(tx)$. C'est une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R})$, et on écrit son DL :

$$\varphi(x) = f(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{m-1!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(t)\, dt. \tag{4.1}$$

Il reste ensuite à calculer les dérivées de f en fonction de celles de φ. En observant que $f(t) = \varphi(tx_1, \dots, tx_d)$, on peut écire

$$f'(t) = \sum_{i=1}^d x_i \partial_i \varphi(tx_1, \dots, tx_d),$$

$$f''(t) = \sum_{i,j=1}^d x_i x_j \partial_{ij}^2 \varphi(tx_1, \dots, tx_d),$$

et plus généralement

$$f^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \cdots i_k = 1}^d x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \partial_{i_1 i_2 \cdots i_k}^k \varphi(tx_1, \dots, tx_d).$$

On veut regrouper tous les monômes $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ identiques, autrement dit correspondant au même x^α pour un certain multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ (le facteur x_1 apparaît $\alpha_1$fois, le facteur x_2 apparaît α_2 fois, etc). Ce petit exercice combinatoire nous dit que le monôme x^α apparaît $\binom{k}{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k!}{\alpha!} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}$ fois (coefficient multinomial). Ainsi, ce regroupement donne

$$f^{(k)}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha\, \partial^\alpha \varphi(tx).$$

En insérant cette expression dans le DL (4.1) de f, on trouve le DL de φ avec reste intégral :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha\, \partial^\alpha \varphi(0) + \frac{1}{m-1!} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = m} \binom{m}{\alpha} x^\alpha \int_0^1 (1-t)^{m-1} \partial^\alpha \varphi(tx)\, dt$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha\, \partial^\alpha \varphi(0) + m \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \partial^\alpha \varphi(tx)\, dt. \tag{4.2}$$

On admettra la formule de Leibniz multidimensionnelle : pour deux fonctions $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\partial^\alpha(fg)(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^d, \beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f\,(x)\, \partial^{\alpha-\beta} g(x), \tag{4.3}$$

où la notation $\beta \leq \alpha$ indique que $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout $j = 1, \dots, d$. Le coefficient multinomial $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^d \binom{\alpha_j}{\beta_j}$.

4.1. **Définitions et opérations sur les distributions sur $\mathbb{R}^d$.** Les définitions des distributions se généralisent facilement à l'espace $\mathbb{R}^d$. On définira directement les distributions générales. On remplace les intervalles bornés $]-a, a[$ par les boules (ouvertes) $B(0, R)$ centrées en l'origine. Les boules fermées sont notées $\overline{B}(0, R)$. Les fonctions test sont dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et on notera $\mathcal{D}_R(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des fonctions test à support dans $\overline{B}(0, R)$.

Définition 52. Une distribution sur $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. La continuité indique que pour tout $R > 0$, il existe un entier $M(R) \in \mathbb{N}$ et une constante $C(R) > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_R(\mathbb{R}^d), \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C(R) \sum_{|\alpha|\leq M(R)} \sup_x |\varphi^{(\alpha)}(x)| = C(R)\|\varphi\|_{C^{M(R)}(\mathbb{R})}.$$

Si on peut prendre $M(R) = M$ pour tout rayon R, alors la distribution T est dite d'ordre M (noter que la constante $C(R)$ peut, elle dépendre du rayon R).

Proposition 53. *Définissons la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ d'une suite de fonctions test $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de façon similaire à la Définition 29, en remplaçant les intervalles $[-a, a]$ par les boules $B(0, R)$:*

i) il existe une boule $B(0, R)$ contenant le support de chaque fonction φ_n ;

ii) pour tout $M \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_n - \varphi\|_{C^M} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Alors une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution si et seulement si, pour toute suites convergente $(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, elle vérifie $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.

Comme dans le cas uni-dimensionnel (v. la Proposition 32), les distributions sur $\mathbb{R}^d$ peuvent s'obtenir comme des *limites faibles* de suites de fonctions $(f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d))_{k\geq 1}$. Autrement dit, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ il existe une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, les intégrales

$$\langle T_{f_k}, \varphi\rangle = \int f_k(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ convergent vers } \langle T, \varphi\rangle \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Comme on est en dimension d, l'opération de dérivation est remplacée par celle de dérivée partielle.

Définition 54. Soit T une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $j = 1, \dots, d$, la dérivée partielle de T dans la direction x_j, notée $\frac{\partial}{\partial x_j} T = \partial_j T$, est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \frac{\partial}{\partial x_j} T, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle.$$

En itérant cette opération, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, la dérivée α-ième de T est définie comme la distribution $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \rangle.$$

Le fait que $\partial_j T$ est continue se vérifie aisément : si une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \partial_j T, \varphi_n \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi_n \rangle.$$

Or, la convergence de $(\varphi_n)_n$ vers φ implique la convergence de la suite $(\partial_j \varphi_n)_n$ vers $\partial_j \varphi$ (noter que le support de $\partial_j \varphi_n$ est inclus dans celui de φ_n), et donc par continuité de T,

$$\langle \partial_j T, \varphi_n \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} -\langle T, \partial_j \varphi \rangle = \langle \partial_j T, \varphi \rangle.$$

Ceci montre la continuité de la forme linéaire $\partial_j T$.

Enfin, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ peut être multipliée par une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, exactement comme dans le cas unidimensionnel :

Définition 55. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors la distribution fT est définie comme suit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle,$$

en remarquant que $f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et que $\mathrm{supp}(f\varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(f)$.

La continuité de fT s'obtient en contrôlant les normes C^M de $f\varphi$ en fonction de celles de φ, pour une fontion φ supportée dans $B(0, R)$. On utilise pour cela les formules de Leibniz multidimensionnelles (4.3), qui permettent de montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha (f\varphi)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{B(0,R)} \left|\partial^{\alpha-\beta} f\right| \sup_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\beta \varphi\right|.$$

En sommant sur les multi-indices $|\alpha| \leq M$ et en collectant tous les facteurs combinatoires et dépendant des normes de f sur $B(0, R)$

$$\|f\varphi\|_{C^M} \leq C_{M,R,f} \|\varphi\|_{C^M}.$$

On déduit donc, pour toute fonction φ supportée dans $B(0, R)$, que

$$|\langle fT, \varphi \rangle| \leq C_R \|f\varphi\|_{C^M} \leq C_R C_{M,R,f} \|\varphi\|_{C^M},$$

donc la continuité de fT.

Une autre opération, qu'on n'avait pas envisagée en dimension 1, est le changement de variable par un automorphisme linéaire.

4.2. **Exemples de distributions sur $\mathbb{R}^d$.**

(1) Les fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ fournissent des exemples simples de distributions. A une telle fonction est associée la distribution T_f définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Cette distribution est d'ordre 0.

(2) La distribution de Dirac en l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est également définie par :

$$\langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle = \varphi(0,0).$$

Cette distribution est supportée sur le singleton $\{(0,0)\}$.

(3) Comme on a plusieurs variables x_j, on peut imaginer des distributions agissant de façon plus singulière dans certaines variables que dans d'autres. Par exemple, la distribution de Dirac à l'origine dans la variables x_1, indépendant des autres variables, sera de la forme

$$\langle \delta_{\{x_1=0\}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(0, x_1, \dots, x_d)\, dx_2 \cdots dx_d.$$

Cette distribution est supportée sur l'hyperplan $\left\{x \in \mathbb{R}^d \,:\, x_1 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^d$.
On peut obtenir cette distribution à partir de la fonction $H_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} H(x_1)$, où $H(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ est la fonction de Heaviside. H_1 est donc la fonction caractéristique du demi-espace $\left\{x \in \mathbb{R}^d \,;\, x_1 \geq 0\right\}$. En dimension 1, la formule suivante reliait la fonction de Heaviside à la distribution de Dirac en l'origine :

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta_0.$$

Comme la fonction H_1 est indépendante des variables $x_2, \dots, x_d$, on peut adapter la formule ci-dessus à notre fonction H_1, et on montre a la formule de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T_{H_1} = \delta_{\{x_1=0\}}.$$

4.3. **Produit tensoriel de distributions.** Dans cette section on se restreindra essentiellement au cas $d = 2$. On définira le produit tensoriel de deux distributions T_1, T_2 agissant sur $\mathbb{R}$, pour former la distribution $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, chaque distribution T_i agissant sur la variable x_i. On commence par le cas de distributions définies par des fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

4.3.1. *Produit tensoriel de fonctions L^1_{loc}.* Plaçons-nous dans le cas $d = 2$, donc la variable de position $x = (x_1, x_2)$. A partir de 2 fonctions $f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on construit la fonction produit tensoriel $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$. Le théorème de Fubini nous dit que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, et pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on aura

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_1)\, f_2(x_2) \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Le théorème de Fubini nous dit que cette intégrale double peut se calculer en 2 étapes :

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) \left(\int f_2(x_2) \varphi(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) \, \langle T_{f_2}, \varphi(x_1, \cdot) \rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\, dx_1. \end{aligned}$$

Ici on a interprété l'intégrale interne comme l'action de la distribution $T_{f_2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sur la fonction $\varphi(x_1, \cdot)$, autrement dit la fonction φ dans laquelle on a gelé la variable x_1. Pour tout x_1, cette fonction $\varphi(x_1, \cdot)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, elle dépend de la variable x_2 : la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}$ a pour objectif de rappeler la variable sur laquelle on intègre. Comme la fonction $x_1 \mapsto \varphi(x_1, x_2)$

est dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, le théorème de dérivation sous l'intégrale montre que la fonction

$$x_1 \mapsto \int f_2(x_2)\varphi(x_1,x_2)\,dx_2 = \langle T_{f_2}, \varphi(x_1,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}$$

est également dans C_c^∞. L'intégrale externe peut donc être interprétée comme un crochet de distribution :

$$\begin{aligned}\langle T_f, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1)\,\langle T_{f_2}, \varphi(x_1,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\,dx_1 \\ &= \langle T_{f_1}, \langle T_{f_2}, \varphi(x_1,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

On appelle la fonction $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ le *produit tensoriel* de f_1 par f_2, et on la note $f = f_1 \otimes f_2$. On notera de même la distribution $T_f = T_{f_1} \otimes T_{f_2}$, produit tensoriel de T_{f_1} (distribution qui agit sur les fonctions de la variable x_1) et T_{f_2} (distribution qui agit sur les fonctions de la variable x_2).

On aurait aussi pu utiliser le théorème de Fubini dans le sens inverse :

$$\begin{aligned}\langle T_f, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_2(x_2)\left(\int f_1(x_1)\varphi(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_2(x_1)\,\langle T_{f_1}, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\,dx_2 \\ &= \langle T_{f_2}, \langle T_{f_1}, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dans le cas particulier où la fonction test est elle-même un produit tensoriel, ces deux expressions se simplifient : pour $\varphi(x_1,x_2) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)$, les deux intégrales se factorisent, et ont a :

$$\langle T_f, \phi_1 \otimes \phi_2\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T_{f_1}, \phi_1\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\langle T_{f_2}, \phi_2\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}.$$

4.3.2. *Produit tensoriel de distributions quelconques.* On considère maintenant deux distributions quelconques $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et on veut définir la distribution produit tensoriel $T = T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, on va généraliser les formules de la sous-section précédente. On veut donc faire agir T_1 sur la variable x_1, et T_2 sur la variable x_2. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on voudrait donc pouvoir définir, comme en (4.5) une distribution T par :

$$\langle T, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}, \tag{4.6}$$

Pour le faire, il faut vérifier que la fonction $\Phi_2 : x_2 \mapsto \langle T_1.\varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}$ est bien dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_1})$. C'est le contenu du résultat important suivant, qui généralise le théorème de dérivation sous l'intégrale.

Théorème 56. *[Dérivation sous le crochet] Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x_1})$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors la fonction $\Phi_2 : x_2 \mapsto \langle T_1, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}$ est dérivable, et sa dérivée vaut*

$$\Phi_2'(x_2) = \frac{d}{dx_2}\langle T_1, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} = \langle T_1, \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}, \tag{4.7}$$

et elle est à support compact. En itérant, on montre que Φ_2 est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_2})$, et on a pour tout ordre m :

$$\Phi_2^{(m)}(x_2) = \frac{d^m}{dx_2^m}\langle T_1, \varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} = \langle T_1, \frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\varphi(\cdot,x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}.$$

Démonstration. Comme φ est à support compact, il existe des intervalles $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset I_1 \times I_2$. Si $x_2 \in \mathbb{R} \setminus I_2$, la fonction $\varphi(\cdot, x_2)$ est identiquement nulle, donc $\Phi_2(x_2) = 0$. Cela montre que Φ_2 est à support compact. Montrons ensuite que Φ_2 est continue en tout point $x_2 \in I_2$. Pour cela, on fixe le point $x_2 \in I_2$, et on considère la famille de fonctions sur $\mathbb{R}_{x_1}$:

$$\psi_t(\cdot) = \varphi(\cdot, x_2 + t) - \varphi(\cdot, x_2), \qquad t \in [-1, 1].$$

On remarque que ψ_t est continue, et supportée dans I_1 pour tout t. Il est clair que ψ_t converge simplement vers la fonction nulle lorsque $t \to 0$. Par l'uniforme continuité de φ sur le compact $I_1 \times I_2$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe δ tel que si $|t| \leq \delta$, on aura $|\psi_t(x_1) - \psi_{t'}(x_1)| \leq \epsilon$ pour tout $x_1 \in I_1$, autrement dit la convergence $\psi_t \to 0$ est uniforme. Le même raisonnement s'applique, pour tout $m \in \mathbb{N}$, aux fonctions $\frac{d^m}{dx_1^m}\psi_t = \varphi(\cdot, x_2 + t) - \varphi(\cdot, x_2)$

$$\frac{d^m}{dx_1^m}\psi_t(x_1) = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^m}(x_1, x_2 + t) - \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^m}(x_1, x_2),$$

qui convergent donc uniformément vers la fonction nulle lorsque $t \to 0$. On a donc montré que la famille de fonctions $(\psi_t)_{t\in[-1,1]}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers la fonction nulle. Par conséquent, $\langle T_1, \psi_t\rangle \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \langle T_1, 0\rangle = 0$, donc $\Phi_2(x_2 + t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \Phi_2(x_2)$. On a donc montré la continuité de Φ_2 en un point quelconque $x_2 \in I_2$.

