Université Paris-Saclay Master 1 F.E.S.

Analyse 1
Partiel (21/10/2025)

— *Durée : 3 heures*
— *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*
— *Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*
— *Tous les résultats démontrés dans le cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités*
— *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

Exercice 1.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Banach-Steinhaus (théorème de la borne uniforme). Spécialiser ensuite l'énoncé au cas d'une suite de formes linéaires $f_n : X \to \mathbb{R}$, où X est un espace de Banach.

   v. le cours. Pour la spécialisation : pour un Banach X, supposons que pour chaque $x \in X$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq C(x)$, où la valeur C_x dépend a priori du point x. Alors les formes linéaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées : il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})} \leq C$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq C\|x\|$.

2. En déduire que si une suite de formes linéaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent *simplement* sur X, alors leur limite simple f_∞ est une forme linéaire continue.

   Si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors cette suite est bornée. Le théorème de Banach-Steinhaus implique donc que la suite de formes linéaires $(f_n)_n$ est bornée uniformément : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| \leq C$. On voit facilement que la limite $f_\infty(x) := \lim_n f_n(x)$ définit une forme inéaire :

   $$f_\infty(\alpha x + \beta y) = \lim_n (f_n(\alpha x + \beta y)) = \lim_n (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) = \alpha \lim_n f_n(x) + \beta \lim_n f_n(y).$$

   Enfin, la bornitude uniforme des f_n montre que pour tout x, n, $|f_n(x)| \leq C\|x\|$. En passant à la limite, on a $|f_\infty(x)| \leq C\|x\|$, ce qui montre que la forme f_∞ est continue.

3. On considère l'espace vectoriel c des suites réelles $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang (c'est à dire que pour chaque $u \in c$, il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 0$ pour tout $k \geq k_0$). Montrer que la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur c.

   Le fait que les suites $u \in c$ soient nulles à partir d'un certain rang montre que pour toute suite $u \in c$, alors $\|u\|_\infty = |u_m|$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ (qui dépend de la suite u). En effet, soit u est la suite nulle, et alors $\|u\|_\infty = 0 = |u_0|$, soit u n'est pas la suite nulle, alors il n'existe qu'un nombre fini d'éléments $u_n \neq 0$, et alors $\sup_n |u_n|$ est atteint pour un de ces éléments.
   Il est alors facile de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie toutes les propriétés d'une norme sur l'espace de suites c :
   - homogénéité : $\sup_n |\lambda u_n| = |\lambda u_m| = |\lambda||u_m| = |\lambda|\|u\|_\infty$.
   - sous-additivité : $\sup_n |u_n + v + n| = |u_m| + |v_m| \leq |u_m| + |v_m| \leq \sup_n |u_n| + \sup_n |v_n|$.
   - Enfin, si $\sup_n |u_n| = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,, autrement dit u est la suite nulle.

4. Sur c on définit les formes linéaires $f_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que chaque f_n est continue sur l'espace normé $(c, \|\cdot\|_\infty)$, et que les f_n convergent simplement vers une forme linéaire f_∞ sur c, qu'on décrira explicitement.

Pour chaque $n \geq 0$ et $u \in c$, on vérifie que

$$|f_n(u)| = |\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq (n+1)\|u\|_\infty,$$

ce qui montre que la forme linéaire f_n est continue. Pour chaque $u \in c$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Cela implique que pour tout $n \geq n_0$, $f_n(u) = f_{n_0}(u)$, et donc que la suite $(f_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, donc qu'elle admet la limite $\lim_n f_n(u) = f_{n_0}(u)$. On appelle $f_\infty(u)$ cette limite. L'application $u \mapsto f_\infty(u)$ est linéaire : pour deux suites $u, v \in c$, il existe n_0 tel que $u_n = v_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$, et on a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$:

$$f_\infty(\alpha u + \beta v) = f_{n_0}(\alpha u + \beta v) = \alpha f_{n_0}(u) + \beta f_{n_0}(v) = \alpha f_\infty(u) + \beta f_\infty(v).$$

La forme linéaire f_∞ peut s'écrire, pour toute suite $u \in c$:

$$f_\infty(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,.$$

Cette série n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc elle converge, et est égale à $f_{n_0}(u)$.

5. La forme linéaire $f_\infty : (c, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est-elle continue ? (on justifiera).

   Non, la forme f_∞ n'est pas continue. En effet, pour tout $n > 0$ la suite $u^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ termes}}, 0, 0, \ldots)$ est bien dans c, et elle vérifie $\|u^{(n)}\|_\infty = 1$ et $f_\infty(u^{(n)}) = n$.

6. Pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique-t-il pas à l'espace $(c, \|\cdot\|_\infty)$?

   C'est parce que l'espace c n'est pas complet, donc ce n'est pas un espace de Banach. Or le théorème de Banach-Steinhaus exige que l'espace de départ (ici, X) soit complet.
   Pour montrer la non-complétude de c, on peut considérer une suite réelle bornée $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, mais où $u_k \neq 0$ pour tout k. Alors, notons $u^{(n)}$ la suite obtenue par la troncature au rang n de la suite u, autrement dit $u_k^{(n)} = u_k$ si $k \leq n$, et $u_k^{(n)} = 0$ sinon. Alors on voit que

   $$\|u^{(n)} - u\|_\infty = \sup_{k>n} |u_k| \quad \text{tend vers 0 lorsque } n \to \infty.$$

   Ceci montre que les suites $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite de Cauchy dans c, mais leur limite u n'appartient pas à c.

Exercice 2. On note X l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que les coefficients de Fourier d'une telle fonction f sont donnés par

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx,$$

et que la série de Fourier de f est donnée formellement par $Sf(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}$.
Notre objectif est de montrer qu'il existe une fonction $f_0 \in X$ telle que sa série de Fourier en zéro, $Sf_0(0)$, ne converge pas.

1. On appelle *noyaux de Dirichlet* les sommes partielles $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Donner une formule plus simple pour $D_n(x)$.

La formule des sommes géométriques montre que pour tout $x \neq 0 \bmod 2\pi$

$$D_n(x) = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

Lorsque $x \to 0$, l'expression de droite converge vers $2n + 1$, qui est aussi la valeur de $D_n(0)$; avec cette convention, la formule ci-dessus donne la valeur de D_n pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

2. Pour tout $n \in 1$, on définit la forme linéaire sur X : $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$. Exprimer $S_n(f)$ en utilisant le noyau D_n, et montrer que la forme linéaire S_n est continue sur X.

   Par la linéarité de l'intégrale, on trouve que

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, f(x)\, dx. \end{aligned}$$

   On obtient alors facilement :

$$|S_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, \|f\|_\infty\, dx = \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx.$$

   Comme l'intégrale de droite converge, la forme linéaire S_n est continue, de norme $\|S_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$.

3. Montrer que la norme de la forme linéaire $\|S_n\| := \sup_{f \in X; \|f\|_\infty = 1} |S_n(f)|$ est donnée exactement par $\|S_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$.
   Indication : on pourra se servir d'approximations continues de la fonction $\operatorname{sgn}(D_n(x))$ (signe de $D_n(x)$).

   Comme indiqué dans l'énoncé, on peut se servir de la fonction $f_n(x) := \operatorname{sgn}(D_n(x))$ qui vaut $+1$ si $D_n(x) > 0$, -1 si $D_n(x) < 0$, 0 si $D_n(x) = 0$, ce qui arrive aux points de la forme $x_{n,k} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k \in \{-n, \dots n\} \setminus 0$. Cette fonction f_n n'est pas dans X, car elle n'est pas continue. Cependant, elle est bornée et mesurable sur $[0, 2\pi]$, donc l'intégrale $S_n(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) D_n(x)\, dx$ est bien définie, et vaut $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$.
   Pour tout $0 < \epsilon < 1/2$, nous pouvons définir la fonction $f_{n,\epsilon}$ telle que $f_{n,\epsilon}(x) = f_n(x)$ sur les intervalles $[x_{n,k} + \frac{\epsilon}{n}, x_{n,k+1} - \frac{\epsilon}{n}]$, et $f_{n,k}$ est affine sur les intervalles $[x_{n,k} - \frac{\epsilon}{n}, x_{n,k} + \frac{\epsilon}{n}]$ de façon à passer de la valeur $+1$ à -1 ou inversement, de façon à être continue sur $[-\pi, \pi]$ et bornée par $\|f_{n,\epsilon}\|_\infty = 1$. Lorsque ϵ est petit, $f_{n,k}$ est donc égale f_n, sauf sur de petits intervalles. On

