Université Paris-Sud
Département de Mathématiques

Master 1 MFA
Problèmes d'évolution

L'usage de l'analyse de Fourier
dans l'étude de problèmes d'évolution.

Patrick Gérard

1. Introduction

Le mathématicien et physicien français Joseph Fourier (1768–1830) a introduit les outils d'analyse qui portent son nom, dans un célèbre mémoire consacré à la *Théorie analytique de la chaleur* (1822), aujourd'hui consultable en ligne.[1] C'est donc dans le but de résoudre une équation aux dérivées partielles d'évolution provenant de la physique que les séries de Fourier et la transformation de Fourier ont été inventées. D'abord outil formel — on trouvera dans le mémoire de Fourier fort peu de justifications mathématiquement rigoureuses de la décomposition en séries de Fourier —, l'analyse de Fourier a inspiré de nombreux travaux mathématiques au XIXème et au XXème siècle, jusqu'à trouver son cadre moderne, là encore particulièrement bien adapté aux équations aux dérivées partielles, dans la théorie des distributions de Laurent Schwartz (1915–2002) à partir de 1945. La théorie de Fourier, qui s'est également révélée être un outil essentiel dans d'autres domaines des mathématiques — théorie des nombres, théorie des groupes, . . .—, trouve donc naturellement sa place dans un cours consacré aux problèmes d'évolution. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord rappeler les notions d'analyse de Fourier qui nous seront utiles dans la suite. Un premier paragraphe sera ainsi consacré aux séries de Fourier des distributions périodiques, à une, puis plusieurs variables, et sera suivi d'un paragraphe de présentation concise de la transformation de Fourier des distributions tempérées, qui est la contribution principale de L. Schwartz à cette théorie. Le lecteur est supposé avoir suivi, préalablement à ce cours, un cours d'introduction à la théorie des distributions, que nous utiliserons librement. Puis nous consacrerons deux autres paragraphes à des exemples d'équations d'évolution à coefficients constants pour lesquelles l'usage de l'analyse de Fourier est déterminant : l'équation de la chaleur et l'équation des ondes. Enfin, un dernier paragraphe sera l'occasion d'introduire au concept général d'équation dispersive, et de discuter en détail l'équation de Schrödinger sans interaction.

1. Voir le site wikipedia consacré à Joseph Fourier, et son lien vers *googlebooks*.

2. Rappels et compléments sur les séries de Fourier

2.1. **Notations préliminaires.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite périodique de période $\gamma \in \mathbb{R}$ — ou, en abrégé, γ–périodique —si, pour tout nombre réel x,

$$f(x+\gamma) = f(x) \ .$$

Dans la suite, sans perte de généralité, nous supposerons toujours que γ est un nombre réel strictement positif. Le but de la décomposition en séries de Fourier est d'établir, pour une fonction γ– périodique f, une formule du type

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{ik\omega x} \ , \tag{1}$$

où ω est la pulsation associée à γ,

$$\omega = \frac{2\pi}{\gamma} \ .$$

A supposer qu'une décomposition de type (1) soit vraie, une des difficultés est de trouver une formule pour les constantes c_k, une autre est de préciser en quel sens la série dans le second membre de (1) est convergente. Ces deux questions sont liées : si l'on suppose que f est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, et si la série en question converge vers f en moyenne, c'est–à –dire en norme L^1 sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors on a nécessairement les formules de Fourier,

$$c_k = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} f(x) \, \mathrm{e}^{-ik\omega x} \, dx \ , \ \ k \in \mathbb{Z} \ . \tag{2}$$

Étant donné une fonction f γ–périodique et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, les coefficients c_k donnés par les formules (2) sont appelés coefficients de Fourier de f, et la série du second membre de (1), avec ces coefficients c_k, est appelée la série de Fourier de f. Il est bien sûr naturel de se demander si, à ce niveau de généralité, la série de Fourier de f converge toujours vers f, par exemple en moyenne, ou pour tout autre type de convergence. Nous laisserons de côté ici la question de la convergence simple, un problème délicat qui a beaucoup mobilisé les mathématiciens au XIXème et au XXème siècle, mais dont la pertinence dans le contexte d'un cours sur les équations aux dérivées partielles est limitée. Revenons plutôt à la convergence en moyenne. Hélas, on peut montrer qu'il existe des fonctions γ–périodiques et intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, dont la série de Fourier ne converge pas en moyenne. [2] Par ailleurs, dans le contexte d'application aux équations

2. Il en existe même un sous–ensemble G_δ–dense dans $L^1(0,\gamma)$.

différentielles, on souhaiterait pouvoir dériver terme à terme la décomposition (1), pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega c_k \, \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

Ces deux arguments montrent que le mode de convergence en moyenne n'est pas non plus le plus approprié ici, et qu'il est naturel de faire plutôt appel au formalisme des distributions. Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, rappelons que $C_0^\infty(I)$ désigne l'espace des fonctions

$$\varphi : I \to \mathbb{C}$$

de classe C^∞ et à support compact, et que $\mathcal{D}'(I)$ désigne l'espace des distributions sur I.

Venons–en à la définition de la translatée d'une fonction ou d'une distribution. Pour tout nombre réel a et toute fonction f sur I, on désigne par $\tau_a f$ la fonction sur l'intervalle translaté $I+a$ définie par

$$\tau_a f(x) = f(x-a) \ , \ x \in I+a \ .$$

Si $T \in \mathcal{D}'(I)$, la translatée de T par a est l'élément $\tau_a T$ de $\mathcal{D}'(I+a)$ défini par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I+a) \ , \ \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \ .$$

En vertu du théorème de changement de variable, cette définition coïncide avec la précédente lorsque $T = f$ est une fonction localement intégrable. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante.

Définition 1. *Une distribution T sur $\mathbb{R}$ est dite γ– périodique si*

$$\tau_\gamma T = T \ .$$

On désigne par $\mathcal{D}'_\gamma$ l'espace des distributions γ– périodiques sur $\mathbb{R}$.

2.2. **Le résultat principal.** Rappelons qu'une suite (T_n) de $\mathcal{D}'(I)$ est dite convergente vers $T \in \mathcal{D}'(I)$ si, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(I)$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ .$$

Si $I = \mathbb{R}$ et si chaque T_n est γ –périodique, alors la limite T est γ– périodique. En conséquence, si une famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes est telle que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors la distribution définie par la somme de cette série est γ– périodique. Cette observation nous conduit à introduire une classe particulière de familles $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Définition 2. *On dit qu'une famille* $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *de nombres complexes est à croissance polynomiale – ou à croissance tempérée — s'il existe des constantes* $C > 0$ *et* $M > 0$ *telles que*

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ |c_k| \leq C(1+|k|)^M\ .$$

Cette définition est motivée par le résultat suivant.

Proposition 1. *La série*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *si et seulement si la famille* $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est à croissance polynomiale.*

Démonstration. 1) La condition est nécessaire. Supposons que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

soit convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_k = c_k\, \mathrm{e}^{ik\omega x}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque k tend vers l'infini. D'après le théorème de Banach–Steinhaus, cette suite est nécessairement bornée dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, c'est–à–dire que, pour tout intervalle compact $[a,b]$, il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \geq 0$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[a,b]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\langle T_k, \varphi\rangle| \leq C \max_{x\in[a,b]} \max_{n\leq N} |\varphi^{(n)}(x)|. \tag{3}$$

Fixons alors $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1,1]$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, dx = 1\ .$$

Appliquons l'inégalité (3) ci–dessus à $[a,b] = [-1,1]$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, à

$$\varphi_k(x) = |k|\rho(kx)\ .$$

Alors

$$\langle T_k, \varphi_k\rangle = c_k|k| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega x}\rho(kx)\, dx = c_k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\omega y}\rho(y)\, dy = c_k\ .$$

L'inégalité (3) devient, pour $|k| \neq 0$,

$$|c_k| \leq C \max_{x\in\mathbb{R}} \max_{n\leq N} |\rho^{(n)}(x)|\, k^{N+1}\ .$$

On en déduit que (c_k) est à croissance polynomiale.

2) La condition est suffisante. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille à croissance polynomiale,

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ |c_k| \leq C(1+|k|)^M\ .$$

Le point crucial est le lemme suivant.

Lemme 1. *Pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour tout entier naturel n, pour tout nombre réel y,*

$$|y|^n \left| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(n)}(x)|\, dx \ .$$

En effet, après une intégration par parties, il vient

$$iy \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi'(x)\, dx \ ,$$

et donc, après n intégrations par parties successives,

$$(iy)^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(x)\, dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi^{(n)}(x)\, dx \ .$$

Le lemme en résulte, après avoir pris le module des deux membres. □

Du lemme 1, on déduit que, pour tout intervalle compact $[a, b]$, il existe une constante $C_{a,b,\omega}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $[a, b]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega x} \varphi(x)\, dx \right| \leq C_{a,b,\omega} (1 + |k|)^{-N} \max_{x \in [a,b]} \max_{n \leq N} |\varphi^{(n)}(x)| \ .$$

Choisissons $N = M + 2$. Alors $T_k = c_k \mathrm{e}^{ik\omega x}$ vérifie

$$|\langle T_k, \varphi \rangle| \leq C\, C_{a,b,\omega} (1 + |k|)^{-2} \max_{x \in [a,b]} \max_{n \leq N} |\varphi^{(n)}(x)| \ .$$

En conséquence, la famille $(\langle T_k, \varphi \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et la valeur absolue de sa somme est majorée par

$$K_{a,b} \max_{x \in [a,b]} \max_{n \leq N} |\varphi^{(n)}(x)| \ .$$

La série des T_k converge donc au sens des distributions. Ceci achève la démonstration.

En résumé, pour toute famille $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ à croissance polynomiale, la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

définit une distribution γ–périodique. Le résultat central de ce paragraphe est que l'on obtient ainsi toutes les distributions γ–périodiques.

Théorème 1. *Pour toute distribution γ– périodique T, il existe une unique famille $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ à croissance polynomiale telle que*

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

De plus, dans le cas particulier où $T = f$ est une fonction localement intégrable γ–périodique, alors les c_k sont donnés par la formule de Fourier,

$$c_k = \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma f(x)\, \mathrm{e}^{-ik\omega x}\, dx \ , \ \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Les coefficients c_k sont appelés coefficients de Fourier de T, et notés $c_k(T)$. La démonstration du théorème 1 sera donnée en section suivante, où l'on explicitera également une formule pour les c_k dans le cas général où T est une distribution. Notons tout de suite que, en utilisant la continuité de la dérivation pour la convergence au sens des distributions, on en déduit immédiatement la formule espérée à la section précédente,

$$T' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\omega c_k\, \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

2.3. **Démonstration du théorème 1.** Elle comporte plusieurs étapes.

2.3.1. *Première étape : la formule de Poisson.* Il s'agit d'identifier la distribution γ–périodique correspondant à $c_k = 1$ pour tout k.

Proposition 2 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soient $\gamma > 0$ et $\omega = 2\pi/\gamma$. Alors*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\omega x} = \gamma \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \delta_{\ell\gamma} \ ,$$

où δ_b désigne la masse de Dirac en $x = b$.