On procède de façon similaire pour montrer que Φ_2 est dérivable en tout point $x_2 \in I_2$. Pour cela, on considère, pour tout $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, la fonction

$$x_1 \mapsto \psi_t(x_1) = \frac{\varphi(x_1, x_2 + t) - \varphi(x_1, x_2)}{t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2). \tag{4.8}$$

Pour tout $t \neq 0$, cette fonction est supportée sur I_1. Pour tout x_1, elle vérifie $\psi_t(x_1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. La relation fondamentale de l'analyse

$$\varphi(x_1, x_2 + t) - \varphi(x_1, x_2) = t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1, x_2 + tu)\, du$$

montre que

$$\psi_t(x_1) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1, x_2 + tu) - \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1, x_2)\right] du.$$

La continuité uniforme de $\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi$ sur $I_1 \times I_2$ implique que l'intégrand converge uniformément vers zéro lorsque lorsque $t \to 0$, de sorte que $\psi_t \to 0$ uniformément p/r $x_1 \in I_1$. On peut appliquer ce même raisonnement aux fonctions $\frac{d^m}{dx_1^m}\psi_t(x_1)$, ce qui revient à remplacer φ par $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^m}$ dans l'expression (4.8). On trouve donc que ψ_t converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On utilise maintenant la linéarité de T_1 pour écrire le crochet

$$\begin{aligned}\langle T_1, \psi_t\rangle &= \frac{\langle T_1, \varphi(\cdot, x_2 + t)\rangle - \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2)\rangle}{t} - \langle T_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\cdot, x_2)\rangle \\ &= \frac{\Phi_2(x_2 + t) - \Phi_2(x_2)}{t} - \langle T_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\cdot, x_2)\rangle.\end{aligned}$$

La convergence $\psi_t \underset{t\to 0}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} 0$ implique que $\langle T_1, \psi_t\rangle \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui exprime exactement la dérivabilité de Φ_2 au point x_2, et la formule (4.7).

La dérivabilité aux ordres supérieurs de Φ_2 s'obtient par un simple argument de récurrence sur m. $\square$

Retour sur la construction de $T_1 \otimes T_2$. Le théorème ci-dessus montre que la fonction intermédiaire $\Phi_2(x_2) = \langle T_1.\varphi(\cdot, x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a donc le droit de définir

$$\langle T, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}} = \langle T_2, \Phi_2\rangle.$$

Cette expression dépend de façon linéaire de φ. Il reste à vérifier qu'on la contrôle en fonction d'une certaine norme de φ.

Pour cela, on remarque que les dérivées de Φ_2 sont bornées en fonction de celles de φ. En effet, comme $\varphi(\cdot, x_2)$ est supportée dans I_1 pour tout x_2, on a pour un certains $C_1 > 0, M_1 \in \mathbb{N}$:

$$\forall x_2 \in I_2, \qquad |\Phi_2(x_2)| \leq C_1 \|\varphi(\cdot, x_2)\|_{C^{M_1}(\mathbb{R}_{x_1})} \leq C_1 \|\varphi\|_{C^{M_1}(\mathbb{R}^2)}.$$

En appliquant la même formule aux dérivées $\partial^m_{x_2}\varphi(\cdot, x_2)$, pour orbtenir :

$$\forall x_2 \in I_2, \qquad |\Phi_2^{(m)}(x_2)| \leq C_1 \|\partial^m_{x_2}\varphi(\cdot, x_2)\|_{C^{M_1}(\mathbb{R}_{x_1})} \leq C_1 \|\varphi\|_{C^{M_1+m}(\mathbb{R}^2)}.$$

On obtient donc des bornes sur les normes $\|\Phi_2\|_{C^m(\mathbb{R}_{x_2})}$, en fonction des normes $\|\varphi\|_{C^{M_1+m}(\mathbb{R}^2)}$. En appliquant la distribution T_2 à la fonction Φ_2 supportée sur I_2, on a, pour certains $C_2 > 0, M_2 \in \mathbb{N}$, la borne :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^2}| = \left|\langle T_2, \Phi_2\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\right| &\leq C_2 \|\Phi_2\|_{C^{M_2}(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq C_2 C_1 \|\varphi\|_{C^{M_1+M_2}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Celle-ci achève de montrer que T, définie par (4.6), est une distribution.

Dans la section précédente, le théorème de Fubini nous indiquait que la distribution $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1 \otimes f_2}$ pouvait aussi s'exprimer comme $\langle T_{f_1}, \langle T_{f_2}, \varphi(x_1, \cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}$. En généralisant aux distributions T_1, T_2, on veut donc montrer que T est égale à la distribution $\tilde{T}$ définie par :

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}. \tag{4.9}$$

Pour montrer que $\tilde{T} = T$, on considère l'action des deux expressions sur les fonctions test de la forme $\varphi = \phi_1 \otimes \phi_2$. On trouve que

$$\begin{aligned} \langle T, \phi_1 \otimes \phi_2\rangle &= \langle T_2, \langle T_1, \phi_1(\cdot)\phi_2(x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}} \\ &= \langle T_2, \phi_2(x_2)\langle T_1, \phi_1(\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}} \\ &= \langle T_1, \phi_1(\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \langle T_2, \phi_2(\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé successivement la linéarité de T_1, et celle de T_2. Un calcul similaire montre que $\langle \tilde{T}, \phi_1 \otimes \phi_2\rangle$ donne la même expression, donc les distributions T et $\tilde{T}$ ont la même valeur lorsqu'on les applique aux fonctions test $\varphi = \phi_1 \otimes \phi_2$. Par linéarité, elles ont également la même valeur sur les combinaisons linéaires (finies) de telles fonctions, autrement dit sur l'espace produit tensoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_2})$. On invoque alors le résultat de densité :

Théorème 57. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_2}) = \{$combinaisons linéaires finies de fonctions produit tensorielϕ est dense dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration. [sketch] Supposons que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est supportée dans le rectangle $I_1 \times I_2$, et considérons un rectangle plus grand $I'_1 \times I'_2$, avec $I_i \Subset \mathring{I}'_i$. La fonction φ peut être approximée par une suite de polynômes $p_n(x_1, x_2)$, uniformément dans $I'_1 \times I'_2$. En fait, en choisissant un

ordre de dérivée $M \in \mathbb{N}$, on peut construire une suite $(p_{n,M})_{n\geq 1}$ telle que toutes les dérivées $\partial^\alpha p_{n,M}$ d'ordre $|\alpha| \leq M$ convergent vers $\partial^\alpha \varphi$, uniformément dans $I_1' \times I_2'$. On peut en extraire une sous-suite $(p_{n_k,M})_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \qquad \|p_{n_k,M} - \varphi\|_{C^M(I_1'\times I_2')} \leq 1/k.$$

Enfin, par le *processus d'extraction diagonale*, consistant à prendre $P_k = p_{n_k,k}$, on vérifie que pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq M$, on a

$$\|P_k - \varphi\|_{C^M(I_1'\times I_2')} = \|p_{n_k,k} - \varphi\|_{C^M(I_1'\times I_2')} \leq \|p_{n_k,k} - \varphi\|_{C^k(I_1'\times I_2')} \leq \frac{1}{k},$$

donc que la suite $(P_k)_{k\geq 1}$ est telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, les dérivées $\partial^\alpha P_k$ convergent vers $\partial^\alpha \varphi$, uniformément sur $I_1' \times I_2'$. On construit des fonctions plateau $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telles que $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset I_1'$, $\chi_i = 1$ sur I_i, et on définit les fonctions $\Phi_n(x_1, x_2) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)P_n(x_1, x_2)$. Les fonctions Φ_n sont supportées sur $I_1' \times I_2'$. Les formules de Leibniz, et le fait que P_n tend vera zéro uniformément dans les régions $I_1' \setminus I_1 \times I_2'$ et $I_1' \times I_2' \setminus I_2$ où les dérivées de $\chi_1\chi_2$ sont non nulles, montrent que $\partial^\alpha \Phi_n$ converge vers $\partial^\alpha \varphi$, uniformément sur $I_1' \times I_2'$, On a donc montré que $\Phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} \varphi$. Enfin, on remarque que chaque Φ_n est bien une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\chi_1(x_1)x_1^{k_1}\chi_2(x_2)x_2^{k_2}$, donc $\Phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}_{x_2})$. □

En reprenant les notations de la preuve du théorème ci-dessus, on a $\langle T, \Phi_n\rangle = \langle \tilde{T}, \Phi_n\rangle$ pour tout $n \geq 1$, et $\langle T, \Phi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$, $\langle \tilde{T}, \Phi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \tilde{T}, \varphi\rangle$, par continuité des distributions ; on en déduit donc $\langle \tilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, et donc $\tilde{T} = T$. On a donc obtenu la définition suivante :

Définition 58. Soit T_1, T_2 deux distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En faisant agir T_1 sur la coordonnée x_1, T_2 sur la coordonnée x_2, on construit la distribution produit tensoriel $T = T_1 \otimes T_2$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, qui vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \langle T, \varphi\rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot)\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} = \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}\rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}.$$

En particulier, T agit sur les fonctions test $\phi_1 \otimes \phi_2$ par $\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2\rangle = \langle T_1, \phi_1\rangle\langle T_2, \phi_2\rangle$.

4.3.3. *Exemples de produit tensoriel.*

(1) On a déjà vu que pour deux fonctions $f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, la distribution produit tensoriel $T_{f_1} \otimes T_{f_2} = T_{f_1\otimes f_2}$ est associée à la fonction $f_1 \otimes f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

(2) La distribution de Dirac $\delta_{(0,0)}$ sur l'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ peut être construite comme le produit tensoriel de $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par elle-même : $\delta_{(0,0)} = \delta_0 \otimes \delta_0$ (la première agit sur x_1, la seconde sur x_2).

(3) La distribution $\delta_{\{x_1=0\}}$ le long de la droite $\{(x_1 = 0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ est le produit tensoriel $\delta_0 \otimes 1$, où 1 est la distribution associée à la fonction constante sur $\mathbb{R}_{x_2}$. On peut généraliser cette distribution, par exemple en remplaçant 1 par f_2 (ou T_{f_2}), où $f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_{x_2})$, pour produire la distribution $\delta_0 \otimes T_{f_2}$. Celle-ci reste supportée sur la droite $\{x_1 = 0\}$.

Proposition 59. *Les dérivées partielles agissent sur les produits tensoriels de distributions comme elles le font sur les produits tensoriels de fonctions :*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T_1 \otimes T_2) = \frac{d}{dx_1} T_1 \otimes T_2, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes \frac{d}{dx_2} T_2.$$

Démonstration. En effet, en se restreignant aux fonctions produit tensoriel $\varphi = \phi_1 \otimes \phi_2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial}{\partial x_1}(T_1 \otimes T_2), \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} &= -\langle T_1 \otimes T_2, \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_1 \otimes \phi_2) \rangle_{\mathbb{R}^2} \\
&= -\langle T_1 \otimes T_2, \left(\frac{d}{dx_1}\phi_1\right) \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\
&= -\langle T_1, \frac{d}{dx_1}\phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \langle T_2, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}_{x_2}}. \\
&= \langle \frac{d}{dx_1} T_1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \langle T_2, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}_{x_2}} \\
&= \langle \left(\frac{d}{dx_1} T_1\right) \otimes T_2, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Dans la seconde égalité, on s'est servi du fait que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)) = \frac{d}{dx_1}\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)$. Dans la 3e, que $\left(\frac{d}{dx_1}\phi_1\right) \otimes \phi_2$ est une fonction produit tensoriel.

L'égalité étant vérifiée pour toutes les fonctions $\phi_1 \otimes \phi_2$, donc leurs combinaisons linéaires, on se sert du Thme 57 pour conclure à l'égalité pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

La preuve de la second égalité est totalement identique. □

4.4. **Une première EDP.** Sur l'espace des fonctions $C^1(\mathbb{R}^2)$, l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_{x_1} f = 0$$

admet comme solution les fonctions indépendantes de x_1, c'est-à-dire $f(x_1, x_2) = g(x_2)$, pour une certaine fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$, qui peut être arbitraire.

Essayons maintenant de résoudre cette équation dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, autrement dit on cherche les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation

$$\partial_{x_1} T = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{4.10}$$

On va se servir de l'analyse de l'EDO $T' = 0$ en dimension 1, effectuée dans la section 3.1.2. On va aussi se servir du théorème de densité 57, qui nous permet de nous restreindre aux fonctions test $\varphi = \phi_1 \otimes \phi_2$. On part donc de l'équation

$$0 = \langle \partial_{x_1} T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = -\langle T, \phi_1' \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Cette équation montre que tout fonction test de la forme $\phi_1' \otimes \phi_2$ est tuée par T. En reprenant les notations de la section 3.1.2, les fonctions ϕ_1' sont dans l'hyperplan $H \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions de "masse nulle". Ainsi, T s'annule sur les fonctions test dans $H \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Si maintenant on considère une fonction $\phi_1 \otimes \phi_2$, la décomposition (3.3) permet de décomposer ϕ_1 en

$$\phi_1 = \tilde{\phi}_1 + \chi_0 \langle 1, \phi_1 \rangle, \text{ avec } \tilde{\phi}_1 \in H. \tag{4.11}$$

(on rappelle que la fonction auxiliaire $\chi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a la propriété que $\langle 1, \chi_0 \rangle = 1$). Par linéarité, on aura donc

$$\begin{aligned}\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} &= \langle T, \tilde{\phi}_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= 0 + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

Une fois qu'on a fixé χ_0, l'application $\phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$. En effet, si ϕ_2 est supportée sur un intervalle I_2, alors $\chi_0 \otimes \phi_2$ sera distribuée dans une certaine boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$, donc pour certains C, M on aura la borne

$$|\langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}| \leq C \, \|\chi_0 \otimes \phi_2\|_{C^M(\mathbb{R}^2)} \leq C \, C_{\chi_0, M} \|\phi_2\|_{C^M(\mathbb{R})},$$

avec une constante $C_{\chi_0, M}$ dépendant des normes sup des dérivées d'ordre $\leq M$ de χ_0. Ici on a simplement utilisé le fait que

$$\partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} \chi_0(x_1) \phi_2(x_2) = \chi_0^{(k_1)}(x_1) \phi_2^{(k_2)}(x_2).$$

Appelons T^{χ_0} cette distribution : $\langle T^{\chi_0}, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

Remarque 60. L'application $T \mapsto T^{\chi_0}$ est la généralisation des intégrales partielles d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Le théorème de Fubini indique en effet que pour une telle fonction, l'intégrale partielle $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2) dx_1$ existe pour presque tout x_2, et définit une fonction $F_2 \in L^1(\mathbb{R}_{x_2})$. Si maintenant $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et $\chi_0 \in C_c(\mathbb{R})$, les intégrales partielles $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2) \chi_0(x_1) dx_1$ définissent une fonction $F_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_{x_2})$.

On a donc abouti à l'expression

$$\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \langle T^{\chi_0}, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}_{x_2}},$$

donc au fait que T agit sur les fonctions $\phi_1 \otimes \phi_2$ comme le produit tensoriel $1 \otimes T^{\chi_0}$ (je préfère ne pas noter T_1 la distribution associée à la fonction constante sur $\mathbb{R}$, puisque T_1 a été utilisée pour désigner une distribution quelconque sur $\mathbb{R}_{x_1}$).