trouve alors que

$$
\begin{aligned}
|S_n(f_{n,\epsilon}) - S_n(f_n)| &\le \sum_{1\le|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{x_{n,k}-\frac{\epsilon}{n}}^{x_{n,k}+\frac{\epsilon}{n}} |D_n(x)\big(f_{n,\epsilon}(x) - f_n(x)\big)|\,dx \\
&\le \sum_{1\le|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{x_{n,k}-\frac{\epsilon}{n}}^{x_{n,k}+\frac{\epsilon}{n}} \|D_n\|_\infty \|f_{n,\epsilon} - f_n\|_\infty\,dx \\
&\le \sum_{1\le|k|\le n} \frac{\|D_n\|2}{2\pi}\int_{x_{n,k}-\frac{\epsilon}{n}}^{x_{n,k}+\frac{\epsilon}{n}} 1\,dx \\
&\le \frac{2}{2\pi}\|D_n\|_\infty \sum_{1\le|k|\le n} \frac{2\epsilon}{n} = \frac{4\|D_n\|_\infty}{\pi}\,\epsilon\,.
\end{aligned}
$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $\epsilon \searrow 0$. Ceci montre que $S_n(f_{n,\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon\searrow 0} S_n(f_n)$. Comme $\|f_{n,\epsilon}\|_\infty = 1$, la famille de fonctions $(f_{n,\epsilon})_{0<\epsilon<1/2} \subset X$ montre que la norme de S_n au moins égale à $S_n(f_n)$. En se servant de la question précédente, $\|S_n\| = S_n(f_n)$.

4. Montrer que la norme $\|S_n\|$ diverge vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$.
   Indication : on pourra utiliser la borne $|\sin(t/2)| \le |t/2|$.

   On veut trouver une borne inférieure pour l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \big|\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\big|\,dx$. Pour simplifier les calculs, on va se contenter de montrer une borne pour la moitié de cette intégrale, $\int_0^\pi$ ... On observe que sur chaque intervalle $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ la fonction $|\sin((n+1/2)x)|$ passe de 0 à 1 puis de nouveau à 0. Sur le sous-intervalle $I_{n,k} = [\frac{2k\pi+\pi/2}{2n+1}, \frac{2k\pi+3\pi/2}{2n+1}]$, la fonction $|\sin((n+1/2)x)| \ge 1/\sqrt{2}$. On a donc la borne inférieure

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \Big|\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\Big|\,dx &\ge \sum_{k=1}^{n-1}\int_{I_{n,k}} \Big|\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\Big|\,dx \\
&\ge \sum_{k=1}^{n-1}\int_{I_{n,k}} \frac{2^{-1/2}}{|\sin(x/2)|}\,dx \\
&\ge \sum_{k=1}^{n-1}\int_{I_{n,k}} \frac{2^{-1/2}}{|x/2|}\,dx
\end{aligned}
$$

   On calcule

$$
\int_{I_{n,k}} \frac{1}{x}\,dx = \log(k+\frac{3}{4}) - \log(k+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\,.
$$

   En sommant sur les $k \in \{1,\dots,n-1\}$, on trouve que

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\int_{I_{n,k}} \frac{1}{x}\,dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}\ln(n) + \mathcal{O}(1),
$$

   où on s'est servi du fait que $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \ln(n) + \mathcal{O}(1)$, et que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge. On déduit finalement que $\int_0^\pi \big|D_n(x)\big|\,dx \ge 2^{-1/2}\ln(n) + \mathcal{O}(1)$ pour une certain constante $C > 0$, donc que $\|S_n\|$ diverge lorsque $n \to \infty$.

5. En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus (Exo 1, 2.) à la famille de formes linéaires $(S_n)_{n\ge1}$, montrer qu'il existe au moins une fonction $f_0 \in X$ telle que la suite $(S_n(f_0))_{n\ge1}$ n'est pas bornée. Conclure.

L'espace X est complet, dont le théorème de Banach-Steinhaus s'applique aux suites de formes linéaires sur X. Si, pour toute fonction $f \in X$, la suite $(S_n(f))_{n\geq 1}$ était bornée, alors le théorème de Banach-Steinhaux impliquerait que la suite de formes linéaires $(S_n)_{n\geq 1}$ doit être uniformément bornée. Or la question précédente montre que ce n'est pas le cas. On en déduit qu'il existe au moins une fonction $f_0 \in X$ telle que la suite réelle $(S_n(f_0))_{n\geq 1}$ n'est pas bornée. En particulier, cette suite ne peut pas converger lorsque $n \to \infty$. Cela revient à dire que la série formelle $Sf_0(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_0)$ ne converge pas.