Démonstration. Posons

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

On constate que

$$\mathrm{e}^{i\omega x} T = T \ .$$

Désignons par T_0 la restriction de T à l'intervalle ouvert $]-\gamma, \gamma[$. L'identité ci–dessus entraîne, dans $\mathcal{D}'(]-\gamma,\gamma[)$,

$$(\mathrm{e}^{i\omega x} - 1) T_0 = 0 \ .$$

Comme la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{i\omega x} - 1}{x}$$

est C^∞ et ne s'annule pas sur $]-\gamma,\gamma[$, on en déduit que

$$x T_0 = 0 \ .$$

D'après un résultat élémentaire de théorie des distributions, ceci entraîne

$$T_0 = c\delta_0 \ ,$$

pour une constante $c \in \mathbb{C}$ à déterminer. En utilisant la γ–périodicité de T, on en déduit que, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, la restriction T_ℓ de T à l'intervalle ouvert $I_\ell =](\ell-1)\gamma, (\ell+1)\gamma[$ n'est autre que

$$T_\ell = \tau_{\ell\gamma} T_0 = c\tau_{\ell\gamma}\delta_0 = c\delta_{\ell\gamma} \ .$$

Considérons la distribution

$$S = c\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \delta_{\ell\gamma} \ .$$

Alors T et S coïncident sur chaque I_ℓ, dont la réunion pour $\ell \in \mathbb{Z}$ est égale à $\mathbb{R}$. On en déduit que $T = S$. Il reste à déterminer la constante c. Testons T et S sur la fonction

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\rho(\varepsilon x) \ ,$$

où $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est d'intégrale 1. D'une part,

$$\langle T, \varphi_\varepsilon\rangle = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega x}\rho(\varepsilon x)\, dx = 1 + \sum_{k\neq 0}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega y/\varepsilon}\rho(y)\, dy \ ,$$

et le lemme 1 assure que, pour $k \neq 0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega y/\varepsilon}\rho(y)\, dy\right| \leq C\frac{\varepsilon^2}{k^2} \ ,$$

de sorte que, lorsque ε tend vers 0,

$$\langle T, \varphi_\varepsilon\rangle \to 1 \ .$$

D'autre part, en utilisant une somme de Riemann, si ε tend vers 0,

$$\langle S, \varphi_\varepsilon\rangle = c\varepsilon\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \rho(\varepsilon\ell\gamma) \to \frac{c}{\gamma}\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx \ = \frac{c}{\gamma}.$$

On en conclut $c = \gamma$, ce qui achève la démonstration. □

2.3.2. *Deuxième étape : périodisée d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.* Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On définit $\varphi^\sharp : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\varphi^\sharp(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi(x - \ell\gamma) \ .$$

Il est clair que $\varphi^\sharp$ est une fonction γ–périodique et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$— sur un intervalle de compact, seul un nombre fini de termes dans la somme sont non nuls. Le lemme suivant établit deux propriétés très simples de cette opération.

Lemme 2. – *Il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \chi^\sharp(x) = 1$.*

– *Pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour toute distribution γ-périodique T, $\langle T, \varphi\psi^\sharp\rangle = \langle T, \varphi^\sharp\psi\rangle$.*

Démonstration. Soit $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives ou nulles et telle que $\chi_1 = 1$ sur l'intervalle $[0, \gamma]$. Alors la fonction $\chi_1^\sharp$ est au moins égale à 1 sur $[0, \gamma]$, donc sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité. On peut donc considérer la fonction

$$\chi = \frac{\chi_1}{\chi_1^\sharp} ,$$

qui vérifie les conditions requises.

Enfin, si $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\varphi\psi^\sharp = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi\tau_{\ell\gamma}\psi ,$$

la série étant convergente, puisqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\psi^\sharp\rangle &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \langle T, \varphi\, \tau_{\ell\gamma}\psi\rangle = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \langle T, \tau_{\ell\gamma}(\tau_{-\ell\gamma}\varphi\, \psi)\rangle \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \langle T, \tau_{-\ell\gamma}\varphi\, \psi\rangle = \langle T, \varphi^\sharp\psi\rangle , \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la périodicité de T. □

2.3.3. *Troisième étape : synthèse.* Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 1. Appliquons le lemme 2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi^\sharp = 1$, et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ quelconque. Pour toute distribution T γ–périodique, calculons

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\chi^\sharp\rangle = \langle T, \chi\varphi^\sharp\rangle .$$

La proposition 2 permet d'obtenir la décomposition en série de Fourier de $\varphi^\sharp$.

Proposition 3.

$$\varphi^\sharp(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^\sharp(\varphi)\mathrm{e}^{ik\omega x} \ , \ c_k^\sharp(\varphi) = \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ik\omega y}\varphi(y)\, dy ,$$

la convergence de la série de fonctions ci–dessus étant uniforme sur $\mathbb{R}$*, ainsi que pour les dérivées à tous ordres.*

En effet, la convergence de la série provient du lemme 1 et des théorème usuels sur la convergence normale des suites de fonctions dérivées. Il suffit donc de montrer l'identité entre les deux membres dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or

$$\varphi^\sharp = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \delta_{\ell\gamma} * \varphi = \frac{1}{\gamma}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\omega x} * \varphi,$$

où l'on a utilisé la proposition 2. Il reste à observer que

$$\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{ik\omega x} * \varphi = \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ik\omega(x-y)}\varphi(y)\, dy = c_k^\sharp(\varphi)\mathrm{e}^{ik\omega x} .$$

Grâce à la proposition 3, on peut écrire

$$\chi\varphi^\sharp = \chi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^\sharp(\varphi) \mathrm{e}^{ik\omega x} \ ,$$

la convergence de la série ayant lieu dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. On en déduit, par définition de la continuité d'une distribution,

$$\langle T, \chi\varphi^\sharp\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^\sharp(\varphi)\langle T, \chi \mathrm{e}^{ik\omega x}\rangle.$$

Compte tenu de la formule donnant $c_k^\sharp(\varphi)$, cette identité traduit que

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega x} \ ,$$

avec

$$c_k = \frac{1}{\gamma}\langle T, \chi \mathrm{e}^{-ik\omega x}\rangle.$$

La famille (c_k) ainsi définie est à croissance polynomiale, en vertu du lemme 1 ci–dessus, mais aussi en utilisant la formule donnant c_k et la définition d'une distribution.

Nous avons donc établi l'existence d'un développement en série de Fourier pour toute distribution périodique. Montrons maintenant l'unicité des coefficients. La proposition 3 appliquée à χ, conduit à

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^\sharp(\chi) \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

En intégrant terme à terme la série normalement convergente du second membre, on obtient

$$c_0^\sharp(\chi) = 1 \ , \ c_k^\sharp(\chi) = 0, \quad k \neq 0 \ .$$

Supposons alors que

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega x} \ ,$$

pour une certaine famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ à croissance tempérée. Alors, en testant sur la fonction

$$\varphi = \frac{1}{\gamma}\chi \, \mathrm{e}^{-ip\omega x}, \ , \ p \in \mathbb{Z},$$

on en déduit

$$\frac{1}{\gamma}\langle T, \chi \mathrm{e}^{-ip\omega x}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k c_{p-k}^\sharp(\chi) = c_p \ .$$

En résumé, nous venons d'établir le résultat suivant.

Théorème 2. *Pour toute distribution $\gamma-$ périodique T, il existe une unique famille $(c_k(T))_{k\in\mathbb{Z}}$ à croissance polynomiale telle que*

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T) \, \mathrm{e}^{ik\omega x} \ .$$

De plus, pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi^\sharp = 1$, $c_k(T)$ est donné par la formule

$$c_k(T) = \frac{1}{\gamma}\langle T, \chi \mathrm{e}^{-ik\omega x}\rangle, k \in \mathbb{Z} \ .$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1, il reste à vérifier que, si $T = f$ est une fonction localement intégrable γ–périodique, alors la formule ci–dessus pour $c_k(f)$ coïncide avec la formule usuelle de Fourier. Or ceci résulte du calcul élémentaire suivant,

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi(x)\mathrm{e}^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{\gamma}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_{\ell\gamma}^{(\ell+1)\gamma} f(x)\chi(x)\mathrm{e}^{-ik\omega x}\,dx \\
&= \frac{1}{\gamma}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_0^{\gamma} f(x)\chi(x-\ell\gamma)\mathrm{e}^{-ik\omega x}\,dx \\
&= \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} f(x)\chi^\sharp(x)\mathrm{e}^{-ik\omega x}\,dx \ ,
\end{aligned}$$

et le fait que $\chi^\sharp = 1$ achève la démonstration du théorème 1.

2.4. **Quelques cas particuliers.**

2.4.1. *Convergence en moyenne quadratique et espaces de Sobolev.* On désigne par L^2_γ l'espace des (classes de) fonctions γ– péridodiques et localement de carré intégrables sur $\mathbb{R}$. Muni du produit scalaire hermitien

$$(f|g) = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} f(x)\overline{g(x)}\,dx \ ,$$

qui induit la convergence en moyenne quadratique, l'espace L^2_γ est un espace de Hilbert. Ce résultat fondamental en théorie de l'intégrale de Lebesque, eut un retentissement particulier à l'é poque (1907), précisément parce qu'il permettait, *via* la théorie des séries de Fourier, d'identifier l'espace L^2_γ à l'espace de suites $\ell^2(\mathbb{Z})$, et de traduire ainsi toutes les équations linéaires sur L^2_γ en des systèmes linéaires sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, avec des matrices infinies (travaux du mathématicien hongrois Frédéric Riesz (1880–1956) et du mathématicien autrichien Ernst Sigismund Fisher (1875–1954)). En effet, si l'on pose

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{ik\omega x} \ , \ k \in \mathbb{Z},$$

on constate aisément que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de L^2_γ. Le point essentiel est alors

Théorème 3. *La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale dans L^2_γ. En d'autres termes, le sous–espace vectoriel de L^2_γ engendré par les les $e_k, k\in\mathbb{Z}$, est dense dans L^2_γ.*

Démonstration. Il existe beaucoup de démonstrations de ce résultat, connu bien avant la théorie des distributions, et même, d'une certaine manière, bien avant la théorie de Lebesque —*cf.* le théorème d'approximation de Weierstrass. Nous en donnons ici une démonstration très courte fondée sur le théorème 1. En vertu du théorème de projection orthogonale sur les sous espaces fermés d'un espace de Hilbert, il suffit de montrer que, si un élément f de L^2_γ est orthogonal à tous les e_k, alors il est nul. Or, si l'on considère f comme un élément de $\mathcal{D}'_\gamma$, on constate que

$$c_k(f) = (f|e_k)\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Le théorème résulte donc du théorème 1. □

On en déduit immédiatement le résultat important suivant.

Corollaire 1. *L'application*

$$f\in L^2_\gamma \longmapsto (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}\in \ell^2(\mathbb{Z})$$

est une isométrie bijective entre les espaces de Hilbert L^2_γ et $\ell^2(\mathbb{Z})$. En particulier, pour toute fonction f de L^2_γ, la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, et on a la formule de Parseval

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma |f(x)|^2\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2\ ,\ \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}\ .$$

De plus, un élément $T\in\mathcal{D}'_\gamma$ appartient à L^2_γ si et seulement si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(T)|^2 < +\infty\ .$$

Pour tout entier naturel m, on définit l'espace de Sobolev H^m_γ comme l'ensemble des fonctions $f\in L^2_\gamma$ telles que

$$\forall k\in\{1,\dots,m\}\ ,\ f^{(k)}\in L^2_\gamma\ ,$$

où les dérivées sont prises au sens des distributions. Compte tenu de la formule déjà observée

$$c_k(f') = ik\omega\, c_k(f)\ ,$$

l'espace H^m_γ se décrit aisément au moyen des coefficients de Fourier, selon le résultat suivant.