En utilisant le résultat de densité du thme 57, on montre que l'identité $T = 1 \otimes T^{\chi_0}$ est valable sur toutes les fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Ici on a obtenu $T^{\chi_0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme "intégrale partielle" de T le long de la direction x_1, mais on ne sait pas *a priori* si on peut obtenir ainsi n'importe quelle distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrons que c'est le cas. Choisissons n'importe quelle distribution $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors il est simple de vérifier que la distribution $T \stackrel{\text{def}}{=} 1 \otimes T_2$ vérifie automatiquement l'équation (4.10) : en effet, la Proposition 59 montre que

$$\partial_1 (1 \otimes T_2) = \left(\frac{d}{dx_1} 1 \right) \otimes T_2 = 0 \otimes T_2 = 0.$$

On a donc montré que l'ensemble des solutions à (4.10) est donnée par les distributions $T = 1 \otimes T_2$, avec $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x_1})$ quelconque. Ces distributions "ne dépendant que de x_2" sont la généralisation naturelle des fonctions $f(x_1, x_2) = g(x_2)$ évoquées en début de section.

4.5. **Une EDP inhomogène.** Fixons une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, et considérons la version inhomogène de $\partial_{x_1} T = 0$, sous la forme

$$\partial_{x_1} T = S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{4.12}$$

On reprend le calcul comme dans la section précédente, c'est-à-dire qu'on se contente de prendre des fonctions test de la forme $\phi_1 \otimes \phi_2$. On aboutit donc à l'équation

$$\langle T, \psi_1' \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = -\langle S, \psi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{pour toutes } \psi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Si on prend maintenant une fonction $\phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque, celle-ci se décompose comme en (4.11), avec $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\Phi}_1'$; on peut donc écrire, par linéarité :

$$\begin{aligned} \langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} &= \langle T, \tilde{\phi}_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= -\langle S, \tilde{\Phi}_1 \otimes \phi_2 \rangle + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T, \chi_0 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Si on $\tilde{\Phi}_1 = Q(\phi_1)$ l'opération linéaire $\phi_1 \mapsto \tilde{\Phi}_1$ comme dans la section 3.1.3, on obtient alors

$$\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = -\langle S, Q(\phi_1) \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T^{\chi_0}, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Dans le cas où S est elle-même un produit tensoriel $S = S_1 \times S_2$, on peut alors écrire

$$\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = -\langle S_1, Q(\phi_1) \rangle_{\mathbb{R}} \langle S_2, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}} \langle T^{\chi_0}, \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}},$$

autrement dit

$$T = -\left(S_1 \circ Q\right) \otimes S_2 + 1 \otimes T^{\chi_0}. \tag{4.13}$$

Comme dans la section précédente, T^{χ_0} peut être n'importe quelle distribution $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4.6. **Une EDP d'ordre 2.** Considérons à présent l'EDP d'ordre 2 :

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} T = 0. \tag{4.14}$$

Si on suppose que T est une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, on obtient d'abord $\partial_{x_2} f = g(x_2)$ pour une fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$. Cette équation est résollue par

$$f(x_1, x_2) = G(x_2) + h(x_1),$$

où G est une primitive de g, et h est une fonction $C^2(\mathbb{R})$ arbitraire. Comme g est arbitraire dans $C^1(\mathbb{R})$, G est arbitraire dans $C^2(\mathbb{R})$.

Que se passe-t-il si on cherche à résoudre l'équation en $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$? La solution de la section précédente nous fournit la solution intermédiaire

$$\partial_{x_2} T = 1 \otimes T_2,$$

pour une certaine distribution $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En échangeant les rôles de x_1 et x_2, on est donc amenés à résoudre l'équation (4.12), avec $\tilde{S} = 1 \otimes T_2$. Comme $\tilde{S}$ est un produit tensoriel, la solution générale est alors

$$T = -S_1 \otimes (S_2 \circ Q) + T^{\chi_0} \otimes 1 = -1 \otimes (T_2 \circ Q) + T^{\chi_0} \otimes 1.$$

Cette expression est donc de la forme $\tilde{T} = \tilde{T}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{T}_2$, pour $\tilde{T}_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Inversement, on vérifie que toute distribution $\tilde{T}$ de ce type est bien solution de (4.14). On a donc montré la

Proposition 61. *L'ensemble des solutions, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, de l'EDP $\partial_{x_1}\partial_{x_2}T = 0$, est donnée par les distributions de la forme $T = T_1 \otimes 1 + 1 \otimes T_2$, avec $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ arbitraires.*

4.7. **Changement affine de coordonnées.** Lorsque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, on peut facilement procéder à un changement affine de coordonnées, $x \mapsto \kappa(x) = Ax + h$, avec $h \in \mathbb{R}^2$, $A \in GL_2(\mathbb{R})$. Ainsi, on notera la transformation $\kappa^* f(x) = f \circ \kappa(x)$. Lorsqu'on applique $f = T_f$ à une fonction test φ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle T_{f\circ\kappa}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \kappa(x)\, \varphi(x)\, dx \\
&= \int f(y)\, \varphi(\kappa^{-1}(y))\, J_{\kappa^{-1}}\, dy, \qquad \text{avec } J_{\kappa^{-1}} = |\det(A)|^{-1} \\
&= \langle T_f, J_{\kappa^{-1}}\varphi(\kappa^{-1}\cdot)\rangle.
\end{aligned}$$

Pour la 2e ligne on a appliqué le changement de variables $y = \kappa(x)$. Cette expression permet de généraliser l'action de κ sur n'importe quelle distribution.

Définition 62. Soit $\kappa(x) = Ax + h$ une transformation affine inversible sur $\mathbb{R}^2$. Alors, l'action de κ sur toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définit une distribution $\kappa^* T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \langle \kappa^* T, \phi\rangle = \langle T_f, J_{\kappa^{-1}}\varphi(\kappa^{-1}\cdot)\rangle,$$

avec $J_{\kappa^{-1}} = |\det(A)|^{-1}$.

Comment se comporte une telle transformation affine par rapport aux opérations de dérivation ? Supposons que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On peut alors, par la règle de chaîne, calculer :

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}\left(\kappa^* f\right)(x) &= \partial_{x_1}\left[f(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + h_1, A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + h_2)\right] \\
&= A_{11}\partial_1 f(Ax+h) + A_{21}\partial_2 f(Ax+h) \\
&= \left({}^tA\, (\nabla f)\, (\kappa(x))\right)_1,
\end{aligned}$$

où on a regroupé les dérivées dans un gradient (vecteur colonne), et ${}^tA$ est la transposée de la matrice A. En écrivant le même développement pour la dérivée $\partial_{x_1}\left(\kappa^* f\right)(x)$ et en regroupant le tout dans un gradient, on trouve donc

$$\nabla\left(\kappa^* f\right)(x) = {}^tA\, (\nabla f)\, (\kappa(x)) = \kappa^*\left[{}^tA\, (\nabla f)\right](x),$$

où ici l'action de κ sur le vecteur $\binom{g_1(x)}{g_2(x)}$ est juste donné par $\binom{g_1\circ\kappa(x)}{g_2\circ\kappa(x)}$.

Exemple 63. Prenons par exemple la transformation linéaire $\kappa(x) = Ax$, avec $A = {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\partial_1\left(\kappa^* T\right) = \kappa^*\left(\partial_1 T + \partial_2 T\right), \quad \partial_2\left(\kappa^* T\right) = \kappa^*\left(\partial_1 T - \partial_2 T\right).$$

Si on compose ces deux expressions, on trouve que

$$\begin{aligned}\partial_2\partial_1\left(\kappa^* T\right) &= \partial_2\left[\kappa^*\left(\partial_1 T+\partial_2 T\right)\right]\\ &= \partial_2\left[\kappa^*\left(\partial_1 T\right)\right]+\partial_2\left[\kappa^*\left(\partial_2 T\right)\right]\\ &= \kappa^*\left(\partial_1\partial_1 T-\partial_2\partial_1 T\right)+\kappa^*\left(\partial_1\partial_2 T-\partial_2\partial_2 T\right)\\ &= \kappa^*\left(\partial_1\partial_1 T-\partial_2\partial_2 T\right).\end{aligned}$$

En prenant $S=\kappa^* T$, on obtiendra

$$\left(\kappa^{-1}\right)^*\partial_2\partial_1 S=(\partial_1^2-\partial_2^2)(\kappa^{-1*}S) \tag{4.15}$$

Autrement dit, la transformation κ^{-1} permet de passer d'une solution S de l'EDP $\partial_2\partial_1 S=0$, à une solution $T=\kappa^{-1*}S$ de l'EDP

$$(\partial_1^2-\partial_2^2)T=0. \tag{4.16}$$

Si on interprète x_1 comme une coordonnée de position, et x_2 comme le temps, cette dernière équation est l'équation de d'Alembert (équation des cordes vibrantes). On calcule de $\kappa^{-1}(y)=A^{-1}y=\frac{1}{2}Ay$. Donc si S satisfait $\partial_2\partial_1 S=0$, alors la distribution $T=\kappa^{-1*}S$ satisfaira l'équation de d'Alembert.

Remarque 64. Si on remplace dans les expressions ci-dessus $\kappa=A$ par $\kappa^{-1}=A^{-1}=\frac{A}{2}$, ces expressions se transforment en $\partial_1\left(\kappa^{-1*}T\right)=\kappa^{-1*}\left(\frac{\partial_1 T+\partial_2 T}{2}\right)$, $\partial_2\left(\kappa^{-1*}T\right)=\kappa^{-1*}\left(\frac{\partial_1 T-\partial_2 T}{2}\right)$, et finalement en

$$\partial_2\partial_1\left(\kappa^{-1*}T\right)=\frac{1}{4}\kappa^{-1*}\left(\partial_1\partial_1 T-\partial_2\partial_2 T\right). \tag{4.17}$$

4.7.1. *Etude de l'équation de d'Alembert.* On a résolu dans la section 4.6 l'équation $\partial_2\partial_1 S=0$, par les expressions $S=T_1\otimes 1+1\otimes T_2$, avec $T_i\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ arbitraires. A travers la transformation linéaire A donnée dans l'exemple 63, on aboutit à la solution générale de l'équation de d'Alembert (4.16) : celle-ci est donnée par les distributions

$$T=\kappa^{-1*}S=(A^{-1})^*\left(T_1\otimes 1+1\otimes T_2\right),\ \text{avec } A^{-1}=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

En fait, le facteur $1/2$ entre A et A^{-1} n'est pas primordial, du fait que l'équation de d'Alembert est homogène par rapport au nombre de dérivées. En effet, si on applique une dilatation $\lambda(x)=\lambda x=\lambda Ix$, alors $\partial_i(\lambda^* T)=\lambda^*\left[\lambda\partial_i T\right]$, $\partial_i^2(\lambda^* T)=\lambda^2\lambda^*\left[\partial_i^2 T\right]$, donc si T satisfait l'équation de d'Alembert homogène, alors $\lambda^* T$ la satisfait également (on dit que cette équation est invariante par dilatation dans $\mathbb{R}^2$). Pour éviter de traîner les facteurs $1/2$, on va plutôt remplacer κ par κ^{-1}, autrement dit écrire, pour certaines distributions T_1, T_2, l'expression :

$$T=A^*\left(T_1\otimes 1+1\otimes T_2\right). \tag{4.19}$$

Peut-on écrire ces distributions différemment ? Si S_1 et S_2 sont des fonctions $f_1, f_2\in C^2(\mathbb{R})$, alors cette distribution prend la forme

$$f(x_1,x_2)=f_1(x_1+x_2)+f_2(x_1-x_2).$$

On retrouve ainsi la solution générale de l'équation de D'Alembert sur l'espace des fonctions $C^2(\mathbb{R}^2)$. Lorsqu'on fait agir le premier terme sur une fonction test produit tensoriel $\phi_1 \otimes \phi_2$, on obtient

$$\begin{aligned}\int f_1(x_1+x_2)\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\,dx_1dx_2 &\overset{Fubini}{=} \int \left(\int f_1(x_1+x_2)\phi_1(x_1)\,dx_1\right)\phi_2(x_2)\,dx_2\\ &= \int \left(\int f_1(y_1)\phi_1(y_1-x_2)\,dy_1\right)\phi_2(x_2)\,dx_2\\ &= \int \langle T_{f_1}, \phi_1(\cdot - x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \phi_2(x_2)\,dx_2.\end{aligned}$$

On réécrit le crochet interne

$$\langle T_{f_1}, \phi_1(\cdot - x_2)\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \overset{\text{def}}{=} \langle (x_2)^* T_{f_1}, \phi_1\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}},$$

en définissant au passage l'action d'une translation par $x_2 \in \mathbb{R}$ sur la distribution $T_{f_1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

Définition 65. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}$, la translation de T par le vecteur v est définie par $\langle v^*T, \phi\rangle = \langle T, \phi(\cdot - v)\rangle$. En particulier, si $T = T_f$ pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $v^*T_f = T_{f(\cdot+v)}$.