Exercice 3. Le "cube de Hilbert" est un hypercube unité de dimension infinie : chaque point $u \in E$ est décrit par une liste infinie $u = (u_1, u_2, \cdots)$, où chaque coordonnée u_i prend ses valeurs dans $[0,1]$. On définit la fonction suivante sur $E \times E$:

$$\forall u, v \in E, \qquad \delta(u,v) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i - v_i|}{2^i}\,.$$

1. Montrer que δ définit une distance sur E. On considère alors l'espace métrique (E, δ).

   On vérifie d'abord que $\delta(u,v)$ est bien définie pour tout couple (u,v). Comme $u_i, v_i \in [0,1]$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la série définissant $\delta(u,v)$ converge absolument, uniformément par rapport à u, v. On vérifie alors que $\delta(u,v) = 0$ ssi $u_i - v_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, que $\delta(u,v) = \delta(v,u)$. Pour tous $u, v, w \in E$, on a l'inégalité triangulaire pour chaque coordonnée $i \in \mathbb{N}^*$: $|u_i - w_i| \leq |u_i - v_i| + |v_i - w_i|$. En sommant ces inégalités, on obtient l'inégalité triangulaire $\delta(u,w) \leq \delta(u,v) + \delta(v,w)$.
2. Montrer qu'une suite de points $(u^{(n)} \in E)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in E$ si et seulement si chaque coordonnée $u_i^{(n)}$ converge vers u_i lorsque $n \to \infty$.

   La convergence $u^{(n)} \to u$ indique que $\delta(u^{(n)}, u) \to 0$. Comme la série est une somme de termes positifs, il faut que chaque terme tende vers zéro : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

   $$|u_i^{(n)} - u_i| \leq 2^i \delta(u^{(n)}, u) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   Inversement, si chaque coordonnée $u_i^{(n)}$ converge vers u_i, comme on a la borne $|u_i^{(n)} - u_i| \leq 1$ et que la série $\sum_i \frac{1}{2^i} = 1$, le théorème de convergence monotone appliqué à $\ell^1(\mathbb{N}, \mu)$ avec la mesure $\mu = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i}\delta_i$ implique que $u^{(n)} \to u$ au sens de $\ell^1(\mu)$, ce qui revient à dire que $\delta(u^{(n)}, u) \to 0$.

3. On considère une suite quelconque d'éléments de E, $(u^{(n)} \in E)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant un procédé d'extraction diagonale, montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(u^{(\sigma(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E. En déduire que E est un espace compact.

   Considérons d'abord la suite numérique $(u_1^{(n)})_{n\geq 0}$. Elle est bornée, puisque chaque élément est dans $[0,1]$. On peut donc en extraire une sous-suite $(u_1^{(\sigma_1(n))})_{n\geq 0}$, qui converge vers un $u_1 \in [0,1]$ (ici σ_1 est une injection croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Ensuite, la suite $(u_2^{(\sigma_1(n))})_{n\geq 0}$ est bornée, donc on peut extraire $(u_2^{(\sigma_2\circ\sigma_1(n))})_{n\geq 0}$ qui converge vers une limite u_2. On continue d'extraire itérativement, de sorte qu'au rang i on obtient la suites extraite $(u_i^{(\sigma_i\circ\cdots\circ\sigma_1(n))})_{n\geq 0}$ qui converge vers u_i. En fait, pour tout $k \leq i$, la suite extraite $(u_k^{(\sigma_i\circ\cdots\circ\sigma_1(n))})_{n\geq 0}$ converge vers u_k. Le procédé d'extraction diagonale consiste à définir $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) = \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1(n)$. σ est alors automatiquement une injection croissante, et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_i^{(\sigma(n))})_{n\geq 0}$ converge vers u_i lorsque $n \to \infty$.
   Comme la suite $(u^{(n)})_{n\geq 0}$ initiale est quelconque, le critère de Bolzano-Weierstrass nous indique que l'espace E est compact.

4. Soit $(X, \tilde{d})$ un espace métrique. Une fonction $f : X \to E$ est entièrement décrite par l'ensemble de ses fonctions coordonnées $\{f_i : X \to [0,1],\ i \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que f est continue si et seulement si chaque fonction f_i est continue.

   La continuité de f équivaut à dire que pour tout $x \in X$ et toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ convergeant vers $x \in X$, alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ dans E, autrement dit $\delta(f(x_n), f(x)) \to 0$. La question précédente nous indique que cette dernière convergence équivaut au fait que pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_i(x_n))_{n\geq 0}$ dans $[0,1]$ converge vers $f_i(x)$ lorsque $n \to \infty$. Comme x et la suite convergente $(x_n)_{n\geq 0}$ sont arbitraires, cela est donc équivalent au fait que chaque fonction $f_i : X \to [0,1]$ est continue sur tout l'intervalle $[0,1]$.