Corollaire 2. *Une distribution $u\in\mathcal{D}'_\gamma$ appartient à H^m_γ si et seulement si*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^m|c_k(u)|^2 < +\infty\ .$$

Plus généralement, on définit, pour tout nombre réel s, l'espace de Sobolev

$$H^s_\gamma = \{u \in \mathcal{D}'_\gamma : \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |c_k(u)|^2 < +\infty\} \ ,$$

qui, munit du produit scalaire hermitien

$$(u|v)_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s c_k(u)\overline{c_k(v)} \ ,$$

est un espace de Hilbert. On notera que $H^0_\gamma = L^2_\gamma$. On obtient ainsi une famille décroissante de sous–espaces de $\mathcal{D}'_\gamma$, vérifiant

$$\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_\gamma = \mathcal{D}'_\gamma \ .$$

En effet, la condition de croissance polynomiale

$$|c_k(u)| \leq C(1+|k|)^M \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

entraîne

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{-M-1} |c_k(u)|^2 < +\infty \ .$$

À titre d'illustration, mentionnons le résultat suivant, qui est un cas particulier des injections de Sobolev.

Proposition 4. *Pour tout $s > \frac{1}{2}$, tout élément de H^s_γ est une fonction continue, dont la série de Fourier converge normalement.*

En effet, si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |c_k(u)|^2 < +\infty \ ,$$

alors, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(u)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+k^2)^s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |c_k(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Puisque $s > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+k^2)^s} < +\infty$$

de sorte la série de Fourier de u converge normalement, et donc que u est une fonction continue.

2.4.2. *Le cas des fonctions indéfiniment dérivables.* Terminons par une caractérisation très simple des fonctions C^∞ périodiques.

Théorème 4. *Une distribution γ–périodique est de classe C^∞ si et seulement si la suite de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide,*

$$\forall p \geq 1 \ , \ k^p c_k(u) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

En effet, si une famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à décroissance rapide, la série de Fourier correspondante

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

définit une fonction f de classe C^∞, en vertu des théorèmes usuels de dérivation des séries de fonctions. Réciproquement, si $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ est γ–périodique, alors une variante du lemme 1 assure que la suite des $c_k(f)$ est à décroissance rapide. En effet, en intégrant p fois par parties,

$$(ik\omega)^p c_k(f)=c_k(f^{(p)}) \ ,$$

et $c_k(f^{(p)})$ est unifomément borné par $\max|f^{(p)}|$.

En conséquence, si on désigne par C^∞_γ l'espace des fonctions C^∞ γ–périodique sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$C^\infty_\gamma=\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_\gamma \ .$$

2.5. **Généralisation à la dimension supérieure.** Tous les résultats vus sur $\mathbb{R}$ se généralisent sans difficulté au cas de $\mathbb{R}^d$. Pour cela, appelons *réseau* de $\mathbb{R}^d$ toute partie Γ de $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$\Gamma=\{\sum_{j=1}^d \ell_j\varepsilon_j,(\ell_1,\dots\ell_d)\in\mathbb{Z}^d\} \ ,$$

où $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$. Un exemple de réseau de $\mathbb{R}^d$ est bien sûr

$$\Gamma=\mathbb{Z}^d \ ,$$

correspondant au cas où $(e_1,\dots,e_d)$ est la base canonique. Un réseau de $\mathbb{R}^d$ n'est autre que l'image de $\mathbb{Z}^d$ par une application linéaire bijective sur $\mathbb{R}^d$. C'est en particulier un sous–groupe additif de $\mathbb{R}^d$.

Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^d$, on définit la translatée par a d'une fonction ou d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$ de manière analogue au cas $d=1$. Étant donné un réseau Γ de $\mathbb{R}^d$, on dit qu'une fonction ou une distribution sur $\mathbb{R}^d$ est Γ– périodique si elle est égale à sa translatée par tout élément de Γ. On note $\mathcal{D}'_\Gamma$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d$ qui sont Γ–périodiques. Voici un exemple fondamental de fonction Γ– périodique. Munissons $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire euclidien canonique

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^d x_jy_j \ .$$

Pour tout réseau Γ, posons

$$\Gamma^*=\{k\in\mathbb{R}^d:\forall\gamma\in\Gamma,\langle k,\gamma\rangle\in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Alors Γ^* est un réseau de $\mathbb{R}^d$, décrit par

$$\Gamma^* = \{\sum_{j=1}^{d} \ell_j \varepsilon_j^*, (\ell_1, \dots \ell_d) \in \mathbb{Z}^d\} \ ,$$

où $(\varepsilon_1^*, \dots e_d^*)$ est la base de $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\langle \varepsilon_j^*, \varepsilon_\ell \rangle = 2\pi \delta_{j\ell} \ , \ j, \ell = 1, \dots, d \ .$$

Pour tout $k \in \Gamma^*$, la fonction e_k définie par

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}$$

est une fonction C^∞ Γ–périodique sur $\mathbb{R}^d$. On a alors le théorème suivant

Théorème 5. *Soit*

$$\Gamma = \{\sum_{j=1}^{d} \ell_j \varepsilon_j, (\ell_1, \dots \ell_d) \in \mathbb{Z}^d\}$$

un réseau de $\mathbb{R}^d$. Pour toute distribution Γ– périodique T, il existe une unique famille $(c_k(T))_{k\in\Gamma^*}$ à croissance polynomiale telle que

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T)\, e_k \ .$$

De plus, dans le cas particulier où $T = f$ est une fonction localement intégrable Γ–périodique, alors les c_k sont donnés par la formule de Fourier,

$$c_k = \frac{1}{|P_\Gamma|} \int_{P_\Gamma} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\langle k,x\rangle}\, dx \ , \ k \in \Gamma^* \ ,$$

où

$$P_\Gamma = \{\sum_{j=1}^{d} x_j \varepsilon_j \ , \ x_j \in [0,1[, j = 1, \dots, d\}$$

est aparfois appelé domaine fondamental de Γ, et où $|P_\Gamma|$ désigne la mesure de Lebesgue de P_Γ.

La démonstration de ce théorème suit très précisément le schéma que nous avons donné en dimension 1. Le lecteur est invité à l'écrire par lui–même, à titre d'exercice. Nous nous contentons de mentionner la formule de Poisson, qui, comme en dimension 1, est un argument clé de la preuve, et une identité très utile en général.

Proposition 5 (Formule sommatoire de Poisson multidimensionnelle)**.** *Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^d$, et soit Γ^* son réseau dual.*

$$\sum_{k\in\Gamma^*} \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle} = |P_\Gamma| \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \ .$$

Enfin, les cas particuliers étudiés en dimension 1 s'étendent eux aussi sans difficulté au cas de toute dimension. Ainsi, la famille $(e_k)_{k\in\Gamma^*}$ est une base hilbertienne de l'espace L^2_Γ des fonctions Γ–périodiques localement de carrés intégrables, muni du produit scalaire

$$(f|g) = \frac{1}{|P_\Gamma|}\int\limits_{P_\Gamma} f(x)\overline{g(x)}\,dx\ ,$$

l'espace C^∞_Γ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et Γ–périodiques correspond aux familles de coefficients de Fourier à décroissance rapide, et l'on peut définir une famille décroissante d'espace de Sobolev H^s_Γ telle que

$$\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_\Gamma = \mathcal{D}'_\Gamma\ ,\ \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_\Gamma = C^\infty_\Gamma\ .$$

Enfin, si $s > \frac{d}{2}$, tout élément de H^s_Γ est une fonction continue, de série de Fourier normalement convergente.

3. Rappels et compléments sur la transformation de Fourier

3.1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier. Revenons à la proposition 3, convenablement généralisée à la dimension d, et écrivons, pour tout $R > 0$, le développement en série de Fourier de la périodisée selon le réseau $\Gamma = 2\pi R\mathbb{Z}^d$ d'une fonction φ de $C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\sum_{\gamma\in 2\pi R\mathbb{Z}^d}\varphi(x-\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{(2\pi R)^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle \frac{k}{R},y\rangle}\varphi(y)\,dy\right)\mathrm{e}^{i\langle\frac{k}{R},x\rangle}\ . \tag{4}$$

Dans cette identité, apparaît clairement la fonction

$$\hat{\varphi}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx\ . \tag{5}$$

D'après le lemme 1, cette fonction est à décroissance rapide en la variable $\xi\in\mathbb{R}^d$, c'est–à–dire

$$\forall N\geq 0, |\xi|^N\hat{\varphi}(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

où $|\xi|$ désigne, par exemple, la norme euclidienne canonique de $\xi\in\mathbb{R}^d$. En dérivant sous le signe intégrale, on constate de même que toutes les dérivées partielles de $\hat{\varphi}$ sont à décroissance rapide. Passons à la limite, lorsque R tend vers $+\infty$, dans l'identité (4), réécrite sous la forme

$$\sum_{\gamma\in 2\pi R\mathbb{Z}^d}\varphi(x-\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{(2\pi R)^d}\hat{\varphi}\left(\frac{k}{R}\right)\mathrm{e}^{i\langle\frac{k}{R},x\rangle}\ .$$

Étant donné $x\in\mathbb{R}^d$, le premier membre est égal à $\varphi(x)$ pour R assez grand. Quant au second membre, nous pouvons le relier à une somme de Riemann pour la fonction

$$\psi_x(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \ ,$$

dont nous savons déjà qu'elle est à décroissance rapide à l'infini en ξ ainsi que toutes ses dérivées partielles. Écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_x(\xi)\, d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\frac{k}{R}+\frac{1}{R}[0,1[^d} \psi_x(\xi)\, d\xi \ ,$$

et

$$\int_{\frac{k}{R}+\frac{1}{R}[0,1[^d} \psi_x(\xi)\, d\xi = \frac{1}{R^d}\psi_x\left(\frac{k}{R}\right) + \frac{1}{R^d}\int_{[0,1[^d}\int_0^1 d\psi_x\left(\frac{k}{R}+t\frac{\eta}{R}\right).\frac{\eta}{R}\, d\eta \ .$$

On en déduit que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \psi_x(\xi)\, d\xi - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{R^d}\psi_x\left(\frac{k}{R}\right)\right| \le \frac{C}{R^{d+1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(1+\frac{|k|}{R}\right)^{-d-1} \le \frac{C'}{R} \ .$$

Le second membre de (4) tend donc vers

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi_x(\xi)\, d\xi \ ,$$

et on obtient finalement l'identité

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \ . \tag{6}$$

La formule (5) définit la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ de la fonction φ. Nous venons de montrer que, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, la fonction φ s'exprime à l'aide de sa transformée de Fourier par la formule presque semblable (6), dite de Fourier inverse. Compte tenu de l'analogie entre ces deux formules, il est souhaitable de trouver un espace de fonctions qui soit stable par la transformation de Fourier donnée par (5) et par son inverse donnée par (6). C'est l'objet de l'espace de Schwartz.

3.2. **L'espace $\mathscr{S}$ de Schwartz.** En 1947, Laurent Schwartz introduit l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées partielles. En d'autres termes, une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^d \ , \ \forall\beta \in \mathbb{N}^d \ , \ x^\alpha\partial^\beta\varphi(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On munit cet espace vectoriel des semi–normes

$$N_p(\varphi) = \max\{\|x^\alpha\partial^\beta\varphi\|_{L^\infty}, |\alpha| \le p \ , |\beta| \le p\} \ .$$

On peut montrer que la topologie ainsi définie est métrisable, et fait de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ un espace complet.
La transformation de Fourier agit sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de la façon suivante.