4.7.2. *Solution d'une EDP comme distribution 1d dépendant du temps.* On peut donc écrire la distribution $A^*(T_{f_1} \otimes 1)$ agissant sur les produits tensoriels comme :

$$\langle A^*(T_{f_1} \otimes 1), \phi_1 \otimes \phi_2\rangle_{\mathbb{R}^2} = \int \langle (x_2)^* T_{f_1}, \phi_1\rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \phi_2(x_2)\,dx_2. \tag{4.20}$$

Par cette écriture, on peut interpréter cette distribution $A^*(T_{f_1} \otimes 1) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ comme une fonction continue à valeur dans les distributions sur $\mathbb{R}$:

$$x_2 \in \mathbb{R} \mapsto (x_2)^* T_{f_1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x_1}).$$

On sait que pour $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, les translations $v \in \mathbb{R} \mapsto f_1(\cdot + v) \in L^1(\mathbb{R})$ sont continues dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$. On trouve la même chose si on remplace T_{f_1} par une distribution $S_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quelconque :

Proposition 66. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors la fonction $v \in \mathbb{R} \mapsto v^*T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Montrons que lorsque $v \to 0$, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la famille de fonctions $(\varphi(\cdot - v))_{v\in[-1,1]}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $v \to 0$. On voit déjà que pour $v \in [-1,1]$, les $\varphi(\cdot - v)$ sont toutes supportées dans l'intervalle $[-a-1, a+1]$ si φ est supportée dans $[-a, a]$. Par continuité uniforme de φ, $\|\varphi - \varphi(\cdot - v)\|_{C^0} \xrightarrow[v\to 0]{} 0$, et c'est aussi le cas pour toutes les dérivées $\varphi^{(k)}$. Cette convergence $\varphi(\cdot - v) \xrightarrow[v\to 0]{\mathcal{D}} \varphi$ implique que $\langle T, \varphi(\cdot - v)\rangle \xrightarrow[v\to 0]{\mathcal{D}} \langle T, \varphi\rangle$, autrement dit $\langle v^*T, \varphi\rangle \xrightarrow[v\to 0]{\mathcal{D}} \langle T, \varphi\rangle$. Cela montre que les distributions $v^*T \xrightarrow[v\to 0]{\mathcal{D}} T$. On a donc montré la continuité de la fonction ci-dessus en $v = 0$. La continuité en tout point v_0 se montre en appliquant le raisonnement ci-dessus à la distribution v_0^*T, et en remarquant que $(v_0 + v)^*T = v^*(v_0^*T)$. □

Reprenons le premier terme $A^*(T_1 \otimes 1)$ de notre solution générale, avec $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quelconque. On peut approcher T_1 (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par une suite de fonctions $(f_n \in C^2(\mathbb{R}))_n$. En appliquant l'identité (4.20) à ces fonctions et en prenant la limite $n \to \infty$, on voit que le membre de gauche

converge vers $\langle A^*(T_1 \otimes 1), \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}$. En effet, $T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_1$, donc $T_{f_n} \otimes 1 \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)} T_1 \otimes 1$. D'un autre côté, pour chaque $x_2 \in \operatorname{supp} \phi_2$, les crochets

$$\langle (x_2)^* T_{f_n}, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} = \langle T_{f_n}, \phi_1(\cdot - x_2) \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T_1, \phi_1(\cdot - x_2) \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} = \langle (x_2)^* T_1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}.$$

Lorsque $x_2 \in \operatorname{supp} \phi_2$, les fonctions translatées $\phi_1(\cdot - x_2)$ sont supportées sur un intervalle commun. D'autre part, leurs normes C^k sont toutes identifiques. Cela montre que les crochets $\langle T_1, \phi_1(\cdot - x_2) \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}}$ sont bornés uniformément p/r $x_2 \in \operatorname{supp} \phi_2$. Le TCL montre alors que le membre de droite converge :

$$\int \langle (x_2)^* T_{f_n}, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \phi_2(x_2)\, dx_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \langle (x_2)^* T_1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \phi_2(x_2)\, dx_2.$$

Par ce procédé d'approximation, l'identité (4.20) se généralise donc à la distribution T_1 :

$$\langle A^*(T_1 \otimes 1), \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \int \langle (x_2)^* T_1, \phi_1 \rangle_{\mathbb{R}_{x_1}} \phi_2(x_2)\, dx_2.$$

La distribution $A^*(T_1 \otimes 1) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ peut donc se réécrire comme une fonction continue à valeurs dans les distributions 1d :

$$x_2 \in \mathbb{R} \mapsto (x_2)^* T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

On montre de même que le second membre $A^*(1 \otimes T_2) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ se réécrit comme la fonction continue

$$x_2 \in \mathbb{R} \mapsto (-x_2)^* T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Cette interprétation d'une distribution 2d en une famille continue de distributions 1d est pertinente si on prend comme coordonnée $x_2 = t$ la variable temporelle, et $x_1 = x$ la variable spatiale. A partir de la solution T de

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) T = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \tag{4.21}$$

on a construit les distributions 1d dépendant continûment du temps

$$t \mapsto T(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^* T_1 + (-t)^* T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x). \tag{4.22}$$

Montrons que $T(t)$ vérifie l'équation de d'Alembert en un sens un peu différent qu'au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, on montre la

Proposition 67. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t^* T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est C^∞. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{d^k}{dt^k}(t^* T) = t^* \left(T^{(k)} \right).$$

Démonstration. Le théorème de dérivation sous le crochet montre que

$$\frac{d}{dt} \langle t^* T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{d}{dt} \varphi(\cdot - t) \rangle = -\langle T, \varphi'(\cdot - t) \rangle = \langle T', \varphi(\cdot - t) \rangle = \langle t^* T', \varphi \rangle,$$

ce qui nous mène à la formule

$$\frac{d}{dt}(t^* T) = t^* (T').$$

On peut itérer cette formule, montrant la formule indiquée dans l'énoncé. □

Equipé de cette propriété, la solution $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ donnée par (4.22) résout l'équation de d'Alembert dans un sens différent de celui de (4.21) : pour tout $t \in \mathbb{R}$, la dérivée seconde de $t \mapsto T(t)$ (qui définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$) est égale à la dérivée seconde (spatiale) de $T(t)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^2}{dt^2}T(t) = T(t)'' \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x).$$

Il s'agit d'un sens différent (et plus précis) que le sens initial (4.21), puisqu'on n'est pas obligé d'intégrer sur une fonction test $\phi_2(t)$ pour donner un sens à la solution.

4.7.3. *Problème de Cauchy pour l'équation de d'Alembert.* La solution (4.22) de l'équation de d'Alembert permet de définir la distribution initiale (au temps $t = 0$), ainsi que la dérivée temporelle initiale de $T(t)$:

$$T(0) = T_1 + T_2, \quad \frac{d}{dt}T(0) = T_1' - T_2' = (T_1 - T_2)'.$$

Ces données initiales (appelées données de Cauchy) permettent de reconstruire la solution globale $T(t)$, aussi bien dans le futur que dans le passé. En effet, d'après la Prop. 35, la donnée de $(T_1 - T_2)' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nous fournit une famille à un paramètre de primitives, égales à $T_1 - T_2 + C$ avec une constante $C > 0$ arbitraire. En combinant cette primitive avec $T(0)$, on trouve alors les distributions

$$\tilde{T}_1 = \frac{(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2 + C)}{2} = T_1 + \frac{C}{2}, \quad \tilde{T}_2 = \frac{(T_1 + T_2) - (T_1 - T_2 + C)}{2} = T_2 - \frac{C}{2},$$

qui fournissent la solution globale

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{T}(t) = t^* \left(T_1 + \frac{C}{2}\right) + (-t)^* T_2 - \frac{C}{2} = T(t).$$

Retrouver l'unique solution $T(t)$ à partir des données initiales $T(0)$, $\frac{d}{dt}T(0)$, s'appelle **résoudre le problème de Cauchy** pour l'EDP (4.21). On a donc montré le résultat suivant pour ce problème de Cauchy de l'équation de d'Alembert.

Théorème 68. *Pour des données de Cauchy arbitraires $T_0, \tilde{T}_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction C^2 $t \in \mathbb{R} \mapsto T(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisfaisant l'équation de d'Alembert (4.21) avec conditions initiales $T(0) = T_0$, $\frac{d}{dt}T(0) = \tilde{T}_0$. Cette solution est construite par le procédé ci-dessus.*

Exemple 69. Prenons $T_0 = \delta_0$, $\tilde{T}_0 = 0$. Alors, $T_1 + T_2 = \delta_0$, $(T_1 - T_2)' = 0$, ce qu'on peut résoudre par $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}\delta_0$. La solution $T(t)$ est donc donnée par

$$T(t) = \frac{1}{2}\left(\delta_t + \delta_{-t}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La solution décrit une somme de deux pics de Dirac se propageant à vitesse unité, respectivement vers la droite et vers la gauche.

En inversant les rôles de T_0 et $\tilde{T}_0$, on obtient une solution très différente.

Exemple 70. Prenons $T_0 = 0$, $\tilde{T}_0 = \delta_0$. On aura alors $T_2 = -T_1$, et $(T_1 - T_2)' = 2T_1' = \delta_0$. On peut prendre comme primitive $T_1 = \frac{1}{2}H$, avec $H(t) = \mathbb{1}_{R_+}(t)$ la fonction de Heaviside. On obtient alors pour $T(t)$ la fonction

$$T(t,x) = \frac{1}{2}\left(H(x+t) - H(x-t)\right). \tag{4.23}$$

Cette fonction vaut $1/2$ dans le quadrant supérieur $\{|x| < t\}$, elle vaut $-1/2$ dans le quadrant inférieur $\{t < -|x|\}$, et s'annule dans les deux quadrants latéraux.

4.8. **Solution fondamentale de l'équation de d'Alembert.** Ci-dessus on a résolu en toute généralité l'équation de d'Alembert homogène (c'est-à-dire sans terme source). Pour résoudre l'équation avec un terme source,

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right) T = S,$$

avec S une distribution aussi générale que possible dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, on va chercher une solution fondamentale à l'équation de d'Alembert, autrement dit une solution de

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right) T = \delta_{(0,0)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{4.24}$$

Il n'y a, bien sûr, pas une unique solution à cette équation. On va chercher une solution causale, c'est-à-dire qui est nulle dans le demi-espace-temps $\mathcal{E}_- = \{(t,x)\,;\, t < 0\}$. La proposition ci-dessous montre que si elle existe, cette solution causale est unique.

Proposition 71. *Supposons qu'une solution (4.22) de l'équation de d'Alembert homogène s'annulle pour tout $t < 0$. Alors cette solution est identiquement nulle.*

Démonstration. En effet, cette solution vérifie, entre autres, au temps $t = -1$, $T(-1) = 0$ et $\frac{d}{dt}T(-1) = 0$. En appliquant le Théorème 68 avec ces données de Cauchy nulles au temps $t = -1$, on trouve la solution nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Pour obtenir la solution causale de (4.24), on va choisir soigneusement nos distributions T_1 et T_2 dans (4.22) formant une solution de l'équation homogène, et on va tuer la solution $T(t)$ dans le demi-espace-temps $\{t < 0\}$. Cette troncature va occasionner l'apparition du terme source $\delta_{(0,0)}$. Comme ce terme est localisé sur $\{x = 0\}$, il est nécessaire que lorsque $t \searrow 0$, la distribution $T(t)$ se localise de plus en plus proche de $x = 0$. On va considérer l'Ansatz suivant :

Hypothèse 72. *Partons de la solution (4.23) de l'équation homogène, et tronquons-la dans le demi-espace temps futur $\{t > 0\}$.*

Pour supprimer la composante de T dans le quadrant inférieur, on multiplie T par $H(t)$ (on peut le faire parce que T est une fonction en (t,x)). On obtient alors la fonction tronquée

$$\tilde{T}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} H(t)\left(H(x+t) - H(x-t)\right). \tag{4.25}$$

On peut également tuer le quadrant $\{t < -|x|\}$ en multipliant T par $H(x+t)$:

$$\tilde{T}(x,t) = H(x+t)\left(H(x+t) - H(x-t)\right) = H(x+t) - H(x-t)H(x+t).$$

Il nous faut calculer $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\tilde{T}$ au sens des distributions. On pourrait le faire directement en appliquant l'opérateur $(\partial_t^2 - \partial_x^2)$ à la distribution ci-dessus. Mais une façon plus simple de procéder est d'opérer le changement de variable (4.19) inverse pour repasser à la distribution S dans les variables (x_1, x_2). A travers le changement de variable A^{-1}, on obtient la fonction $\tilde{S} = (A^{-1})^* \tilde{T} = \frac{1}{2}H(x_1) - \frac{1}{2}H(x_2)H(x_1)$. Si on applique l'opérateur $\partial_1\partial_2$ à cette distribution, on obtient

$$\partial_1\partial_2\tilde{S} = -\frac{1}{2}\partial_1\delta_{x_2=0}H(x_1) = -\frac{1}{2}\delta_{(0,0)}.$$

Le calcul fait dans la Remarque 64 nous fournit l'équation suivante sur la distribution $\tilde{T}$

$$\begin{aligned}\left(\partial_1^2 - \partial_2^2\right)\tilde{T} &= 4A^*\left(\partial_2\partial_1\tilde{S}\right)\\ &= -2A^*\delta_{(0,0)} = -\frac{2}{|\det A|}\delta_{(0,0)} = -\delta_{(0,0)},\end{aligned}$$

en se servant du fait que $\langle A^*\delta_{(0,0)}, \varphi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle\delta_{(0,0)}, \varphi(A^{-1}\cdot)\rangle = \frac{1}{|\det A|}\varphi(0,0)$. Au final, la distribution $\tilde{T}$ vérifie l'équation voulue (en rétablissant les notations (x,t) pour les variables) :

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\tilde{T} = \delta_{(0,0)}.$$

4.9. **Convolution des distributions.** Revenons à l'équation inhomogène générale $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\,T = S$. Pour la résoudre, on va se servir de la convolution des distributions, et de la solution fondamentale exhibée ci-dessus. Nous commençons par rappeler la convolution de deux fonctions sur $\mathbb{R}$.

4.9.1. *Convolution de deux fonctions sur* $\mathbb{R}$. Rappelons la définition de la convolution de deux fonctions $f, g \in C_c(\mathbb{R})$:

$$\text{pour p.t. } x \in \mathbb{R}, \qquad f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy.$$

En voyant f, g comme des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut réécrire leur action sur $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme :

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi\rangle &= \int\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx\\ &\overset{Fubini}{=} \int f(x-y)g(y)\,\varphi(x)\,dxdy\\ &= \int f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dxdy.\end{aligned}$$

Cette dernière expression peut s'interpréter comme l'action de la distribution $T_f \otimes T_g$ sur la fonction $(x,y) \mapsto \varphi(x+y)$. Cette dernière n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ car elle n'est pas à support compact. Cependant, comme f, g sont à supports compacts, T_f et T_g le sont aussi, ainsi que $T_f \otimes T_g$. On peut donc appliquer la distribution $T_f \otimes T_g$ à toute fonction $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, donc en particulier à la fonction $\varphi(x+y)$. A partir des deux distributions à support compact T_f, T_g, on a fabriqué une forme linéaire $T_f * T_g$ agissant sur φ par $\langle T_f \otimes T_g, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^2_{x,y}}$.

4.9.2. *Convolution de deux distributions sur* $\mathbb{R}$.

Définition 73. Prenons $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (distribution à support compact). On définit alors la distribution sur $\mathbb{R}$ agissant sur $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $\langle T_1 * T_1, \varphi\rangle_{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \langle T_1 \otimes T_2, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^2_{x,y}}$.

Démonstration. Comme T_2 et φ sont à support compact, la fonction $x \mapsto \langle T_2, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}$ est C^∞ et à support compact, dépendant des supports de T_2 et φ. Sa norme sup est contrôlée par $C_2\|\varphi\|_{C^{m_2}}$, et $m_2 \in \mathbb{N}$. En utilisant la dérivation sous le crochet, on trouve que sa norme C^k est contrôlée par $C_{2,k}\|\varphi\|_{C^{m_2+k}}$. En appliquant la distribution T_1 à cette fonction $\langle T_2, \varphi(x-\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}$, on obtient que

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^2_{x,y}} = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\rangle_{\mathbb{R}_x}$$

est contrôlé par $C_1\|\varphi\|_{C^{m_2+m_1}}$. □

Remarque 74. Il est important qu'une des deux distributions soit à support compact. Cela pourrait être T_1 au lieu de T_2 : dans ce cas, la fonction $x \mapsto \langle T_2, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}$ est lisse mais n'est plus à support compact. Par contre, comme T_1 est à support compact, l'expression $\langle T_1, \langle T_2, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\rangle_{\mathbb{R}_x}$ garde un sens.