5. On suppose dorénavant que l'espace métrique $(X, \tilde{d})$ est compact. Justifier que la distance $\tilde{d}$ est bornée. Expliquer comment remplacer $\tilde{d}$ par une distance d à valeur dans $[0,1]$, qui engendre la même topologie sur X que la distance $\tilde{d}$.

   Un espace métrique compact est nécessairement borné, ce qui signifie qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute paire $(x,y) \in X$, $\tilde{d}(x,y) \leq C$. Cela montre bien que la distance $\tilde{d}$ est bornée. Notons $D := \sup_{x,y\in X} \tilde{d}(x,y)$, qu'on suppose strictement positif. La fonction $d(x,y) := \frac{\tilde{d}(x,y)}{D}$ reste une distance, et satisfait bien $0 \leq d(x,y) \leq 1$ pour tous $x, y \in E$.

6. Comme (X, d) est compact, il est automatiquement séparable : il existe une suite de points $(x_i)_{i\geq 1}$ dense dans X. On définit alors une fonction $f : X \to E$ par ses fonctions coordonnées :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in X, \qquad f_i(x) := d(x, x_i).$$

   Montrer que f est continue. En déduire que son image $f(X)$ est un sous-ensemble compact de E.

   On sait que pour tout point $x_i \in X$, la fonction distance $d(\cdot, x_i) : x \mapsto d(x, x_i)$ est continue sur X. Donc les fonctions $f_i : X \to \mathbb{R}$ sont toutes continues. La question 4 nous montre alors que la fonction $f : X \to E$ est elle-même continue. Enfin, l'image d'un compact par une fonction continue est compacte, donc comme X est compact, $f(X) \subset E$ est compact dans E.

7. Soit $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrer alors qu'on a forcément $x = y$. On a donc montré que f est injective.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et se servir d'un point x_i suffisamment proche de x.

   Supposons que $x \neq y$, donc que $d(x,y) > 0$, avec en même temps $f(x) = f(y)$. On aura donc, pour tout point x_i dans la suite dense, $d(x, x_i) = d(y, x_i)$ (autrement dit, x_i est équidistant de x et y). Mais si la suite (x_i) est dense, il y a, pour tout $\epsilon > 0$, un point x_i de la suite tel que $x_i \in B(x, \epsilon)$, autrement dit tel que $d(x, x_i) < \epsilon$. On doit donc avoir $d(y, x_i) = d(x, x_i) < \epsilon$, et ont aboutit, par inégalité triangulaire, à $d(x,y) < 2\epsilon$. En prenant $\epsilon < d(x,y)/2$, on aboutit à une contradiction, ce qui montre que l'hypothèse $f(x) = f(y)$ est impossible si $x \neq y$. La fonction f est donc injective.

8. L'injectivité implique que f est bijective de X vers $f(X) \subset E$. On veut montrer que la réciproque $f^{-1} : f(X) \to X$ est aussi continue. Fixons un $x \in X$ et $\epsilon > 0$ arbitraires. Montrer que si $y \in X$ est tel que $\delta(f(x), f(y))$ est suffisamment petit, alors $d(x,y) < \epsilon$. Conclure.
   Indication : on se servira d'un point x_i suffisamment proche de x.

   Pour cette fonction f particulière, on vérifie que $\delta(f(x), f(y)) = \sum_{i\geq 1} \frac{|d(x,x_i) - d(y,x_i)|}{2^i}$, donc on a pour tout i :

$$|d(x, x_i) - d(y, x_i)| \leq 2^i \delta(f(x), f(y)).$$

On considère maintenant un $\epsilon > 0$, et on veut montrer que si $f(y)$ est suffisamment proche de $f(x)$, alors $d(x, y) \leq \epsilon$. Comme la suite (x_i) est dense, il existe un point x_i tel que $d(x, x_i) < \epsilon/4$. Prenons alors $\eta = 2^{-i-2}\epsilon$, et supposons que $\delta(f(x), f(y)) < \eta$. L'inégalité ci-dessus nous dit alors que $|d(x, x_i) - d(y, x_i)| \leq \epsilon/4$, ce qui implique que $d(y, x_i) \leq d(x, x_i) + \epsilon/4 < \epsilon/2$. Par inégalité triangulaire, on a enfin $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(y, x_i) < 3\epsilon/4 < \epsilon$. On a donc montré que si $\delta(f(x), f(y)) < \eta$, alors $d(x, y) < \epsilon$. Ceci montre bien que l'application réciproque $f^{-1} : f(X) \to X$ est continue.

On a donc construit un homéomorphisme entre l'espace métrique compact (X, d) et un sous-ensemble (compact) $f(X) \subset E$.