Proposition 6. *Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a les formules*

$$\widehat{x^\alpha \varphi} = (i\partial)^\alpha \hat{\varphi} \ , \ \widehat{\partial^\beta \varphi} = (i\xi)^\beta \hat{\varphi} \ . \tag{7}$$

Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ , \ N_p(\hat{\varphi}) \leq C \, N_q(\varphi) \ .$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En généralisant au cas multidimensionnel les intégrations par parties successives du lemme 1, on déduit que la fonction $\hat{\varphi}$ est à décroissance rapide. Puis, par dérivation sous le signe intégrale, on constate qu'elle est de classe C^∞, et que ses dérivées sont à décroissance rapide. La formule

$$\widehat{x^\alpha \varphi} = (i\partial)^\alpha \hat{\varphi}$$

provient de dérivations répétées sous le signe intégrale, tandis que

$$\widehat{\partial^\beta \varphi} = (i\xi)^\beta \hat{\varphi}$$

provient d'intégrations par parties répétées. Enfin, en constatant que

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1} \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{d+1} |\varphi(x)| \leq C' N_{d+1}(\varphi) \ ,$$

et en combinant avec les formules précédentes, on conclut que, pour tout p,

$$N_p(\hat{\varphi}) \leq C_p N_{p+d+1}(\varphi) \ .$$

□

Nous aurons également du lemme de densité suivant.

Lemme 3. *L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un sous–espace dense de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En d'autres termes, pour tout élément φ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite (φ_n) d'éléments de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ N_p(\varphi - \varphi_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

En effet, soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur la boule unité. Posons

$$\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \ , \ \varphi_n = \chi_n \varphi \ .$$

Alors $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, et

$$x^\alpha \partial^\beta (\varphi - \varphi_n) = (1 - \chi_n) x^\alpha \partial^\beta \varphi - \sum_{0 < \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma \chi_n x^\alpha \partial^{\beta - \gamma} \varphi \ .$$

D'une part, si $\gamma > 0$,

$$\partial^\gamma \chi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} \partial^\gamma \chi\left(\frac{x}{n}\right)$$

donc converge uniformément vers 0 lorsque n tend vers l'infini. D'autre part, $1-\chi_n$ est supportée dans

$$|x| \geq n \ ,$$

de sorte que

$$\|(1-\chi_n)x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On a donc montré que, pour tout p, $N_p(\varphi - \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il est maintenant aisé de conclure à la formule d'inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 6. *L'application linéaire*

$$\mathscr{F} : \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

est bijective, d'inverse donné par

$$\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathscr{F} = (2\pi)^{-d}\mathscr{F} \circ \sigma \ ,$$

où σ est l'involution définie par

$$\sigma\varphi(x) = \varphi(-x) \ .$$

Démonstration. Dans la section précédente, on a montré que

$$(2\pi)^{-d}\mathscr{F} \circ \sigma \circ \mathscr{F}(\varphi) = \varphi$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Or l'opérateur $(2\pi)^{-d}\mathscr{F} \circ \sigma \circ \mathscr{F}$ est continu sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ grâce à la proposition 6, et d'autre part $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ en vertu du lemme 3. Il s'ensuit que

$$(2\pi)^{-d}\mathscr{F} \circ \sigma \circ \mathscr{F}(\varphi) = \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, on vérifie aisément que $\mathscr{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathscr{F}$. L'opérateur

$$(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathscr{F} = (2\pi)^{-d}\mathscr{F} \circ \sigma$$

est donc bien un inverse à droite et à gauche de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Aux formules (7), il convient d'ajouter

$$\mathscr{F}(\mathrm{e}^{i\langle .,\eta\rangle}\varphi) = \tau_\eta \mathscr{F}\varphi \ , \ \mathscr{F}(\tau_a\varphi) = \mathrm{e}^{-i\langle .,a\rangle}\mathscr{F}\varphi \ . \tag{8}$$

Voici un exemple classique, qui nous sera très utile.

Lemme 4. *Pour tout nombre réel $\lambda > 0$,*

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}\right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}} \ .$$

Démonstration. Commençons par le cas $d = 1$, $\lambda = 1$. Prenons la transformée de Fourier des deux membres de l'identité

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \ .$$

Il vient
$$\xi \mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\ .$$
Intégrant cette équation différentielle, on obtient
$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\ ,$$
avec
$$C = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx > 0\ .$$
La valeur de C peut se retrouver en appliquant la transformation de Fourier inverse,
$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = C\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = \frac{C^2}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ ,$$
d'où
$$C = (2\pi)^{1/2}\ .$$
Le cas $\lambda > 0$ quelconque s'en déduit par changement de variable dans l'intégrale de Fourier,
$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\lambda^{1/2}}\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{\xi}{\lambda^{1/2}}\right)\ ,$$
et le cas d quelconque provient du théorème de Fubini, qui entraîne
$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}\right)(\xi_1,\dots,\xi_d) = \prod_{j=1}^{d}\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x_j^2}{2}}\right)(\xi_j)\ .$$
□

3.3. Les distributions tempérées.

Définition 3. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est dite tempérée s'il existe des constantes $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ telles que*
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\ ,\ |\langle T, \varphi\rangle| \le C N_p(\varphi)\ .$$

Compte tenu du lemme 3, une telle distribution se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, que nous noterons encore T. On désigne par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des distributions tempérées.

Il existe de nombreux exemples de distributions tempérées : les éléments de $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, \infty]$, les distributions à support compact, les distributions périodiques par rapport à un réseau, les fonctions mesurables à croissance polynomiale... En revanche, la fonction
$$x \mapsto \mathrm{e}^{|x|^2}$$

ne définit pas une distributions tempérée, car elle est positive et croît trop vite, mais la fonction

$$x \mapsto \mathrm{e}^{|x|^2} \mathrm{e}^{i\mathrm{e}^{|x|^2}}$$

en est une, car elle est liée à la dérivée de

$$\mathrm{e}^{i\mathrm{e}^{|x|^2}} ,$$

qui est bornée donc tempérée !

La transformée de Fourier définie par (5) se prolonge de façon évidente à $L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \ , \ \hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx \ ,$$

qui définit une fonction continue bornée $\hat{f}$ — en fait, tendant vers 0 à l'infini. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème de Fubini entraîne

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) \, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) \, dx \ .$$

Compte tenu de cette identité, on définit la transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la façon suivante.

Définition 4. *Pour tout $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ , \ \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \ .$$

Compte tenu de la proposition 6 et du théorème 6, on obtient immédiatement le résultat général d'inversion due Fourier.

Théorème 7. *L'application linéaire*

$$\mathscr{F} : T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto \hat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$$

est bijective, continue pour la topologie de la convergence simple, d'inverse donné par

$$\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-d} \sigma \circ \mathscr{F} = (2\pi)^{-d} \mathscr{F} \circ \sigma \ .$$

En outre, elle vérifie les identités suivantes.

$$\mathscr{F}(x^\alpha T) = (i\partial)^\alpha \mathscr{F} T \ , \ \mathscr{F}(\partial^\beta T) = (i\xi)^\beta \mathscr{F} T \ .$$
$$\mathscr{F}(\mathrm{e}^{i\langle .,\eta\rangle} T) = \tau_\eta \mathscr{F} T \ , \ \mathscr{F}(\tau_a T) = \mathrm{e}^{-i\langle .,a\rangle} \mathscr{F} T \ .$$

Citons quelques exemples simples. Tout d'abord,

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, dx \ ,$$

donc

$$\hat{\delta}_0 = 1 \ ,$$

et, par inversion de Fourier,

$$\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0 \ .$$

Une application frappante est que, si P est un polynôme à d variables tel que l'ensemble des zéros de $P(i\xi)$ ne rencontre $\mathbb{R}^d$ qu'à l'origine, alors les solutions tempérées de l'équation aux dérivées partielles

$$P(\partial)T = 0$$

sont nécessairement des fonctions polynomiales. En effet, en prenant la transformation de Fourier des deux membres,

$$P(i\xi)\hat{T} = 0 \ ,$$

donc, compte tenu de l'hypothèse sur P, le support de $\hat{T}$ est contenu dans $\{0\}$, de sorte que, d'après un théorème du cours de distributions, $\hat{T}$ est une combinaison linéaire finie de dérivées de δ_0, ce qui donne la conclusion attendue en appliquant la transformation de Fourier inverse. Par exemple, dans le cas où $d = 2$ et $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + i\xi_2$, on en déduit le théorème de Liouville, selon lequel toute fonction entière sur $\mathbb{C}$ qui est bornée est nécessairement constante.

Un autre exemple est le cas des distributions périodiques. Si T est une distribution $\Gamma-$ périodique, où Γ est un réseau de $\mathbb{R}^d$, alors la décomposition en série de Fourier

$$T = \sum_{k \in \Gamma^*} c_k(T) \, \mathrm{e}^{i\langle . , k \rangle}$$

entraîne

$$\hat{T} = (2\pi)^d \sum_{k \in \Gamma^*} c_k(T) \delta_k \ .$$

3.4. **Le théorème de Plancherel.** Un autre exemple, fondamental celui–ci, est le cas des éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 8. *La transformation de Fourier induit un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, tel que $(2\pi)^{-d/2}\mathscr{F}$ est un opérateur unitaire. En particulier, une distribution tempérée est une fonction de carré intégrable si et seulement si sa transformée de Fourier est une fonction de carré intégrable.*

En effet, puisque $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer l'identité

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ , \ (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^2 \, dx \ .$$

Pour cela, il suffit d'écrire, en vertu du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat\varphi(\xi)|^2\,d\xi &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\hat\varphi(\xi)\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,d\xi\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2\,dx\ ,\end{aligned}$$

où, dans la dernière étape, on a fait usage de la formule inverse de Fourier (6).

Comme dans le cas périodique, on peut alors définir les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s\in\mathbb{R}$, dont les éléments sont les distributions tempérées T telles que

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat T\in L^2(\mathbb{R}^d)\ .$$

On notera le choix du poids $(1+|\xi|^2)^{s/2}$, qui est C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées, ce qui permet de définir *a priori* le produit de cette fonction avec la distribution tempérée $\hat T$. En vertu du théorème de Plancherel 8 et des propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on vérifie immédiatement que, si $s=m$ est un entier naturel, alors $H^m(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Un argument analogue au cas périodique assure également que, pour $s>\frac{d}{2}$, tout élément de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini, dont la transformée de Fourier est intégrable.

On notera enfin que, contrairement au cas périodique, la réunion de tous les H^s est strictement incluse dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ — par exemple, la transformée de Fourier inverse de la mesure superficielle sur la sphère unité n'appartient à aucun H^s—, et l'intersection de tous les H^s contient strictement $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ — par exemple, la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique de la boule unité appartient à tous les H^s.

3.5. **Le cas des distributions à support compact.** On a déjà remarqué que la transformée de Fourier d'une distribution dont le support est l'origine est un fonction polynomiale. Plus généralement, la transformée de Fourier d'une distribution à support compact possède des propriétés de régularité remarquables, que nous énonçons ici sans démonstration.