Proposition 75. *La convolution est commutative : pour deux distributions T_1, T_2 sur $\mathbb{R}$ dont une est à support compact, on a $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$. D'autre part, la dérivée de la distribution convoluée est donnée par $(T_1 * T_2)' = T_1' * T_2 = T_1 * T_2'$.*

Démonstration. La double expression du produit tensoriel (th. de Fubini pour les distributions) nous dit que

$$\begin{aligned}
\langle T_1 \otimes T_2, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^2_{x,y}} &= \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\rangle_{\mathbb{R}_x} && (4.26)\\
&= \langle T_2, \langle T_1, \varphi(y+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_x}\rangle_{\mathbb{R}_y} && (4.27)\\
&= \langle T_2, \langle T_1, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\rangle_{\mathbb{R}_x}\\
&= \langle T_2 \otimes T_1, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^2_{x,y}},
\end{aligned}$$

où la 2e égalité vient du thme de Fubini, la 3e d'un échange sur le nom des variables.
Que se passe-t-il lorsqu'on dérive la distribution convoluée ? Rappelons que pour deux fonctions $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a pour tout x :

$$\frac{d}{dx}\left(f_1 * f_2\right)(x) = f_1' * f_2(x) = f_1 * f_2'(x).$$

Dans le cas de deux distributions T_1, T_2, on a pour toue fonction test φ :

$$\begin{aligned}
\langle (T_1 * T_2)', \varphi\rangle &= -\langle T_1 * T_2, \varphi'\rangle\\
&= -\langle T_1, \langle T_2, \varphi'(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\langle_{\mathbb{R}_x}\\
&= \langle T_1, \langle T_2', \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\langle_{\mathbb{R}_x}\\
&= \langle T_1 * T_2', \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

où à la deuxième ligne on a utilisé l'expression (4.26) pour le produit tensoriel. En utilisant (4.27), on aboutit similairemen à l'expression $(T_1 * T_2)' = T_1' * T_2$. □

Proposition 76. *La convolution par la distribution de Dirac en un point $v \in \mathbb{R}$ revient à une translation par $-v$:*

$$\forall T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \forall v \in \mathbb{R}, \quad T_1 * \delta_v = (-v)^* T_1.$$

En particulier, $T_1 * \delta_0 = T_1$.

4.9.3. *Régularisation par convolution.* Si on prend pour T_2 un noyau de convolution $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tel que $\int \chi\, dx = 1$, alors $T_1 * \chi$ est une fonction lisse :

$$\begin{aligned}\langle T_1 * \chi, \varphi(x+y)\rangle &= \langle T_1, \langle \chi, \varphi(x+\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_y}\rangle_{\mathbb{R}_x} \\ &= \langle T_1, \int \chi(y)\varphi(x+y)\, dy\rangle_{\mathbb{R}_x} \\ &= \langle T_1, \int \chi(z-x)\varphi(z)\, dz\rangle_{\mathbb{R}_x} \\ &= \int \langle T_1, \chi(z-x)\rangle_{\mathbb{R}_x}\varphi(z)\, dz.\end{aligned}$$

Dans la dernière étape on a utilisé un théorème d'intégration sous le crochet. La dernière expression indique que la distribution $T_1 * \chi$ est donnée par la fonction $z \mapsto \langle T_1, \chi(z-\cdot)\rangle_{\mathbb{R}_x}$, qui est lisse d'après le théorème de dérivation sous le crochet.

Théorème 77. *[Intégration sous le crochet] Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors, la fonction $y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ est lisse et à support compact, donc elle est intégrable. Son intégrale*

$$\int \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle_{\mathbb{R}_x}\, dy = \langle T, \int \varphi(\cdot, y)\, dy\rangle_{\mathbb{R}_x}. \tag{4.28}$$

Démonstration. On peut approximer T par des fonctions $f_n \in C_c(\mathbb{R})$, et écrire $\int f_n(x)\varphi(x,y)\, dxdy$ de deux manières en utilisant Fubini :

$$\int \left(\int f_n(x)\varphi(x,y)\, dx\right) dy = \int f_n(x) \left(\int \varphi(x,y)\, dy\right) dx,$$

puis montrer la convergence de chaque membre vers les deux membres de (4.28). □

On a donc montré le théorème de régularisation suivant :

Théorème 78. *Soit $(\chi_n)_n$ une suite de fonctions C_c^∞ convergeant vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, les fonctions de convolution $T * \chi_n(z) = \langle T, \chi_n(z-\cdot)\rangle$ sont lisses, et convergent vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T * \chi_n, \varphi\rangle = \langle T, \int \chi_n(z-x)\varphi(z)\, dz\rangle = \langle T, \int \hat{\chi}_n(x-z)\varphi(z)\, dz\rangle = \langle T, \hat{\chi}_n * \varphi\rangle,$$

où $\hat{\chi}_n(x) = \chi_n(-x)$ définit aussi une suite convergeant vers δ_0. On montre que $\hat{\chi}_n * \varphi$ converge vers $\varphi = \delta_0 * \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, de sorte que $\langle T, \hat{\chi}_n * \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$. La preuve que $\hat{\chi}_n * \varphi \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$ est standard. On montre d'abord les fonctions $\chi_n * \varphi$ sont supportées dans un même intervalle, puis que les normes sup de $\chi_n * \varphi - \varphi$ tend vers zéro, puis la même chose pour les dérivées de φ. □

4.9.4. *Convolution de distributions sur $\mathbb{R}^2$, et application à l'équation de d'Alembert inhomogène.* On peut définir la convolution de deux distributions sur $\mathbb{R}^2$ en se servant du produit tensoriel $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, qui est dense dans les distributions sur $\mathbb{R}^4$. La définition est similaire à la Définition 73 :

Définition 79. Prenons $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ (distribution à support compact sur $\mathbb{R}^2$). On définit alors la distribution sur $\mathbb{R}^2$ agissant sur $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par $\langle T_1 * T_1, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^2} \overset{\text{def}}{=} \langle T_1 \otimes T_2, \varphi(x+y)\rangle_{\mathbb{R}^4_{x,y}}$, où chaque coordonnée x, y est dans $\mathbb{R}^2$.

Cette convolution satisfait également les propriétés de la Proposition 75, cette fois-ci vis-à-vis des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$:

$$\partial^\alpha (T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2).$$

De même, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la convolution de T_1 par le Dirac δ_v revient à appliquer la translation $-v$ à T_1.

Revenons à notre solution fondamentale $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie en (4.25), qu'on interprète comme une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Elle satisfait $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\tilde{T} = \delta_{(0,0)}$. Si on se donne $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ une distribution à support compact quelconque, alors la distribution $T_S = \tilde{T} * S$ satisfait :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\left(\tilde{T} * S\right) &= \left[\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\tilde{T}\right] * S \\ &= \delta_{(0,0)} * S \\ &= S,\end{aligned}$$

donc cette distribution satisfait l'équation de d'Alembert inhomogène

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right) T_S = S.$$

Remarquons que $\tilde{T}$ n'est pas à support compact, c'est pourquoi on doit supposer que S est à support compact pour pouvoir définir la convolution $\tilde{T} * S$. Que peut-on dire de la distribution $\tilde{T} * S$? Les règles de support des convoluées sont identiques à celles des convoluées de fonctions :

Proposition 80. *Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ et $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Alors le support de la distribution $T_1 * T_2$ satisfait :*

$$\operatorname{supp}(T_1 * T_2) \subset \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2) = \{x + y : x \in \operatorname{supp}(T_1), y \in \operatorname{supp}(T_2)\}.$$

Comme $\operatorname{supp}(\tilde{T}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq t\} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{Q}_+$ le quadrant (fermé) supérieur, on voit que $\operatorname{supp}(T_S)$ est inclus dans l'union des quadrants $\operatorname{supp}(S) + \mathcal{Q}_+ = \bigcup_{x \in \operatorname{supp}(S)} (x + \mathcal{Q}_+)$.

Remarque 81. Le quadrant $\mathcal{Q}_+$ est appelé le "cône causal positif", il décrit ous les points de l'espace-temps $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ accessibles, dans le futur, à partir de l'origine $(0,0)$, en suivant des chemins de vitesses $|v| \leq 1$.

5. Transformée de Fourier et application aux EDP

La transformation de Fourier (TF) sur $\mathbb{R}^d$ est une opération linéaire transformant une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ en une autre fonction $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On s'intéressera à l'interaction entre transformée de Fourier et dérivation, donc pour commencer on supposera notre fonction f lisse. L'intérêt principal de la TF est qu'elle conjugue l'opération de dérivation en l'opération de multiplication par un monôme ; ainsi, une EDP à coefficients constants est transformée en une équation fonctionnelle qu'il est en général plus simple de résoudre. Enfin, la transformée de Fourier peut être inversée, ce qui permet de revenir aux solutions de l'EDP initiale, à partir des solutions de l'équation fonctionnelle.

On présentera essentiellement la TF en dimension 1, les preuves étant facilement adaptables à la dimension d.

5.1. **Définition de la transformée de Fourier et propriétés élémentaires.** Partons de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La TF de f est la fonction $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\, dx.$$

Il est clair que l'intégrale est bien définie, et qu'elle dépend de façon linéaire de la fonction f.

La fonction $\hat{f}$ est alors bornée :

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} = \sup_\xi |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

Comme l'integrand est continu p/r ξ et est dominé par $|f|$, le théorème de continuité sous l'intégrale montre que $\hat{f}$ est continue en tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$ est à support compact $\subset B(0,R)$. Lorsqu'on dérive l'intégrand p/r ξ, on obtient :

$$\partial_{\xi_j}\left(f(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\right) = -ix_j f(x)\, e^{-i\xi\cdot x},$$

qui reste dans $L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$, bornée par $|x_j f(x)| \leq R|f(x)|$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale montre donc que $\mathcal{F}(f)$ est dérivable, et que

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} -ix_j f(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\, dx = \mathcal{F}(-ix_j f)(\xi).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la fonction $\mathcal{F}(-ix_j f)$ est continue. Comme $x_j f$ est dans le même espace L^1_{comp} que f, on peut itérer ces opérations de dérivation, de sorte que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned} &\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f) \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f). \end{aligned} \tag{5.1}$$

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$ est donc lisse.

Inversement, supposons maintenant que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Une intégration par parties en x_j montre que :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \partial_{x_j} e^{-i\xi\cdot x}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, i\xi_j e^{-i\xi\cdot x}\, dx \\ &= i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).\end{aligned}$$

Autrement dit, la TF transforme une dérivée ∂_{x_j} en la multiplication par $i\xi_j$. Là encore, on peut itérer les dérivées p/r x, pour obtenir pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$:

$$\mathcal{F}(\partial_x^\beta f)(\xi) = i^{|\beta|}\xi^\beta \mathcal{F}(f). \tag{5.2}$$

On remarque que cette conjugaison entre dérivation et multiplication par un monôme s'accompagne par la multiplication par i ou $-i$.

Remarque 82. En mécanique quantique, on utilise l'opérateur "quantité de mouvement" $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$, qui est conjugué par la TF à la multiplication par ξ_j (la variable de Fourier ξ_j est interprétée comme la j-ième composante de la quantité de mouvement).

5.2. **Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz.** Au-dessus on a étudié l'action de la transformée de Fourier sur les fonctions $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$. Mais dans quel espace fonctionnel se trouve la fonction $\mathcal{F}(f)$?

5.2.1. *Définition de l'espace de Schwartz.* On a vu que si $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(f)$ est infiniment dérivable, et chacune de ses dérivées est bornée uniformément. Si de plus $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors toute dérivée $\partial_x^\beta f$ est encore dans L^1_{comp}, de sorte que $\xi^\beta \mathcal{F}(f)$ est bornée uniformément :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^\beta, \exists C_\beta > 0, \quad \sup_\xi \left|\xi^\beta \mathcal{F}(f)(\xi)\right| \leq C_\beta.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on remarque que le polynôme $(1+|\xi|^2)^N$ se développe en une somme de termes contenant des monômes ξ^β avec $|\beta| \leq 2N$:

$$(1+|\xi|^2)^N = \sum_{|\beta|\leq 2N} c_{\beta,N}\, \xi^\beta,$$

où les coefficients $c_{\beta,N}$ sont combinatoires. En sommant les bornes associées à chaque monôme ξ^β, on trouve un coefficient $C_{N,f}$ tel que

$$\begin{aligned}&\sup_\xi \left|(1+|\xi|^2)^N \mathcal{F}(f)(\xi)\right| \leq C_{N,f} \\ \iff &\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{C_{N,f}}{(1+|\xi|^2)^N}.\end{aligned}$$

Cette inégalité, valide pour tout $N \in \mathbb{N}$, montre que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est *à décroissance rapide* lorsque $|\xi| \to \infty$, elle décroît plus vite que l'inverse de n'importe quel polynôme. Pour montrer cette décroissance on s'est servi de la régularité C^∞ de f. La TF transforme une propriété de régularité de f, en une propriété de décroissance rapide à l'infini de $\mathcal{F}(f)$.

Comme f est à support compact, la fonctions $x^\alpha f$ est aussi dans C_c^∞, et on peut lui appliquer le raisonnement ci-dessus. Compte tenu de la relation (5.1), on obtient alors l'existence d'une constante $C_{N,x^\alpha f} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)| &\leq \frac{C_{N,x^\alpha f}}{(1+|\xi|^2)^N} \\ \Longleftrightarrow \left|\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)\right| &\leq \frac{C_{N,x^\alpha f}}{(1+|\xi|^2)^N}. \end{aligned}$$

Ainsi, non seulement la TF $\mathcal{F}(f)$ est à décroissance rapide, mais c'est aussi le cas de toutes ses dérivées $\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f)$. Ceci nous induit à définir l'espace de Schwartz :

Définition 83. L'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est composé des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que toutes les dérivées décroissent rapidement à l'infini :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad \lim_{|x|\to\infty} x^\beta \partial^\alpha f(x) = 0.$$

On peut mesurer ces décroissances de dérivées en utilisant une famille de normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$N_p(f) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha f(x)\right|.$$

La norme N_p va contrôler toutes les fonctions $x^\beta \partial^\alpha f$ pour les multi-indices $|\alpha|, |\beta| \leq p$.

L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ peut donc être défini comme l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que toutes les normes $N_p(f)$ sont finies.

Remarque 84. Les fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sont automatiquement dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Ce dernier espace contient en plus des fonctions qui ne sont pas à support compact, mais dont on contrôle la décroissance (de f et de toutes ses dérivées) lorsque $|x| \to \infty$.

Exemple 85. Pour tout $\lambda > 0$, la fonction gaussienne $G_{\lambda,d}(x) = e^{-\lambda|x|^2/2}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, la gaussienne décroît rapidement, et les dérivées $\partial^\alpha G_{\lambda,d}$ sont de la forme $P_\alpha G_{\lambda,d}$, avec P_α des polynômes, donc elles sont également à décroissance rapide.

Proposition 86. *i) Si $f_1, f_2 \in \mathscr{S}$, alors leurs combinaisons linéaires, et leur produit $f_1 f_2$, sont dans $\mathscr{S}$.*

ii) Si $f \in \mathscr{S}$, alors pour tous multi-indices α, β, $x^\beta \partial^\alpha f \in \mathscr{S}$.

iii) Si $f \in \mathscr{S}$, alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et on a

$$\|f\|_{L^1} \leq C_d N_{d+1}(f),$$

pour une certaine constante $C_d > 0$ ne dépendant que de la dimension d.

Démonstration. i) La fait que les combinaisons linéaires sont dans $\mathscr{S}$ est élémentaire. Pour le produit $f_1 f_2$: les règles de Leibniz montrent que

$$x^\beta \partial^\alpha (f_1 f_2) = \sum_{\gamma\leq\alpha} c_{\alpha,\gamma} x^\beta \partial^\gamma f_1 \, \partial^{\alpha-\gamma} f_2.$$

Comme chaque $x^\beta \partial^\gamma f_1$ et $\partial^{\alpha-\gamma} f_2$ tendent vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, c'est aussi le cas de leur produit, et de la somme (finie) ci-dessus.

ii) Les mêmes règles de Leibniz montrent que $x^\gamma \partial^\delta \left(x^\beta \partial^\alpha f\right)$est une combinaison linéaire finie de termes $x^\gamma \partial^\delta f$, avec $\gamma' \leq \gamma + \beta$, $\delta' \leq \delta + \alpha$. En comptant les indices, on voit que si $|\alpha|, |\beta| \leq q$, alors $N_p(x^\beta \partial^\alpha f) \leq C_{p,q} N_{p+q}(f)$ pour une certaine constante combinatoire $C_{p,q}$ indépendante de f. □

La suite de normes $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ fournit une topologie à l'espace $\mathscr{S}$. On la définira par la notion de suite convergente dans $\mathscr{S}$

Définition 87. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{S}$ si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $N_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On notera cette convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{S}} \varphi$.

On remarque que si les fonctions φ_n et φ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$ implique la convergence $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{S}} \varphi$. En effet, si les fonctions φ_n sont toutes supportées dans la boule $B(0,R)$, alors la convergence uniforme des dérivées $\|\varphi_n - \varphi\|_{C^p} \to 0$, implique que $N_p(\varphi_n - \varphi) \to 0$.

5.2.2. *Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}$.* Ci-dessus on a montré que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En fait, les preuves se généralisent aisément au cas où la fonction f est elle-même dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors on sait que $f \in L^1$, donc la TF $\mathcal{F}(f)$ est bien définie. De plus, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ on aura aussi $\partial^\beta f \in \mathscr{S} \subset L^1$, de sorte que la TF $\mathcal{F}(f)$ satisfait la formule (5.2). Cette formule montre, comme ci-dessus, que $\mathcal{F}(f)$ est à décroissance rapide. En appliquant le raisonnement à la fonction $x^\alpha f$, qui est encore dans $\mathscr{S}$, on montre que $\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f)$ est aussi à décroissance rapide.

Proposition 88. *Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la norme $N_p(\mathcal{F}(f))$ est contrôlée par une certaine norme $N_{p'}(f)$. Plus précisément, il existe $C_{p,d} > 0$ tel que :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \qquad N_p(\mathcal{F}(f)) \leq C_{p,d}\, N_{p+d+1}(f)\,.$$

On dit alors que la TF agit continûment $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Démonstration. Pour tous $|\alpha|, |\beta| \leq p$, on a, en utilisant les conjugaisons entre dérivée et multiplication :

$$\begin{aligned}
\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} &= \|\xi^\alpha \mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha \left(x^\beta f\right)\right)\|_{L^\infty} \\
&\leq \|\partial_x^\alpha \left(x^\beta f\right)\|_{L^1} \\
&\leq C_d N_{d+1}\left(\partial_x^\alpha \left(x^\beta f\right)\right) \\
&\leq C_d C_{p,d+1} N_{p+d+1}(f).
\end{aligned}$$

□

La nécessité de définir l'espace $\mathscr{S}$, avec des fonctions test à support non compact, vient du fait que la transformée de Fourier agit bien comme une opération $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, alors qu'elle ne laisse

pas invariant l'espace $\mathcal{D}$ que nous avons considéré jusqu'à présent. De plus, nous avons vu dans la Proposition ci-dessus que la TF agit continûment sur $\mathscr{S}$.

5.2.3. *Cas des fonctions gaussiennes.* On peut calculer explicitement la TF des fonctions gaussiennes $G_{\lambda,d}(x) = e^{-\lambda|x|^2/2}$ sur $\mathbb{R}^d$. Rappelons que le paramètre $\lambda > 0$.

Plaçons-nous d'abord ans le cas $d = 1$, en appelan $G_\lambda = G_{\lambda,1}$. Cette fonction vérifie l'EDO

$$G'_\lambda(x) = -\lambda x G_\lambda(x). \tag{5.3}$$

En passant à travers la TF, cette équation se transforme en :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G'_\lambda) &= -\lambda \mathcal{F}(xG_\lambda) \\ \iff i\xi \mathcal{F}(G_\lambda)(\xi) &= -i\lambda \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(G_\lambda)(\xi). \end{aligned}$$

Autrement dit, la TF $\mathcal{F}(G_\lambda) = \hat{G}_\lambda$ satisfait l'EDO

$$\iff \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(G_\lambda)(\xi) = -\lambda^{-1} \xi \mathcal{F}(G_\lambda)(\xi).$$

Cette équation est similaire à (5.3), la seule différence étant le remplacement de λ par λ^{-1}. Comme il s'agit d'une EDO de degré 1, l'espace des solutions est de dimension 1 : toute solution de cette EDO homogène sera donc de la forme $C\, G_{\lambda^{-1}}$, pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Il existe donc un $c = c_\lambda$ tel que

$$\mathcal{F}(G_\lambda) = c_\lambda\, G_{\lambda^{-1}}.$$

En calculant l'expression pour $\xi = 0$, on trouve que $c_\lambda = \hat{G}_\lambda(0) = \int G_\lambda(x)\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$.

Pour traiter le cas de d quelconque, on remarque que

$$G_{\lambda,d}(x_1, \dots x_d) = \prod_{j=1}^{d} G_\lambda(x_j),$$

de sorte que l'intégrale définissant $\mathcal{F}(G_{\lambda,d})$ se factorise en le produit de d intégrales sur $\mathbb{R}$. On obtient alors

$$\mathcal{F}(G_{\lambda,d})(\xi) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{F}(G_\lambda)(\xi_j) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2} G_{\lambda^{-1},d}(\xi).$$

5.3. **Formule d'inversion de Fourier.** On montre que la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}$ est inversible, d'inverse ressemblant beaucoup à la TF elle-même.

Théorème 89. *Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alorsf peut se calculer à partir de sa transformée de Fourier :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

Cette formule définit la transformée de Fourier inverse, $\mathcal{F}^{-1}$, telle que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$.

Démonstration. On se ramène au cas de $x = 0$.En effet, pour tout choix de x_0, on voit facilement que $\xi \mapsto e^{i\xi\cdot x_0} \hat{f}(\xi)$ est la TF de la fonction $f(\cdot + x_0)$. Donc si on connaît le résultat pour $x = 0$

et on l'applique à $f(\cdot + x0)$, on obtient

$$f(0+x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x_0} d\xi,$$

qui est la formule ci-dessus. Il faut donc montrer, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la formule

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Pour $f \in \mathscr{S}$, définissons $L(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int \hat{f}(\xi)\, d\xi$. C'est bien une forme linéaire, puisque $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire, ainsi que l'intégrale. Montrons que si $f(0) = 0$, alors $L(f) = 0$. En effet, supposons que $f(0) = 0$. Alors le DL à l'ordre 1 de f en $x = 0$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j f_j(x),$$

où les fonctions $f_j(x) = \int_0^1 \partial_j f(tx)\, dt$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Considérons une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 dans $B(0,1)$. En multipliant la formule ci-dessus par χ, on obtient

$$\chi(x) f(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j \chi(x) f_j(x),$$

tandis que

$$(1-\chi(x))\, f(x) = \sum_{j=1}^{d} (1-\chi(x))\, \frac{x_j^2}{|x|^2} f(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j \left((1-\chi(x))\, \frac{x_j}{|x|^2} f(x) \right).$$

En prenant $\psi_j(x) = \chi(x) f_j(x) + (1-\chi(x))\, \frac{x_j}{|x|^2} f(x)$, on vérifie que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j \psi_j(x). \tag{5.4}$$

La formule pour ψ_j montre que $\psi_j \in \mathscr{S}$. En effet, comme la fonction $(1-\chi(x))\, \frac{x_j}{|x|^2}$ et ses dérivées sont bornées uniformément, et que $f \in \mathscr{S}$, leur produit est aussi dans $\mathscr{S}$.

En appliquant la forme linéaire L à la décomposition (5.4), on voit que

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_j L(x_j \psi_j) \\ &= \sum_j \int \mathcal{F}(x_j \psi_j)(\xi)\, d\xi \\ &= \sum_j \int i \partial_{\xi_j} \hat{\psi}_j(\xi)\, d\xi = 0, \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé le théorème fondamental de l'analyse. On a donc montré que le sous-espace des fonctions $f \in \mathscr{S}$s'annulant en $x = 0$ (ce sous-espace est un hyperplan H fermé dans $\mathscr{S}$) est inclus dans le noyau de la forme linéaire L. Ainsi, si on considère une fonction $\varphi_0 \in \mathscr{S}$ telle que $\varphi_0(0) = 1$ (en particulier, $\varphi_0 \notin H$), alors toute fonction $f \in \mathscr{S}$ peut se décomposer uniquement en $f = f_H + f(0)\varphi_0$, avec $f_h \in H$. On aura alors :

$$L(f) = L(f_H) + f(0) L(\varphi_0) = L(\varphi_0) f(0).$$

Il reste à calculer la valeur de la constante $L(\varphi_0)$. Pour cela, choisissons $\varphi_0 = G_{1,d}$ la gaussienne étudiée plus haut. On calcule alors :

$$\begin{aligned} L(G_{1,d}) &= \int \mathcal{F}(G_{1,d})(\xi)\, d\xi \\ &= \int (2\pi)^{d/2} G_{1,d}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^d, \end{aligned}$$

d'où on déduit que $L(f) = (2\pi)^d f(0)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

La transformée de Fourier inverse est très proche de $\mathcal{F}$. Si on note $\sigma : f \in \mathscr{S} \mapsto f(-x)$ l'opération de symétrie par rapport à l'origine, alors on a :

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F} \circ \sigma. \tag{5.5}$$

Comme la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, la transformée inverse envoie $f \in \mathscr{S}$ vers une fonction de $\mathscr{S}$. Cela montre que $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est un isomorphisme continu, ainsi que son inverse. On calcule aussi

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \sigma \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \sigma.$$

5.4. **Formule de Plancherel.** Pour $f, g \in \mathscr{S}$, on a l'identité

$$\begin{aligned} \int \bar{f}(x)\, \mathcal{F}(g)(x)\, dx &= \int \bar{f}(x) \left(\int g(\xi)\, e^{-i\xi\cdot x} d\xi \right) dx \\ &\overset{Fubini}{=} \int g(\xi) \left(\int \bar{f}(x)\, e^{-i\xi\cdot x} dx \right) d\xi \\ &= \int g(\xi)\, \mathcal{F}\left(\bar{f}\right)(\xi)\, d\xi \\ &= \int g(\xi)\, \overline{\mathcal{F}\left(f\right)(-\xi)}\, d\xi. \end{aligned}$$

Si on appelle $h = \mathcal{F}(g)$, alors $g = \mathcal{F}^{-1}(h)$, donc l'identité ci-dessus peut se réécrire

$$\begin{aligned} \int \bar{f}(x)\, h(x)\, dx &= \int \mathcal{F}^{-1}(h)(\xi)\, \overline{\mathcal{F}\left(f\right)(-\xi)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathcal{F}(h)(-\xi)\, \overline{\mathcal{F}\left(f\right)(-\xi)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathcal{F}(h)(\xi)\, \overline{\mathcal{F}\left(f\right)(\xi)}\, d\xi. \end{aligned}$$

Comme f et g (donc h) sont arbitraires dans $\mathscr{S}$, on a donc montré la

Proposition 90. *[Formule de Plancherel]*
Pour toutes $f, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \overline{\mathcal{F}\left(f\right)(\xi)}\, \mathcal{F}(h)(\xi)\, d\xi = (2\pi)^d \int \bar{f}(x)\, h(x)\, dx.$$

Autrement dit, si on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire hermitien sur : $L^2(\mathbb{R}^d)$on a pour toutes $f, h \in \mathscr{S}$:

$$(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(h)) = (2\pi)^d\, (f, h).$$

En particulier, $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}$.

5.5. **Action d'une EDP linéaire sur les fonctions de Schwartz.** Supposons qu'on cherche à résoudre une EDP linéaire à coefficients constants sur l'espace des fonctions de Schwartz : celle-ci prend la forme

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha f(x) = 0, \tag{5.6}$$

où chaque $a_\alpha \in \mathbb{C}$ est indépendant de x, et on suppose qu'il existe au moins un coefficient $a_\alpha \neq 0$. Si on prend la transformée de Fourier de chaque terme, en se servant de (5.2) on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = 0$$

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\,(i\xi)^\alpha\right)\mathcal{F}(f)(\xi) = 0. \tag{5.7}$$

Pour résoudre cette équation, il faut comprendre le lieu d'annulation sur $\mathbb{R}^d$ du polynôme $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\,(i\xi)^\alpha$, car c'est sur cet ensemble que la fonction $\mathcal{F}(f)$ peut ne pas être nulle. Or le lieu d'annulation d'un polynôme non trivial est une sous-variété algébrique de $\mathbb{R}^d$, en particulier il ne contient pas d'ouvert. $\mathcal{F}(f)$ étant une fonction continue, si elle est nulle en-dehors de cette sous-variété, elle est forcément nulle partout. On trouve donc que l'équation ci-dessus n'admet aucune solution non-triviale parmi les fonctions de Schwartz. Pour résoudre l'EDP ci-dessus, il faut donc élargir l'espace sur lequel on cherche à la résoudre. C'est l'objectif d'introduire ci-dessous les *distributions de Schwartz.*

Une second motivation est celle de déterminer les solutions fondamentales de l'équation (5.6), autrement dit les f satisfaisant

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha f(x) = \delta_0,$$

en se servant de la transformée de Fourier. Pour cela, il faudra déjà définir la TF de distributions comme la distribution de Dirac.