Théorème 9 (Paley–Wiener–Schwartz)**.** *Soit T une distribution supportée dans la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon R.*
Alors la transformée de Fourier de T est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, qui se prolonge en une fonction holomorphe dans tout $\mathbb{C}^d$, vérifiant en outre l'estimation suivante :

(9) $\quad \exists C>0\ ,\ \exists M>0\ ,\ \forall\zeta\in\mathbb{C}^d\ ,\ |\hat T(\zeta)|\le C(1+|\zeta|)^M\mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\zeta|}\ .$

Réciproquement, toute fonction entière sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant une estimation du type (9) coïncide sur $\mathbb{R}^d$ avec la transformée de Fourier d'une distribution à support dans la boule fermée de centre 0 *et de rayon R.*

3.6. **Distributions tempérées dépendant du temps.** L'espace vectoriel $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ étant muni de la topologie de la convergence simple sur les éléments de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la notion de fonction de classe C^k à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, un élément de $C^k(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ est une fonction

$$T : I \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$$

telle que, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $t \mapsto \langle T(t), \varphi\rangle$ est de classe C^k sur I. Si $T \in C^0(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, une conséquence du théorème de Banach–Steinhaus est que, pour tout intervalle compact J inclus dans I, il existe des constantes C, p telles que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \max_{t\in J} |\langle T(t), \varphi\rangle| \leq C\, N_p(\varphi)\ .$$

On en déduit en particulier qu'un tel élément T définit une distribution sur $I^\circ \times \mathbb{R}^d$, où I° désigne l'intérieur de I. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(I^\circ \times \mathbb{R}^d)$, les fonctions

$$\varphi(t, .) : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \varphi(t, x)$$

forment une famille bornée de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, à support compact lorsque t décrit I°. En particulier, la fonction

$$t \longmapsto \langle T(t), \varphi(t, .)\rangle$$

est bornée — en fait continue — et à support compact dans I°. On constate alors aisément que la forme linéaire

$$\varphi \longmapsto \int_{I^\circ} \langle T(t), \varphi(t, .)\rangle\, dt$$

est une distribution sur $I^\circ \times \mathbb{R}^d$, que nous noterons encore T.
Il est aisé de se convaincre que, si $T \in C^1(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, alors sa dérivée $T' \in C^0(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ n'est autre que la dérivée partielle par rapport à t de la distribution T ainsi définie. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(I^\circ \times \mathbb{R}^d)$, on vérifie que

$$\frac{d}{dt}\langle T(t), \varphi(t, .)\rangle = \langle T'(t), \varphi(t, .)\rangle + \langle T(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, .)\rangle\ ,$$

de sorte que

$$\langle \frac{\partial T}{\partial t}, \varphi\rangle = -\int_{I^\circ} \langle T(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, .)\rangle\, dt = \int_{I^\circ} \langle T'(t), \varphi(t, .)\rangle\, dt = \langle T', \varphi\rangle\ .$$

Par ailleurs, si $T \in C^k(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, on peut considérer, pour tout $t \in I$, la transformée de Fourier de $T(t)$. Il est alors immédiat que la fonction

$$t \in I \longmapsto \widehat{T(t)}$$

est un élément de $C^k(I, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, appelée tranformée de Fourier partielle de T dans la variable x, que nous noterons encore $\hat{T}$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

4. L'Équation de la chaleur

4.1. Introduction. Le mémoire de Joseph Fourier publié en 1822 sous le titre *Théorie analytique de la chaleur* se propose de décrire l'évolution de la température dans un conducteur thermique. Désignons par $T(t,x)$ la température au temps t et au point x du conducteur thermique, considéré comme un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$. Fourier établit une équation aux dérivées partielles vérifiée par T, dont nous rappelons le principe. Supposons que la transformation soit isochore, c'est–à –dire que le conducteur thermique ne subit pas de variation de volume. Considérons le système constitué d'une boule B contenue dans Ω. Alors le premier principe de la thermodynamique établit que la variation d'énergie interne dU de ce système pendant une variation infinitésimale de temps dt coïncide avec la quantité de chaleur δQ apportée au système. L'énergie interne s'écrit

$$U = \int_B c_v T \rho \, dx \ ,$$

où ρ est la densité de masse du corps, et c_v est sa chaleur massique à volume constant. On en déduit

$$dU = \left(\int_B c_v \frac{\partial T}{\partial t} \rho \, dx \right) dt \ .$$

Par ailleurs,

$$\delta Q = - \left(\int_{\partial B} J.n \, d\sigma \right) dt \ ,$$

où J désigne la densité de flux de chaleur dans le conducteur thermique, et n la normale extérieure à B, de sorte que le flux entrant dans B est $-J.n$. La loi du même Fourier (1807) stipule que la densité J est proportionnelle au gradient de température :

$$J = -\lambda \, \mathrm{grad} T \ ,$$

où $\lambda > 0$ est la conductivité thermique du milieu. On obtient donc

$$\delta Q = \left(\int_{\partial B} \lambda \, (\mathrm{grad} T).n \, d\sigma \right) dt = \left(\int_B \mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad} T) \, dx \right) dt \ ,$$

la dernière identité étant la formule de Green. Comme B est une boule arbitraire, on en déduit

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad} T) \ .$$

En supposant le milieu homogène et isotrope, les quantités c_v, ρ et λ sont des constantes positives, et on en déduit l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_v \rho} \Delta T \ .$$

4.2. **L'équation dans l'espace entier.** Nous commençons par étudier la situation idéale où Ω est l'espace tout entier $\mathbb{R}^d$, d étant un entier naturel quelconque.

4.2.1. *Le théorème principal.*

Théorème 10. *Soit $T_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe un unique élément T de $C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ solution de*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

dans l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, et vérifiant

$$T(0) = T_0 \ .$$

De plus, pour tout $t > 0$, $T(t)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées, donnée par la formule

$$T(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \left\langle T_0, \mathrm{e}^{-\frac{|x-.|^2}{4t}} \right\rangle \ .$$

En d'autres termes, la température initiale dans tout l'espace détermine la température pour des temps ultérieurs dans tout l'espace, et, quelle que soit la distribution initiale de température, elle devient instantanément une fonction de classe C^∞. Cette régularisation instantanée est une expression de l'effet diffusif de cette évolution, et est très importante dans les applications. On prendra garde néanmoins aux deux remarques suivantes :

– Les valeurs de la température pour $t < 0$ ne sont en général pas définies. Il existe très peu de conditions initiales T_0 permettant de définir une évolution rétrograde, c'est–à–dire pour $t < 0$. C'est en quelque sorte la contrepartie de l'effet régularisant cité plus haut.
– Nous avons fait l'hypothèse que la solution est une distribution tempérée pour tout temps, qui en quelque sorte signifie qu'elle n'est pas trop grande à l'infini, alors que l'équation a bien sûr un sens pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Cette hypothèse n'est nullement gratuite. En effet, il existe des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, qui sont solutions non identiquement nulles de l'équation de la chaleur, et qui tendent vers 0, uniformément sur tout compact ainsi que toutes leurs dérivées, lorsque t tend vers 0^+. Voici un exemple. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^\alpha}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Il est classique que cette fonction est de classe C^∞. On peut alors montrer que la fonction

$$T(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, et vérifie l'équation de la chaleur. Notons qu'elle vaut 0 pour $t\le 0$.

Passons à la démonstration du théorème 10. Soit $\hat{T}$ la transformée de Fourier partielle de T dans la variable x. L'équation devient

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}=-|\xi|^2\hat{T}\ .$$

Considérons $\hat{T}$ comme une distribution sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^d$. Alors on peut la multiplier par la fonction C^∞ $\mathrm{e}^{t|\xi|^2}$ et obtenir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{t|\xi|^2}\hat{T}\right)=0\ ,$$

ce qui signifie que $\mathrm{e}^{t|\xi|^2}\hat{T}$ est une distribution indépendante de t. En passant à la limite lorsque t tend vers 0, on en déduit

$$\mathrm{e}^{t|\xi|^2}\hat{T}=\hat{T}_0\ ,$$

soit encore

$$\hat{T}=\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\hat{T}_0\ ,$$

qui est bien une fonction C^∞ à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On en déduit l'existence et l'unicité annoncées. Montrons maintenant la formule donnant $T(t)$ pour $t>0$. Soit $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle T(t),\varphi\rangle &= \langle \hat{T}(t),\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle=\langle \hat{T}_0,\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\\ &= \langle T_0,\mathscr{F}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\ .\end{aligned}$$

Calculons

$$\psi_t=\mathscr{F}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}^{-1}\varphi\ .$$

Il vient, grâce à la formule d'inversion de Fourier et au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\psi_t(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle-t|\xi|^2+i\langle y,\xi\rangle}\varphi(y)\,dy\,d\xi\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}k_t(x-y)\varphi(y)\,dy=k_t*\varphi(x)\ ,\end{aligned}$$

où

$$k_t=(2\pi)^{-d}\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-t|\xi|^2})=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ , \tag{10}$$

d'après le lemme 4. Il s'ensuit que

$$\langle T(t), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T(t,y)\varphi(y)\,dy$$

avec

$$T(t,y) = \langle T_0, k_t(.-y)\rangle\ ,$$

qui est bien une fonction de classe C^∞ à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées. Ceci achève la démonstration du théorème.

4.2.2. *Cas particuliers et conséquences.* Si $T_0 = \delta_0$, alors

$$T(t,x) = k_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ ,$$

la fonction donnée par (10). Une conséquence est que la fonction localement intégrable

$$E(t,x) = \mathbf{1}_{t>0}\, k_t(x)$$

satisfait à

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = \delta_{(0,0)}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E, \varphi\right\rangle &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta\varphi\right)(t,x)\,dt\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta\varphi\right)(t,x)\,dt\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial k_t}{\partial t} - \Delta k_t\right)\varphi(t,x)\,dt\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d} k_\varepsilon(x)\varphi(\varepsilon,x)\,dx \\
&= \varphi(0,0)\ .
\end{aligned}$$

En d'autres termes, E est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel à coefficients constants

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\ .$$

Par ailleurs, on constate directement sur l'expression de E que $E \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \setminus \{(0,0)\})$. Un résultat de théorie des distributions assure alors que, pour tout ouvert Q de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, toute distribution $u \in \mathcal{D}'(Q)$ solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

dans Q, est une fonction de classe C^∞ dans Q. Ce résultat très général montre que l'étude des solutions tempérées dans l'espace tout entier peut avoir des conséquences frappantes sur les propriétés qualitatives de solutions distributions dans un ouvert quelconque.

Lorsque T_0 est une constante, alors $T(t) = T_0$ pour tout $t > 0$, puisque k_t est d'intégrale 1. Ceci est conforme à l'intuition physique, selon laquelle les seules variations temporelles de T sont dues au gradient de températures.

Plus généralement, si T_0 est positive — ce qui est le cas de toute fonction température exprimée dans le système international d'unités !— alors T est une fonction positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Si $T_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, \infty]$, alors $T(t) = k_t * T_0$ appartient à L^p et

$$\|T(t)\|_{L^p} \leq \|T_0\|_{L^p} \ .$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Young et du fait que la norme L^1 de k_t est 1. De plus, si $p < \infty$, alors $T(t)$ converge T_0 dans L^p lorsque t tend vers 0^+. En d'autres termes, la famille de transformations

$$T_0 \mapsto T(t)$$

est un semi–groupe de contractions de $L^p(\mathbb{R}^d)$. On notera qu'il n'est pas si simple de montrer directement la condition de Hille–Yosida,

$$\|(\lambda I - \Delta)^{-1}\|_{L^p \to L^p} \leq \frac{1}{\lambda} \ , \ \lambda > 0 \ ,$$

hormis lorsque $p = 2$.
Si $p = \infty$, la propriété de continuité devient fausse, puisqu'une limite uniforme de fonctions continues est nécessairement continue. En revanche, elle redevient vraie si T_0 est une fonction bornée et uniformément continue. On a donc aussi un semi–groupe d'évolution sur cet espace de Banach.