5.6. **Espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées.** On cherche à définir un espace de distributions sur lesquelles pourrait s'appliquer la transformation de Fourier. Pour définir l'action de $\mathcal{F}$ sur une distribution T, on considère d'abord le cas où T est une fonction $f \in L^1$, sur laquelle on peut faire agir $\mathcal{F}$, et on prend le crochet de f par une fonction test φ afin de "faire passer" la transformée de Fourier sur la fonction test :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(f), \varphi\rangle &= \int \mathcal{F}(f)(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int f(\xi)\,\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

(on se sert du calcul dans la section sur la formule de Plancherel). Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a vu que $\mathcal{F}(\varphi)$ n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, mais est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \in L^1$, la seconde intégrale a un sens,

et elle définit bien une forme linéaire agissant sur $\varphi \in \mathscr{S}$. Au vu de la première intégrale, cette forme linéaire est simplement donnée par la fonction $\mathcal{F}(f)$, qui est continue et bornée.

La formule ci-dessus peut être interprétée comme la transformée de Fourier de la distribution T_f, définie par dualité :

$$\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T_f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle.$$

Et on trouve alors $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$. On voudrait naturellement généraliser cette action de la TF à toute distribution T, par la même formule de dualité :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle.$$

Mais comme on l'a vu, lorsque $\varphi \in \mathcal{D}$, sa TF $\mathcal{F}(\varphi)$ n'est pas dans $\mathcal{D}$, mais est dans $\mathscr{S}$. Pour que la formule ci-dessus ait un sens, il faut que la distribution T puisse agir sur $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathscr{S}$. Ce n'est pas le cas de toute distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 91. La distribution T_f associée à la fonction $f(x) = e^x$ n'est pas bien définie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Ce n'est donc pas une distributions tempérée. En effet, supposons que $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi)$, et considérons une suite de fonctions test $\chi_n = \chi(\cdot - n)$, pour $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs positives, et telle que $\chi \geq 1$ sur $[0,1]$ et $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-1,2]$. On a alors

$$\langle f, \chi_n \rangle = \int e^x \, \chi_n(x) \, dx \geq e^n,$$

tandis que chaque norme N_p est bornée par :

$$N_p(\chi_n) = \max_{k,l \leq p} \sup_x \left(x^k \chi_n^{(l)}(x) \right) \leq (n+2)^p \|\chi\|_{C^p}.$$

Clairement, quelque soit p, C, on aura pour n assez grand $\langle f, \chi_n \rangle > C N_p(\chi_n)$.

On est donc amené à définir un sous-espace de distributions, appelées distributions tempérées, ou distributions de Schwartz.

Définition 92. On appelle distribution tempérée (ou distribution de Schwartz) sur $\mathbb{R}^d$ toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ qui est contrôlée par une des norme N_p sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$: il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \, N_p(\varphi).$$

On note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$.

Par rapport à la définition standard des distributions, la borne ci-dessus ne dépend pas du support de φ. Non seulement l'ordre de la distribution est fini (il est au plus p), mais la constante ne dépend pas non plus du support de φ. La définition des normes N_p montre que la distribution ne peut pas "grandir" trop vite lorsque $|x| \to \infty$: la borne ci-dessus fournit non seulement un contrôle sur la singularité de T, mais également sur son comportement lorsque $|x| \to \infty$.

Donc pour décider si une distribution T est tempérée, il faut étudier son action sur des fonctions φ ayant des supports de plus en plus lointains. Les singularités de T dans une boule bornée ne donneront aucune indication sur le fait qu'elle est tempérée ou non.

Exemple 93. 1) Toute distribution à support compact est tempérée. En effet, si $\mathrm{supp}(T) \subset B(0,R)$, alors il suffit de tester T sur des fonctions test telles que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0,R+1)$; sur ces fonctions, les normes $\|\varphi\|_{C^p}$ sont alors contrôlées par $N_p(\varphi)$.

2) Toute fonction $f \in L^1$ fournit une distribution tempérée.

3) Plus généralement, une fonction $f \in L^1_{loc}$ à croissance en moyenne polynomiale :

$$\exists p, C > 0, \quad \forall R > 0, \quad \int_{B(0,R)} |f(x)|\, dx \leq C(1+R)^p,$$

fournit une distribution tempérée. C'est en particulier le cas si $f(x)$ est bornée par un polynome $p(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 94. *Si T est une distribution tempérée, alors son action s'étend continûment aux fonctions test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On continuera de noter T cette forme linéaire étendue à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Lorsqu'on parlera de distribution tempérée, on aura en tête cette forme linéaire sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit T une distribution tempérée, contrôlée par CN_p. Soit $\varphi \in \mathscr{S}$. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathscr{S}$, on peut trouver une suite $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{D}$, telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{S}} \varphi$. En particulier, $(\varphi_n)_n$ forme une suite de Cauchy dans $\mathscr{S}$, de sorte que

$$N_p(\varphi_n - \varphi_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \qquad \text{ce qui implique } \langle T, \varphi_n - \varphi_m\rangle \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Autrement dit, la suite $(\langle T, \varphi_n\rangle)_n$dans $\mathbb{C}$ est de Cauchy, donc elle converge vers une limite, que nous noterons $\langle T, \varphi\rangle$. On vérifie en effet que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(\varphi_n)_n$ convergeant vers φ, et que l'opération $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ est une forme linéaire, bornée par $CN_p(\varphi)$. □

Quelles opérations sont admises sur les distributions tempérées ? On a vu que si $\varphi \in \mathscr{S}$, alors $x^\alpha \partial^\beta \varphi \in \mathscr{S}$. Par dualité, cela montre qu'on peut appliquer ces opérations aux distributions tempérées :

Proposition 95. *Soit T une distribution tempérée. Alors pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la distribution $x^\alpha \partial^\beta T$ est encore tempérée.*

Démonstration. La définition de $x^\alpha \partial^\beta T$ est la même que précédemment :

$$\langle x^\alpha \partial^\beta T, \varphi\rangle = (-1)^{|\beta|} \langle T, \partial^\beta (x^\alpha \varphi)\rangle.$$

□

Il suffit de vérifier que cette distribution reste contrôlée par une certaine norme N_q. On a vu que si $\varphi \in \mathscr{S}$, alors $N_p(\partial^\beta(x^\alpha\varphi))$ est contrôlée par $C_{\alpha,\beta} N_{p+|\alpha|+|\beta|}(\varphi)$. Donc comme T est contrôlée par N_p, alors $x^\alpha \partial^\beta T$ est contrôlée par $N_{p+|\alpha|+|\beta|}$.

5.7. **Transformée de Fourier des distributions tempérées.** Maintenant qu'on a défini des distributions agissant sur $\mathscr{S}$, on peut définir l'action de la transformée de Fourier sur les distributions tempérées, comme esquissé au début de la section 5.6.

Définition 96. Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors la transformée de Fourier de T est la distribution tempérée, notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

La distribution $\hat{T}$ est bien définie, puisqu'on sait que si $\varphi \in \mathscr{S}$, alors $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$. De plus, la continuité de la TF sur $\mathscr{S}$ (v. Prop. 86) montre que $\hat{T}$ est bien une distribution tempérée : si N_p contrôle T, alors N_{p+d+1} contrôle $\hat{T}$.

Exemple 97. 1) On a vu plus haut que si $T = T_f$ pour $f \in L^1$, alors $\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}$, avec $\hat{f}$ la transformée de Fourier usuelle de f. La définition ci-dessus est donc une extension de la TF usuelle sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2) La distribution de Dirac $T = \delta_0$ est à support compact, donc tempérée. On calcule :

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\, dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{F}(\delta_0)$ est donnée par la fonction constante égale à 1 :

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

Inversement,

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^d \varphi(0),$$

en utilisant le Thm 89. On en déduit $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^d \delta_0$.

Remarque 98. La propriété $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \circ \sigma$, qui était valable lorsqu'on l'appliquait aux fonctions $\varphi \in \mathscr{S}$ (v. (5.5)), s'étend par dualité aux distributions $T \in \mathscr{S}'$. En particulier, la transformée de Fourier est une bijection $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$.

Les propriétés (5.1,5.2) de conjugaison entre dérivée et multiplication restent valables lorsque $\mathcal{F}$ agit sur les distributions.

Proposition 99. *Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors on a les identités suivantes :*

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \hat{T},$$
$$\mathcal{F}(\partial_x^\beta T) = i^{|\beta|} \xi^\beta \hat{T},$$

où on a utilisé la convention que $\mathcal{F}(T)$ agit sur des fonctions de la variable ξ.

Démonstration. Par dualité : pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_\xi)$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(x^\alpha T), \varphi \rangle &= \langle x^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\
&= \langle T, x^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\
&= \langle T, (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) \rangle \\
&= (-i)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) \rangle \\
&= (-i)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}(T), \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= i^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

La preuve de la seconde identité est similaire. □

Ces relations de conjugaison vont nous permettre de résoudre des EDP linéaires sur l'espace des distributions tempérées.

5.8. **Transformation de Fourier des EDP linéaires.** Maintenant qu'on est équipés des distributions tempérées, on peut chercher des solutions de notre EDP homogène dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \, (-i\partial)^\alpha \, T = 0, \quad \text{avec } T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{5.8}$$

La TF donnera la même équation que (5.7), mais agissant sur $\mathcal{F}(T) \in \mathscr{S}'$:

$$P(\xi)\, \mathcal{F}(T) = 0, \tag{5.9}$$

où comme plus haut on a noté $P(\xi)$ le polynôme sur $\mathbb{R}^d$:

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \, \xi^\alpha.$$

La différence avec le cas où on cherchait à résoudre cette équation sur un espace des fonctions continues, c'est que si P s'annule sur une sous-variété $\Sigma \overset{\text{def}}{=} P^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^d$, on peut chercher à construire une distribution T non triviale, dont le support soit contenu dans Σ, et qui vérifierait l'équation (5.9).

On a déjà rencontré ce type d'équation en dimension $d = 1$: l'équation $xT = 0$ sur $\mathbb{R}$ admettait comme solutions non triviales les multiples de δ_0.

Exemple 100. Si $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ est dans la sous-variété

$$\Sigma = P^{-1}(0)$$

, alors la distribution $S = \delta_{\xi_0} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ satisfait l'équation $P(\xi)S = 0$. Par conséquent, sa TF inverse $T = \mathcal{F}^{-1}(S)$ satisfait l'EDP homogène (5.8).

Les distributions δ ne sont pas forcément les seules solutions à l'équation $P(\xi)T = 0$.

5.8.1. *Equation de Laplace.* On considère l'équation de Laplace

$$\Delta T = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_i}^2 T = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d. \tag{5.10}$$

Sa transformée de Fourier s'écrit $|\xi|^2 S = 0$, donc son polynôme correspondant est $P(\xi) = |\xi|^2$, qui ne s'annule qu'en $\xi_0 = 0$. On sait alors que si S est solution de $|\xi|^2 S = 0$, alors nécessairement $\text{supp}(S) = \{0\}$.

Affirmation 101. Les seules distributions $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de support $\{0\}$ sont la distribution de Dirac en 0 et ses dérivées partielles $\partial^\alpha \delta_0$.

On en déduit que toute solution S est une combinaison linéaire (finie) des $\left\{\partial_\xi^\alpha \delta_0\right\}$. Par transformée de Fourier inverse,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\partial_\xi^\alpha \delta_0\right) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\sigma \circ \mathcal{F}\left(\partial_\xi^\alpha \delta_0\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\sigma\left((ix)^\alpha 1\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}(-ix)^\alpha.\end{aligned}$$

On en déduit donc que toute solution $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de l'équation de Laplace est forcément un polynôme, qui doit vérifier (5.10) au sens classique : il s'agit donc d'un polynôme harmonique.

Le cas où $S = \delta_0$ donne la distribution constante $T = \frac{1}{(2\pi)^d}$, qui est évidemment solution de l'équation de Laplace. Mais ce n'est pas la seule solution : on peut montrer que pour chaque degré $m \geq 0$, il existe des polynômes harmoniques *homogènes* de degré m, et dont la TF correspond à une certaine combinaison de $\partial_\xi^\alpha \delta_0$, solution de $|\xi|^2 S = 0$.

Remarque 102. Il existe d'autres solutions de l'équation de Laplace qui sont des fonctions lisses, non polynômiales. Par exemple, les fonctions de la forme $f(x) = e^{i\lambda x_1} e^{\lambda x_2}$ satisfont (5.10). Mais comme on l'a vu dans l'Exemple 91, une telle fonction à croissance exponentielle n'est pas une distribution de Schwartz.

Exercice 103. Pour $d = 2$ et $d = 3$, calculer les polynômes harmoniques de degrés $m \leq 3$.

5.9. **Solutions fondamentales.** La TF permet aussi de calculer des solutions fondamentales de l'équation (5.9), c'est-à-dire

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \left(-i\partial\right)^\alpha T = \delta_0, \quad \text{avec } T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{5.11}$$

En transformée de Fourier, l'équation prend la forme de l'équation fonctionnelle :

$$P(\xi)\,\hat{T} = 1.$$

Pour résoudre cette équation, on souhaiterait prendre comme solution

$$\hat{T} = \frac{1}{P(\xi)},$$

où la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{P(\xi)}$ est définie presque partout. Se pose alors la

Question. *cette fonction* $\frac{1}{P(\xi)}$ *définit-elle une distribution tempérée sur* $\mathbb{R}^d$ *?*

Plutôt que de chercher une règle générale, penchons-nous sur l'équation de Laplace.

5.9.1. *Solution fondamentale de l'équation de Laplace.* La fonction $\xi \mapsto f(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus 0$, elle est singulière en $\xi = 0$, et elle est bornée lorsque $|\xi| \to \infty$. Donc le seul problème pouvant l'empêcher d'être tempérée est sa singularité en $\xi = 0$. Pour que $f(\xi)$ définisse, à elle seule, une distribution, il faut qu'elle soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ au voisinage de $\xi = 0$. C'est le cas uniquement en dimension $d \geq 3$.

Proposition 104. *En dimension $d \geq 3$, la fonction $f(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}$ définit une distribution tempérée. L'équation*

$$-\Delta T = \delta_0 \tag{5.12}$$

(appelée équation de Poisson) admet donc comme solution la distribution tempérée $T = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

Il reste à exprimer de façon plus explicite la distribution T, autrement dit à calculer la TF inverse $\mathcal{F}^{-1}(f)$. On voit déjà que $\sigma(f) = f$ puisque f est paire. Donc $T = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}(f)$. Mais la fonction f n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc on ne peut pas calculer sa TF par une simple intégration. Il y a plusieurs façons de procéder pour calculer $\mathcal{F}(T)$, l'une d'elles utilisant des approximations intégrables de f.