4.2.3. *Le cas de sources extérieures.* Supposons maintenant que l'on place une source de chaleur dans le conducteur. A chaque instant, cette source va contribuer au bilan énergétique, faisant apparaître un terme au second membre de l'équation, sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = S \ .$$

Supposons que S soit un élément de $C(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. Alors le théorème principal devient

Théorème 11. *Soient $T_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in C(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. . Il existe un unique élément T de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ solution de*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = S$$

dans l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, et vérifiant

$$T(0) = T_0 \ .$$

De plus, pour tout $t > 0$, $T(t)$ est donnée par la formule

$$T(t) = T_0 * k_t + \int_0^t S(t-\tau) * k_\tau \, d\tau \ .$$

Dans l'énoncé ci–dessus, on a utilisé la notation du produit de convolution d'un élément de $\mathscr{S}'$ et d'un élément de $\mathscr{S}$ suivant

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T, \check{\psi} * \varphi \rangle \ ,$$

qui a un sens puisque le produit de convolution de deux éléments de $\mathscr{S}$ est un élément de $\mathscr{S}$. On notera que, si $T \in \mathscr{S}'$ et $\psi \in \mathscr{S}$, alors $T * \psi$ est une fonction de classe C^∞ à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées. En revanche, lorsque t tend vers 0, k_t n'a pas de limite dans $\mathscr{S}$, mais converge vers δ_0 dans $\mathscr{S}'$. L'intégrale

$$\int_0^t S(t-\tau) * k_\tau \, d\tau$$

est donc seulement à valeurs dans $\mathscr{S}'$ — de classe C^1 en t.

La démonstration du théorème 11 suit la même méthode que celle du théorème 10. En prenant la transformée de Fourier partielle des deux membres, on obtient l'équation

$$\hat{T}' + |\xi|^2 \hat{T} = \hat{S} \ ,$$

qui se résout en

$$\hat{T}(t) = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} \, \hat{T}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau|\xi|^2} \hat{S}(t-\tau) \, d\tau \ ,$$

ce qui conduit à la formule annoncée après application de la transformation de Fourier inverse.

4.3. **Le cas de conditions aux limites.** Le problème le plus naturel physiquement est la combinaison de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R} \times \Omega$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ représentant le conducteur thermique, avec des conditions aux limites pour la température. Par exemple, on peut imposer, sur une composante connexe du bord, que la température est maintenue à une valeur constante T_1. Une autre possibilité est d'imposer que la dérivée normale de la température s'annule sur le bord de Ω– ou sur une de ses composantes connexes — ce qui correspond, d'après la loi de Fourier, à un flux de chaleur normal au bord, donc à une hypothèse d'isolation thermique.

4.3.1. *Le cas d'une boîte à frontière isotherme.* Supposons que Ω soit un parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^d$, c'est–à–dire — à translation près —

$$\Omega =]0, L_1[\times \ldots]0, L_d[\ ,$$

où $L_1, \ldots L_d$ sont des constantes positives. Étudions l'évolution de la température de cette boîte lorsqu'on impose à sa frontière une température constante T_1, de sorte que le problème à résoudre est

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega \ , \ T_{|\mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega} = T_1 \ , \ T_{|t=0} = T_0 \ ,$$

où T_0 est une fonction donnée sur Ω. En posant $u = T - T_1$, $u_0 = T_0 - T_1$, on est ramené à

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega \ , \ u_{|\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0 \ , \ u_{|t=0} = u_0 \ .$$

Le théorème de Hille Yosida, appliqué sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ à l'opérateur maximal accrétif $A = -\Delta$ de domaine

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

assure que ce problème est bien posé pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, la condition sur $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)$ s'exprimant précisément sous la forme

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*) \ , \ u_\psi := \int_0^\infty \psi(t) u(t)\, dt \in H_0^1(\Omega) \ , \ u_{\psi'} + \Delta u_\psi = 0 \ .$$

Nous allons montrer que l'on peut résoudre ce problème explicitement en se ramenant à l'équation de la chaleur sur des fonctions périodiques dans l'espace entier. La méthode repose sur un argument initialement utilisé par D'Alembert en 1747 dans son étude de l'équation des cordes vibrantes, que nous traiterons au paragraphe suivant. Le principe repose sur l'usage des symétries de $\mathbb{R}^d$ par rapport aux hyperplans de coordonnées. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, désignons par σ_j la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^d$ par rapport à l'hyperplan H_j d'équation $x_j = 0$, en d'autres termes

$$\sigma_j(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_d) \ .$$

Ces d transformations involutives commutent deux à deux, et engendrent un groupe fini d'ordre 2^d, dont les éléments sont décrits par l'ensemble $\mathscr{P}_d$ des parties de $\{1, \ldots, d\}$: pour $I \in \mathscr{P}_d$, l'élément correspondant est σ_I, le produit de composition des σ_i pour $i \in I$. On fait agir ce groupe sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\sigma_I f = f \circ \sigma_I \ .$$

Soit Γ le réseau formé des points de $\mathbb{R}^d$ dont, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, la j–ème coordonnée est un multiple entier de $2L_j$. Étant donnée une fonction $u \in L^1(\Omega)$, on prolonge u de façon unique en une fonction $\underline{u}$ sur $\mathbb{R}^d$, localement intégrable et Γ–périodique telle que

$$\forall I \in \mathscr{P}_d \;\; \sigma_I \underline{u} = (-1)^{|I|} \underline{u} \; .$$

Il suffit en effet de prolonger d'abord u à

$$P =]-L_1, L_1[\times \cdots \times]-L_d, L_d[= \bigcup_{I \in \mathscr{P}_d} \sigma_I(\Omega) \cup N \; , \tag{11}$$

où N est un ensemble de mesure nulle sur lequel on peut donc ignorer la définition de $\underline{u}$. On pose

$$\forall x \in \Omega \; , \; \underline{u}(\sigma_I(x)) = (-1)^{|I|} u(x) \; .$$

On obtient ainsi une fonction intégrable sur P, telle que, pour toute fonction $f \in L^\infty(P)$,

$$\int_P \underline{u} f \, dx = \int_\Omega u \left(\sum_{I \in \mathscr{P}_d} (-1)^{|I|} \sigma_I f \right) dx \; ,$$

cette formule étant une conséquence de la décomposition de P (11) ci–dessus, puis du théorème de changement de variables appliqué sur chaque $\sigma_I(\Omega)$.
Ensuite, on prolonge la fonction de $L^1(P)$ ainsi obtenue à tout $\mathbb{R}^d$ par Γ–périodicité. Il vient donc, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \underline{\varphi} \, dx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{P+\gamma} \underline{\varphi} \, dx = \int_\Omega u \left(\sum_{I \in \mathscr{P}_d} (-1)^{|I|} \sigma_I \varphi^\sharp \right) dx \; , \tag{12}$$

où $\varphi^\sharp$ désigne la périodisée de φ selon le réseau Γ. On notera que, si l'on part de $u \in C(\overline{\Omega})$, la fonction $\underline{u}$ peut présenter des points de discontinuité sur certains hyperplans de coordonnées, sauf si u s'annule au bord de Ω. Le lemme suivant clarifie ce problème dans le contexte fonctionnel du domaine de l'opérateur A.

Lemme 5. *On suppose que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors*

$$\Delta \underline{u} = \underline{\Delta u} \; .$$

Démontrons ce lemme. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par définition du laplacien au sens des distributions,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \underline{u}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \underline{\Delta \varphi} = \int_\Omega u \left(\sum_{I \in \mathscr{P}_d} (-1)^{|I|} \sigma_I \Delta \varphi^\sharp \right) dx \\ &= \int_\Omega u \, \Delta \left(\sum_{I \in \mathscr{P}_d} (-1)^{|I|} \sigma_I \varphi^\sharp \right) dx \; , \end{aligned}$$

puisque Δ commute à chaque σ_I. Notons

$$f = \sum_{I\in\mathscr{P}_d} (-1)^{|I|}\sigma_I\varphi^\sharp.$$

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, puisque $\varphi^\sharp$ l'est. En outre, elle est nulle sur le bord de Ω. En effet, pour tout j, on peut écrire $f = f_j - \sigma_j f_j$, où

$$f_j = \sum_{I\in\mathscr{P}_d, j\notin I} (-1)^{|I|}\sigma_I\varphi^\sharp.$$

La fonction f_j est Γ–périodique, donc f_j et $\sigma_j f_j$ sont égales sur l'hyperplan d'équation $x_j = L_j$. Par ailleurs, elles sont évidemment égales sur l'hyperplan d'équation $x_j = 0$, puisque σ_j est l'identité sur cet hyperplan. La fonction f est donc nulle sur ces deux hyperplans, et ceci pour tout j. Cela signifie exactement qu'elle est nulle sur la frontière de Ω. Il en résulte que $f \in H_0^1(\Omega)$. Ceci est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 6. *Soit Ω un ouvert borné quelconque. Soit $f \in H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que f est identiquement nulle sur $\partial\Omega$. Alors $f \in H_0^1(\Omega)$.*

Supposons démontré le lemme 6. On peut alors appliquer la formule de Green pour le couple (u, f) de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ dont le laplacien appartient à $L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega u\,\Delta f\,dx = \int_\Omega \Delta u\, f\,dx\ .$$

On obtient donc finalement

$$\langle \Delta\underline{u}, \varphi\rangle = \int_\Omega \Delta u\, f\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \underline{\Delta u}\,\varphi\,dx\ ,$$

ce qui est précisément le contenu du lemme 12.

Il reste à montrer le lemme 6. Notons que, dans ce lemme, aucune hypothèse n'est nécessaire sur la régularité de Ω. Quitte à décomposer f en parties réelle et imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles. Énonçons tout d'abord le résultat préliminaire suivant : soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 à dérivée bornée. Alors, pour tout ouvert de $\mathbb{R}^d$, pour toute fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ à valeurs réelles, $G(f) := G\circ f$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$, et, si

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ ,$$

on a la formule

$$\frac{\partial G(f)}{\partial x_j} = G'(f)\frac{\partial f}{\partial x_j}\ .$$

En effet, la première assertion est évidente, car $G(s)$ est à croissance au plus linéaire à l'infini puisque sa dérivée est bornée. Quant à la seconde assertion, elle s'obtient aisément en tronquant et en régularisant f.