Lemme 105. *Les distributions $\left(f_\epsilon(\xi) = \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{|\xi|^2}\right)_{\epsilon>0}$ convergent dans $\mathscr{S}'$ vers f lorsque $\epsilon \searrow 0$.*

Démonstration. Il faut vérifier pour pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$, $\langle f_\epsilon - f, \varphi\rangle \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$. Pour cela, on estime l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f_\epsilon - f)(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi.$$

A partir de la borne $|1 - e^{-\epsilon t}| \leq \epsilon t$ valable pour tout $t \geq 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^d} (f_\epsilon - f)(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi\right| &\leq \epsilon \int \frac{1}{|\xi|}|\varphi(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \epsilon \int \frac{(1+|\xi|)^d}{|\xi|(1+|\xi|)^d}|\varphi|\, d\xi \\
&\leq \epsilon \sup\left((1+|\xi|)^d|\varphi|\right) \int \frac{1}{|\xi|(1+|\xi|)^d} d\xi \\
&\leq \epsilon C_d N_d(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Comme les fonctions f_ϵ sont intégrables, leurs TF peuvent se calculer explicitement.

$$\hat{f}_\epsilon(x) = \int \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{|\xi|^2}\, e^{-ix\cdot\xi}\, d\xi.$$

On va se servir des coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^d$. Faisons le calcul en dimension $d = 3$, où les coordonnées sont plus familières. Tout d'abord, à $0 \neq x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on peut opérer une rotation sur les coordonnées ξ, de façon à ce que $x \cdot \xi = |x||\xi|\cos(\theta)$, avec θ l'angle polaire. Il faut choisir une rotation $R \in O(\mathbb{R}^3)$ telle que $\xi = R\zeta$, de sorte que

$$x \cdot R\zeta = R^{-1}x \cdot \zeta,$$

avec $R^{-1}x$ orienté dans la direction du pôle nord : $R^{-1}x = (0, 0, |x|)$. En opérant le changement $\xi \to \zeta$, on obtient l'intégrale

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\epsilon(x) &= \int \frac{e^{-\epsilon|\zeta|}}{|\zeta|^2}\, e^{-i|x||\zeta|\cos(\theta)}\, d\zeta \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\epsilon|\zeta|}}{|\zeta|^2} \left(\int_0^\pi e^{-i|x||\zeta|\cos(\theta)}\, 2\pi\sin\theta\, d\theta\right) |\zeta|^2 d|\zeta|
\end{aligned}$$

en passant aux coordonnées polaires. L'intégrale sur θ se calcule aisément, et on obtient l'intégrale radiale (en prenant $r = |\zeta|$ la coordonnée radiale

$$2\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\epsilon r}}{r^2} \frac{2\sin(|x|r)}{|x|r} r^2 \, dr = 4\pi \int_0^\infty e^{-\epsilon r} \frac{\sin(|x|r)}{|x|r} \, dr.$$

Comme $x \neq 0$, on peut opérer le changement $t = |x|r$, pour trouver :

$$\frac{4\pi}{|x|} \int_0^\infty e^{-\epsilon t/|x|} \frac{\sin(t)}{t} \, dt.$$

On peut calculer explicitement l'intégrale, ou bien remarquer que lorsque $\epsilon \searrow 0$ elle converge vers

$$\frac{4\pi}{|x|} \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \frac{4\pi}{|x|} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{|x|}.$$

En revenant à la définition de T, on obtient que T est la fonction

$$T = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^3 |x|} = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

Remarque 106. En électrostatique, l'équation de Poisson (5.12) décrit le potentiel électrostatique engendré par une charge ponctuelle à l'origine. On retrouve bien le potentiel électrostatique $\frac{1}{4\pi|x|}$ engendré par une telle charge. Mais il faut se souvenir qu'on peut ajouter à T n'importe quelle solution de l'équation de Laplace, donc n'importe quel polynôme harmonique. Pourquoi la nature choisit-elle la solution T ? Parce que c'est la seule qui soit donnée par une fonction tendant vers zéro lorsque $|\xi| \to \infty$. En effet, pour n'importe quel polynôme harmonique non trivial $p(\xi)$, on n'aura pas $p(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to \infty$. Une autre propriété intéressante de la solution fondamentale T est son invariance par rotation. Cette symétrie n'est pas satisfaite par la plupart des polynômes harmoniques (elle ne l'est que pour le polynôme constant $p(\xi) = 1$).

5.10. **Problème de Cauchy pour une équation d'évolution.** On a vu, dans la section 4.7.3, qu'une façon de résoudre une EDP d'évolution sur $\mathbb{R}^{1+d}$ (EDP faisant intervenir des dérivées temporelles et spatiales), est de se donner des données initiales (en $t = 0$), et de résoudre l'équation sous la forme d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$ dépendant continûment de t (en fait, de façon lisse). On avait appliqué cette stratégie à l'équation de d'Alembert, qui est du second ordre en t.

Considérons maintenant une EDP d'évolution du premier ordre en temps, du type :

$$\partial_t u + P(-i\partial_x) u = 0 \tag{5.13}$$

avec $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ un polynôme. Pour appliquer la stratégie évoquée, on va chercher une fonction

$$U : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto U(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),$$

dérivable par rapport à t, vérifiant $U(t = 0) = u_0$ la donnée initiale, et vérifiant pour chaque $t > 0$ l'équation (5.13), qu'on interprète plutôt comme une EDO sur l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\frac{d}{dt} U(t) = P(-i\partial_x) U(t). \tag{5.14}$$

Si on cherche des solutions telles que $U(t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)$ pour tout $t \geq 0$, on peut se servir de la transformée de Fourier en x de $U(t)$ pour résoudre cette équation. On notera pour chaque temps $t \geq 0$: $\hat{U}(t) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(U(t))$. Ainsi, l'équation (5.14) se transforme en :

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) + P(\xi)\hat{U}(t) = 0, \tag{5.15}$$

avec une donnée initiale $\hat{U}(t = 0) = \hat{u}_0$. Si on suppose que $\hat{U}(t) \in \mathscr{S}'$ est donnée par une fonction $\hat{u}(t, \xi)$, alors l'équation ci-dessus découple les différentes valeurs de ξ (il n'y a pas de dérivées par rapport à ξ). On peut donc interpréter ξ comme un paramètre, et résoudre séparément les équations portant sur des valeurs de ξ distinctes. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, l'EDO du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(t, \xi) + P(\xi)\hat{u}(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}(t = 0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), \end{cases}$$

admet l'unique solution

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-tP(\xi)}\hat{u}(0, \xi).$$

Hypothèse 107. *Supposons que, pour tout $t > 0$, la fonction $e^{-tP(\xi)}$ est à croissance modérée (ainsi que ses dérivées) lorsque $|\xi| \to \infty$. Il suffit pour cela que*

$$\liminf_{|\xi|\to\infty} \Re P(\xi) \geq C$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}$.

Sous cette hypothèse, la fonction $\hat{u}(t, \xi)$, produit d'une fonction à croissance modérée par $\hat{u}_0 \in \mathscr{S}'$, reste dans $\mathscr{S}'$. On peut alors récupérer $u(t)$ par TF inverse de $\hat{u}(t)$.

Cette construction d'une solution $\hat{U}(t)$ reste valable si on considère une donnée initiale plus générale $\hat{u}_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, on ne peut pas définir $\hat{u}_0(t, \xi)$ pour tout point ξ, mais la solution

$$\hat{U}(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-tP(\xi)}\hat{U}_0,$$

produit d'une distribution $\hat{U}_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la fonction à croissance modérée $e^{-tP(\xi)}$, reste bien dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t > 0$. D'autre part, le théorème de dérivation sous le crochet montre que cette distribution satisfait bien l'équation différentielle (5.15). On peut dont prendre pour solution $U(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{U}(t))$.

Remarque 108. Dans le cas où l'hypothèse (107) n'est pas satisfaite, on peut supposer que $\hat{u}_0$ est à support compact, de sorte que $\hat{U}(t) = e^{-tP(\xi)}\hat{U}_0$ est également à support compact, donc automatiquement dans $\mathscr{S}'$.

Prenons comme exemple d'équation d'évolution l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^{1+d}$.

5.10.1. *Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.* L'équation de la chaleur s'écrit (après absorption des constantes par adimensionnement des variables) :

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Elle revient à prendre comme polynôme $P(\xi) = |\xi|^2$. Dans ce cas, on vérifie facilement que pour tout $t \geq 0$, la fonction $e^{-tP(\xi)} = e^{-t|\xi|^2}$ est bien à croissance modérée (pour tout $t > 0$ c'est la

Gaussienne $G_{2t,d}(\xi)$, donc elle est dans $\mathscr{S}$, donc dans $\mathscr{S}'$;en $t=0$ c'est la fonction constante, qui est aussi dans $\mathscr{S}'$). Pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on aura donc comme solution du problème de Cauchy :

$$U(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{U}_0\right).$$

Peut-on exprimer cette expression plus facilement ? Ecrivons, pour toute fonction de Schwartz φ et tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\langle U(t), \varphi\rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{U}_0\right), \varphi\rangle \\ &= \langle e^{-t|\xi|^2}\hat{U}_0, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\ &= \langle \hat{U}_0, e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Il faut donc calculer, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, l'expression

$$e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^d}e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}(\sigma(\varphi)).$$

On va se servir de la propriété suivante :

Proposition 109. *Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{S}$, on a $fg \in \mathscr{S}$, et :*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(fg) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \\ \Longleftrightarrow fg &= \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)\right).\end{aligned}$$

Incidemment, on remarque que pour $f, g \in \mathscr{S}$, leur convoluée $f * g \in \mathscr{S}$.

Démonstration. Calculons, pour $f, g \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\xi) &= \int \mathcal{F}(f)(\xi-\zeta)\,\mathcal{F}(g)(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int \left(\int f(x)\,e^{-ix\cdot(\xi-\zeta)}\,dx\right)\mathcal{F}(g)(\zeta)\,d\zeta \\ &\overset{Fubini}{=} \int f(x)\,e^{-ix\cdot\xi}\left(\int \mathcal{F}(g)(\zeta)\,e^{ix\cdot\zeta}\,d\zeta\right)dx \\ &= \int f(x)\,e^{-ix\cdot\xi}\,(2\pi)^d g(x)\,dx \\ &= (2\pi)^d\mathcal{F}\left(fg\right)(\xi).\end{aligned}$$

□

En prenant $f = e^{-t|\xi|^2} = G_{2t,d}(\xi)$, $g = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, on trouve alors

$$\begin{aligned}fg &= G_{2t,d}(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\varphi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(G_{2t,d}) * \varphi\right).\end{aligned}$$

En revenant à l'équation (5.16), on trouve alors :

$$\begin{aligned}\langle U(t), \varphi\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^d}\langle \hat{U}_0, \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(G_{2t,d}) * \varphi\right)\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\langle U_0, \mathcal{F}(G_{2t,d}) * \varphi\rangle.\end{aligned}$$

On se souvient que

$$\mathcal{F}(G_{2t,d})(\xi) = \left(\frac{2\pi}{2t}\right)^{d/2} G_{1/2t,d}(\xi) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} e^{-|x|^2/4t},$$

qui est une gaussienne, donc dans $\mathscr{S}$. Si U_0 est une fonction L^1 et $f \in \mathscr{S}$, $\varphi \in \mathscr{S}$, on sait que $f * \varphi \in \mathscr{S}$, et que

$$\langle U_0, f * \varphi\rangle = \langle U_0 * \sigma(f), \varphi\rangle.$$

Cette expression de la convolution peut se généraliser à toute distribution $U_0 \in \mathscr{S}'$: la fonction lisse définie par

$$U_0 * \sigma(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle U_0, \sigma(f)(x - \cdot)\rangle = \langle U_0, f(\cdot - x)\rangle,$$

est bien définie puisque $f(\cdot - x) \in \mathscr{S}$, et elle est lisse car f l'est.

Pour $U_0 \in \mathscr{S}'$ quelconque, on a donc comme solution, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}U(t) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} U_0 * G_{1/2t,d} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{d/2} U_0 * G_{1/2t,d} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{d/2} \langle U_0, G_{1/2t,d}(\cdot - x)\rangle.\end{aligned}$$

En particulier, pour la donnée initiale $U_0 = \delta_0$, on trouve la solution suivante de l'équation de la chaleur :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad u(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{d/2} G_{1/2t,d}(x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{d/2} e^{-|x|^2/4t}.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, cette "solution fondamentale" permet, par convolution, de construire une solution du problème de Cauchy aved toute donnée initiale $U_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

5.10.2. *Solution fondamentale de l'équation de la chaleur.* Ici, on a appelé "solution fondamentale" la solution $(U(t))_{t\geq 0}$ du problème de Cauchy, pour la donnée initiale $U_0 = \delta_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)$. Quel est son lien avec une véritable solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^{1+d}$, qui satisferait

$$(\partial_t - \Delta)\, T = \delta_{(0,0)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})? \tag{5.17}$$

Prenons comme distribution sur $\mathbb{R}^{1+d}$ la fonction

$$\underline{u}(t,x) = H(t)\, u(t,x),$$

et vérifions qu'elle constitue effectivement une solution fondamentale au sens de (5.17). En effet, pour $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+d})$, on calcule

$$\begin{aligned} \langle (\partial_t - \Delta)\, \underline{u}, \Phi \rangle &= \langle \underline{u}, (-\partial_t - \Delta)\, \Phi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, (-\partial_t - \Delta)\, \Phi(t,x)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Le premier terme de droite peut s'intégrer par parties (pour presque tout x) :

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, (-\partial_t)\, \Phi(t,x)\, dx\, dt &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_\epsilon^\infty u(t,x)\, (-\partial_t)\, \Phi(t,x)\, dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(\epsilon,x)\Phi(\epsilon,x) + \int_\epsilon^\infty \partial_t u(t,x)\Phi(t,x)\, dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(\epsilon,x)\Phi(\epsilon,x) + \int_\epsilon^\infty \Delta u(t,x)\Phi(t,x)\, dt \right) dx \\ &= \langle u(\epsilon), \Phi(\epsilon,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_\epsilon^\infty \langle \Delta u(t), \Phi(t,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \langle u(\epsilon), \Phi(\epsilon,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_\epsilon^\infty \langle u(t), \Delta\Phi(t,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d}. \end{aligned}$$

Le second terme s'annule avec le dernier terme de (5.18), donc on aboutit finalement à :

$$\langle (\partial_t - \Delta)\, \underline{u}, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^{1+d}} = \lim_{\epsilon \to 0} \langle u(\epsilon), \Phi(\epsilon,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Comme la distribution $u(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\mathscr{S}'} \delta_0$ et $\Phi(\epsilon,\cdot) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{\mathscr{S}} \Phi(0,\cdot)$, on montre que

$$\langle u(\epsilon), \Phi(\epsilon,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle \delta_0, \Phi(0,\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^d} = \Phi(0,0),$$

donc que

$$\langle (\partial_t - \Delta)\, \underline{u}, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^{1+d}} = \langle \delta_{(0,0)}, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^{1+d}}.$$

Comme le calcul est valable pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{1+d})$, on a donc prouvé que la fonction $\underline{u}(t,x)$ constitue une solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^{1+d}$.