Soit maintenant $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$G(s) = \begin{cases} s \text{ si } |s| \geq 2 \ , \\ 0 \text{ si } |s| \leq 1 \ , \end{cases}$$

et posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$G_\varepsilon(s) = \varepsilon G\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \ , \ f_\varepsilon = G_\varepsilon(f) \ .$$

Puisque f est continue et vaut 0 sur le bord de Ω, on a $|f| \leq \varepsilon$ sur un voisinage de $\partial\Omega$, de sorte que $f_\varepsilon = 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$. En d'autres termes, puisque Ω est borné, f_ε est à support compact dans Ω. Par ailleurs, puisque

$$G'_\varepsilon(s) = G'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

est uniformément bornée, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$|f_\varepsilon| \leq C|f| \ .$$

De plus, puisque $G_\varepsilon(s) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} s$, f_ε converge simplement vers f lorsque ε tend vers 0. On déduit alors du théorème de convergence dominée que f_ε tend vers f dans $L^2(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0.
En outre, d'après la formule énoncée plus haut,

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} = G'_\varepsilon(f)\frac{\partial f}{\partial x_j} \ .$$

Puisque $G'_\varepsilon(f)$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}$ en restant uniformément bornée, il résulte du théorème de convergence dominée que

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dans $L^2(\Omega)$. Mais, par continuité de la dérivation au sens des distributions, on sait aussi que

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Par unicité de la limite au sens des distributions, on conclut que

$$\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \ ,$$

et surtout que

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dans $L^2(\Omega)$. Ceci étant vrai pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, nous avons montré que f_ε converge vers f dans $H^1(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0. Puisque chaque

f_ε est à support compact dans Ω, on en conclut que $f \in H^1_0(\Omega)$, ce qui achève la démonstration du lemme 6 .

En appliquant le prolongement $v \mapsto \underline{v}$ à la formulation faible sur Ω de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet,

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)\ ,\ u_\psi := \int_0^\infty \psi(t)u(t)\,dt \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\ ,\ u_{\psi'}+\Delta u_\psi = 0\ ,$$

on obtient la formulation du problème suivant sur $\mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} = 0\ ,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d\ ,\ \underline{u}_{|t=0} = \underline{u_0}\ . \tag{13}$$

Remarque 1. *Dans le cas de conditions aux limites isolantes, on peut procéder de façon analogue. Le prolongement $\underline{u}$ de u à P s'effectue cette fois en écrivant*

$$\underline{u}(\sigma_I(x)) = u(x)\ ,$$

pour tout $I \in \mathscr{P}_d$ et pour tout $x \in \Omega$. Enfin, lorsque les conditions aux limites sont mixtes — isothermes sur les faces de la frontière parallèles à H_j pour certains j, et isolantes pour les autres — cette formule s'adapte en

$$\underline{u}(\sigma_I(x)) = (-1)^{|I'|}u(x)\ ,$$

où I' désigne la partie de I constituée des indices correspondant aux conditions aux limites isothermes. La démonstration du lemme 5 s'établit alors de façon analogue.

On peut alors appliquer le théorème 10 pour obtenir la formule donnant $\underline{u}$, et donc u par restriction à Ω,

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underline{u_0}(y)k_t(x-y)\,dy = \int_\Omega u_0(y)K_t(x,y)\,dy\ ,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega\ ,$$

avec, pour $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega \times \Omega$,

$$K_t(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{I\in\mathscr{P}_d} (-1)^{|I|}k_t(x-\gamma-\sigma_I(y))\ . \tag{14}$$

Nous disposons donc d'une formule générale pour la solution de l'équation de la chaleur sur une boîte, avec conditions aux limites isothermes. On constatera sur cette formule que la solution est, dans $t>0$, la restriction à Ω d'une fonction de classe C^∞. D'autre part, si t tend vers $+\infty$, cette fonction converge vers 0, ou, si l'on revient à T, vers T_1, qui est donc la température d'équilibre quelle que soit la donnée initiale. Enfin, remarquons que l'on peut aussi résoudre le problème 13 en utilisant les séries de Fourier,

$$\underline{u}(t,x) = \sum_{k\in\Gamma^*} c_k(\underline{u(t)})\mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}\ ,$$

avec

$$\frac{d}{dt}c_k(\underline{u(t)}) = -|k|^2 c_k(\underline{u(t)}) \ ,$$

qui s'intègre en

$$c_k(\underline{u(t)}) = \mathrm{e}^{-t|k|^2} c_k(\underline{u_0}) \ .$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} c_k(\underline{u_0}) &= \frac{1}{|P|}\int_P \underline{u_0}(y)\,\mathrm{e}^{-i\langle k,y\rangle}\,dy \\ &= \frac{1}{|P|}\int_\Omega u_0 \sum_{I\in\mathscr{P}_d}(-1)^{|I|}\sigma_I\left(\mathrm{e}^{-i\langle k,.\rangle}\right)\,dy \\ &= \frac{(-i)^d}{L_1\dots L_d}\int_\Omega u_0(y)\prod_{j=1}^d \sin(k_j y_j)\,dy \ , \end{aligned}$$

comme le montre un argument par récurrence facile sur l'entier d. On note que $c_k(\underline{u_0})$ est nul si l'un des k_j est nul, et que

$$c_{\sigma_I(k)}(\underline{u_0}) = (-1)^{|I|} c_k(\underline{u_0}) \ .$$

En conséquence, si Γ^*_+ désigne le sous–ensemble de Γ^* formé des points à coordonnées strictement positives, on conclut que

$$u(t,x) = \frac{2^d}{L_1\dots L_d}\sum_{k\in\Gamma^*_+}\mathrm{e}^{-t|k|^2}\int_\Omega u_0(y)\prod_{j=1}^d \sin(k_j y_j)\sin(k_j x_j)\,dy \ .$$

Notons que cette identité n'est rien d'autre que la spécialisation au cas du laplacien de Dirichlet sur la boîte Ω, de la méthode de diagonalisation vue à la fin du cours sur les semi–groupes. En effet, on vérifie directement que les fonctions

$$\frac{2^{d/2}}{(L_1\dots L_d)^{1/2}}\prod_{j=1}^d \sin(k_j x_j) \ , \ k\in\Gamma^*_+ \ ,$$

forment une base hilbertienne de fonctions propres de cet opérateur sur $L^2(\Omega)$.
En comparant les deux expressions de u ainsi obtenues, on déduit l'identité

$$K_t(x,y) = \frac{2^d}{L_1\dots L_d}\sum_{k\in\Gamma^*_+}\mathrm{e}^{-t|k|^2}\prod_{j=1}^d \sin(k_j y_j)\sin(k_j x_j) \ . \tag{15}$$

L'identité entre les deux expressions (14) et (15) provient de la formule de Poisson associée au réseau Γ, appliquée à la fonction k_t. Cette identité a de nombreuses applications. En particulier, en faisant $x = y$ et en intégrant sur Ω, on obtient, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{k\in\Gamma_+^*} \mathrm{e}^{-t|k|^2} \sim \frac{L_1\dots L_d}{(4\pi t)^{d/2}} \ ,$$

ce qui fournit des informations précises sur le nombre d'éléments de Γ_+^* contenus dans une boule de rayon R, lorsque R tend vers l'infini, c'est–à–dire le nombre de points à coordonnées entières dans un grand ellipsoïde.

En revanche, l'une ou l'autre des expressions (14) et (15) n'entraîne pas de façon évidente la propriété physiquement naturelle que, si u_0 est une fonction positive, alors u est positive. En d'autres termes, K_t devrait être une fonction positive sur $\Omega\times\Omega$, et ce n'est nullement évident sur ces formules. Nous allons pourtant déduire cette propriété d'un argument général, indépendant de ces formules.

Théorème 12. *Soit u une solution de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ , \ (t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega \ , \ u_{|\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0 \ , \ u_{|t=0} = u_0 \in L^2(\Omega) \ .$$

On suppose que $u_0\geq 0$. Alors $u(t,x)\geq 0$ pour tous $(t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega$.

Démonstration. Soit $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant

$$\forall s<0, G(s)>0 \ ; \ \forall s\geq 0, G(s)=0 \ ; \ C\geq G''\geq 0 \ .$$

Considérons la fonction continue

$$F(t) = \int_\Omega G(u(t,x))\,dx \geq 0 \ .$$

Par hypothèse, $F(0)=0$. Calculons, pour $t>0$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_\Omega G'(u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx = \int_\Omega G'(u(t,x)\Delta u(t,x)\,dx \\ &= -\int_\Omega G''(u(t,x))|\nabla u(t,x)|^2\,dx \ , \end{aligned}$$

la dernière identité provenant de la formule de Green. Il s'ensuit que F est une fonction décroissante. Puisqu'elle est nulle en $t=0$ et positive ou nulle, elle est identiquement nulle. En d'autres termes, puisque G est à valeurs positives, $G(u(t,x))=0$ pour tout (t,x), ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 2. *On notera que la démonstration ci–dessus s'adapte à tout ouvert Ω, la formule de Green utilisée étant toujours valable si $u\in H_0^1(\Omega)$ et $\Delta u\in L^2(\Omega)$, ce qui est la condition $u\in D(A)$.*

Terminons ce paragraphe en signalant qu'il est évidemment possible, comme dans le paragraphe précédent, d'ajouter une source extérieure S dans le second membre. Les détails sont laissés au lecteur.

4.3.2. *Le cas d'une couronne dans* $\mathbb{R}^3$. À titre d'exemple faisant intervenir des conditions aux limites non uniformément isothermes, considérons maintenant le cas où Ω est l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenu entre deux boules concentriques, de rayons respectifs R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$, où l'on impose à la température d'être égale à une valeur constante T_1 sur la sphère de rayon R_1, et à une valeur constante T_2 sur la sphère de rayon R_2. Le problème s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T &= 0 \ , \quad R_1 < |x| < R_2 \ , \\ T(t,x) &= \begin{cases} T_1 & \text{si } |x| = R_1 \\ T_2 & \text{si } |x| = R_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Par un argument d'invariance par rotation combiné avec l'unicité provenant du théorème de Hille–Yosida, on en déduit que T est une fonction de t et de $r = |x|$, que nous noterons encore $T(t,r)$. On a alors

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \ ,$$

et, en introduisant la nouvelle fonction inconnue

$$u(t,r) = rT(t,r) \ ,$$

on est ramené au problème suivant, à une dimension d'espace,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= 0 \ , \quad R_1 < r < R_2 \ , \\ u(t,r) &= \begin{cases} R_1 T_1 & \text{si } r = R_1 \\ R_2 T_2 & \text{si } r = R_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

On se ramène alors à des conditions aux limites nulles en soustrayant à u la solution stationnaire u_s du problème, caractérisée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} &= 0 \ , \quad R_1 < r < R_2 \ , \\ u_s(r) &= \begin{cases} R_1 T_1 & \text{si } r = R_1 \\ R_2 T_2 & \text{si } r = R_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

soit

$$u_s(r) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1} r + \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1} \ .$$

La fonction $v = u - u_s$ vérifie alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0 \ , \quad R_1 < r < R_2 \ , \ v(t,r) = 0 \text{ si } r = R_1 \text{ ou si } r = R_2 \ .$$

En posant

$$w(t,x) = v(t, R_1 + x),$$

on se ramène au problème étudié au paragraphe précédent, avec $d = 1$ et $L_1 = R_2 - R_1$. On a donc

$$w(t,x) = \sum_{\gamma \in L_1\mathbb{Z}} \int_0^{R_2-R_1} w_0(y)(k_t(x-\gamma-y) - k_t(x-\gamma+y))\, dy \ .$$

On vérifie aisément que la formule générale pour $T(t,r)$ est

$$T(t,r) = T_s(r) + \frac{1}{r} \sum_{\gamma \in L_1\mathbb{Z}} \int_{R_1}^{R_2} (T_0(\rho) - T_s(\rho))(k_t(r-\rho-\gamma) - k_t(r+\rho-2R_1-\gamma))\, \rho\, d\rho \ ,$$

où T_s est donnée par,

$$T_s(r) = \frac{u_s(r)}{r} = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{R_2 - R_1} + \frac{R_1R_2(T_1 - T_2)}{r(R_2 - R_1)} \ .$$

En particulier, $T(t,r)$ tend vers $T_s(r)$ lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes, T_s est la distribution de température d'équilibre.
À titre d'exercice, on pourra traiter le cas d'une condition aux limites isothermes sur l'un des anneaux, et isolante sur l'autre ; on prendra garde au fait que, dans ce cas, seule la méthode de diagonalisation s'applique, et que les valeurs propres ne sont pas explicites.

5. L'équation des ondes

5.1. **Introduction.** L'équation des ondes est l'autre équation d'évolution la plus couramment répandue en physique : l'élasticité, l'acoustique, l'électromagnétisme, la relativité, ... figurent parmi ses domaines d'applications. Il est singulier de constater en outre qu'elle est historiquement l'une des toutes premières équations aux dérivées partielles, et la première qui fut résolue explicitement. Dans son mémoire intitulé *Recherches sur la courbe que forme une courbe tendue mise en vibration* (1747), Jean D'Alembert (1717-1783) établit pour la première fois l'équation des cordes vibrantes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \tag{16}$$

et en donne la solution générale explicitement. Rappelons brièvement comment il obtient cette équation. On considère que la corde au repos occupe l'intervalle $]0, L[$ pour un certain $L > 0$. Supposons que, au cours d'une **petite** vibration, sa forme devienne le graphe d'une fonction

$$x \mapsto y(t,x) \ ,$$

avec les conditions

$$y(t,0) = y(t,L) = 0 \ ,$$

qui expriment que la corde est fixée à ses extrémités. Appelons T la tension de la corde, et μ sa masse par unité de longueur, suposées uniformes. Considérons un élément de corde correspondant à une variation infinitésimale dx de l'abscisse. Alors la longueur de cet élément est

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx \simeq dx \ .$$

Appliquons la deuxième loi de Newton à cet élément de masse μds, et projetons–la sur l'axe vertical,

$$\mu ds\, \Gamma_y = F_y \ ,$$

où Γ_y est la composante verticale de l'accélération, donc

$$\Gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ,$$

et F_y est la composante verticale de la résultante des forces appliquées à l'élément de corde. On néglige le poids par rapport à la tension. On obtient donc, si α désigne l'angle de la tangente au point (x, y),

$$F_y = T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin(\alpha) = T\, d(\sin\alpha) \ .$$

Or

$$\sin\alpha = \tan\alpha\, \cos\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \ .$$

On en déduit

$$d(\sin\alpha) = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2)^{3/2}}\, dx \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx \ .$$

On en déduit

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ ,$$

ce qui est bien l'équation (16) ci–dessus, avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \ .$$

Dans le même article, D'Alembert montre que la solution générale de cette équation est de la forme

$$y(t, x) = F(ct + x) - F(ct - x) \ ,$$

où F est une fonction périodique de période $2L$, et en déduit que les données initiales $y_0(x) = y(0, x)$ et $v_0(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(0, x)$, représentant respectivement la forme initiale de la corde et la vitesse initiale en chaque point de la corde, déterminent la solution y pour tout temps.

L'équation des cordes vibrantes se généralise à plusieurs dimensions. Par exemple, en dimension 2, l'équation des membranes vibrantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \Delta y = 0$$

décrit les petites vibrations d'une membrane, et est établie de façon analogue. En dimension 3, dans un fluide admettant une loi d'état $p = P(\rho)$ reliant pression et densité, et soumis à de petites variations autour d'un état d'équilibre et de densité uniforme ρ_0, la pression vérifie l'équation des ondes acoustiques,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \ c = \sqrt{P'(\rho_0)} \ .$$

L'équation des ondes découle également des équations de Maxwell de l'électromagnétisme, pour chacune des quatre composantes du potentiel électromagnétique en jauge de Lorentz, la constante c désignant alors la vitesse de la lumière. Elle est enfin la version linéarisée des équations d'Einstein, qui sont au centre de la relativité générale.

Dans ce qui suit, nous montrons comment résoudre cette équation dans l'espace entier, en insistant sur l'expression explicite des solutions fondamentales, la conservation de l'énergie et la vitesse finie de propagation.

5.2. **Résolution dans l'espace entier.** Après un changement d'échelle en temps, on peut supposer que $c = 1$.

Théorème 13. *Soient $u_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe une unique fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, solution du problème*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ ,$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = v_0 \ .$$

En outre, les restrictions de $u(t)$ et de $u'(t)$ à la boule $B(x_0, R)$ ne dépendent que des restrictions de u_0 et v_0 à la boule $B(x_0, R + |t|)$.

Remarque 3. *Il est utile de commenter ce théorème en comparant ses résultats avec ceux du théorème 10 analogue pour l'équation de la chaleur.*

- *Alors que les solutions sont définies uniquement dans $t \geq 0$ pour la chaleur, ici elles sont définies sur tout $\mathbb{R}$. En fait, le changement de variable $t \mapsto -t$ laisse invariante l'équation des ondes.*
- *Alors que le problème de Cauchy de l'équation de la chaleur nécessite des solutions tempérées pour son unicité, celui des ondes est bien posé dans l'espace de toutes les distributions. En fait le principe de vitesse finie de propagation figurant à la fin de l'énoncé donne des informations très précises sur le déterminisme pour les ondes, que nous détaillerons plus encore au paragraphe suivant.*

Démonstration. Commençons par le cas où les données u_0, v_0 sont tempérées, et cherchons $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. Alors la transformée de Fourier partielle $\hat{u}$ de u dans la variable x vérifie

$$\hat{u}'' + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ ,$$
$$\hat{u}(0) = \hat{u}_0 \ , \ \hat{u}'(0) = \hat{v}_0 \ .$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants a pour unique solution

$$\hat{u}(t) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0 + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{v}_0 \ . \tag{17}$$

Réciproquement, les fonctions

$$(t,\xi) \mapsto \cos(t|\xi|) \ , \ (t,\xi) \mapsto \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

sont de classe C^∞, à croissance polynomiale ainsi que leurs dérivées, de sorte que le second membre de (17) définit bien une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Afin de généraliser cette formule au cas de distributions quelconques, étudions les distributions tempérées F_t et $\dot{F}_t$ caractérisées par

$$\mathscr{F}(F_t) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \ , \ \mathscr{F}(\dot{F}_t) = \cos(t|\xi|) \ .$$

En remarquant que

$$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}(|\xi|^2)^n}{(2n+1)!} \ , \ \cos(t|\xi|) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}(|\xi|^2)^n}{(2n)!} \ ,$$

on constate que $\mathscr{F}(F_t)$ et $\mathscr{F}(\dot{F}_t)$ se prolongent en des fonctions entières sur $\mathbb{C}^d$, de la forme

$$\mathscr{F}(F_t)(\zeta) = h_t\left(\zeta_1^2 + \dots \zeta_d^2\right) \ , \ \mathscr{F}(\dot{F}_t)(\zeta) = \dot{h}_t\left(\zeta_1^2 + \dots \zeta_d^2\right) \ ,$$

avec

$$\forall z \in \mathbb{C} \ , \ h_t(z) = \frac{\sin(t\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \ , \ \dot{h}_t(z) = \cos(t\sqrt{z}) \ ,$$

qui sont holomorphes en z et vérifient les estimations

$$|\dot{h}_t(z)| \leq \mathrm{e}^{|t\mathrm{Im}(\sqrt{z})|} \ , \ |h_t(z)| \leq |t|\mathrm{e}^{|t\mathrm{Im}(\sqrt{z})|} \ .$$

Par ailleurs, on constate que

$$|\mathrm{Im}\sqrt{\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_d^2}| \leq \sqrt{(\mathrm{Im}\zeta_1)^2 + \dots (\mathrm{Im}\zeta_d)^2} = |\mathrm{Im}\zeta|.$$

En effet, il suffit d'appliquer l'identité élémentaire

$$\forall a \in \mathbb{C} \ , \ 2(\mathrm{Im}a)^2 = |a|^2 - \mathrm{Re}(a^2)$$

à $a=\sqrt{\zeta_1^2+\dots\zeta_d^2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
2\left(\mathrm{Im}\sqrt{\zeta_1^2+\cdots+\zeta_d^2}\right)^2 &= |\zeta_1^2+\cdots+\zeta_d^2|-\mathrm{Re}(\zeta_1^2+\cdots+\zeta_d^2)\\
&\le |\zeta_1|^2+\cdots+|\zeta_d|^2-\mathrm{Re}(\zeta_1^2)-\cdots-\mathrm{Re}(\zeta_d^2)\\
&\le 2(\mathrm{Im}\zeta_1)^2+\cdots+2(\mathrm{Im}\zeta_d)^2=2|\mathrm{Im}\zeta|^2\ .
\end{aligned}$$

On en conclut

$$|\mathscr{F}(\dot F_t)(\zeta)|\le \mathrm{e}^{|t\mathrm{Im}\zeta|}\ ,\ |\mathscr{F}(F_t)(\zeta)|\le |t|\mathrm{e}^{|t\mathrm{Im}\zeta|}\ .$$

D'après le théorème 9 de Paley–Wiener–Schwartz, on en déduit que F_t et $\dot F_t$ sont des distributions à support dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $|t|$. En particulier, leurs produits de convolution avec toute distribution sont bien définis. Si u_0, v_0 sont des distributions arbitraires, la formule

$$u(t)=\dot F_t * u_0 + F_t * v_0$$

définit donc un élément de $C^\infty(\mathbb{R},\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, qui coïncide avec l'expression trouvée dans le cas de distributions tempérées. Il est facile de vérifier que u est encore solution du problème, soit par un calcul direct, soit par un argument de densité de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{D}'$. En outre, si u_0 et v_0 sont nulles dans une boule $B(x_0,R+|t|)$, alors, grâce aux propriétés du produit de convolution, les supports de $u(t)$ et de $u'(t)$ sont contenus dans

$$B(x_0,R+|t|)^c+\overline{B}(0,|t|)$$

qui est disjoint de $B(x_0,R)$. Par linéarité, cela montre que, si deux couples de données initiales sont égaux sur $B(x_0,R+|t|)$, alors les solutions au temps t sont égales sur $B(x_0,R)$. Cette propriété constitue le principe de vitesse finie de propagation : la solution au temps t n'est influencée que par des propriétés des données se propageant à vitesse au plus 1. On l'appelle aussi parfois principe d'Huyghens, du nom du mathématicien et physicien néerlandais Christian Huyghens (1629-1695), qui a très tôt formulé la théorie ondulatoire de la lumière.

Pour clore la démonstration du théorème 13, montrons l'unicité. À cette fin, observons que les calculs ci–dessus montrent que la fonction $t\mapsto F_t$ est solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)F_t=0\ ,\ F_0=0\ ,\ F_0'=\dot F_0=0\ .$$

Considérons alors la distribution sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

$$E=\mathbf{1}_{t>0}\,F_t\ .$$

On montre aisément, comme dans le cas de l'équation de la chaleur, que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)E=\delta_{(0,0)}\ .$$

Soit alors $T > 0$ arbitraire, et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans l'intervalle $]-2T, 2T[$ et valant 1 sur $[-T, T]$. Alors la distribution $\chi(t)E$ est à support dans $[0, 2T] \times \overline{B}(0, 2T)$. On en déduit que, pour toute distribution w sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la distribution $(\chi E) * w$ est bien définie, et vérifie

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)((\chi E) * w) &= (\chi E) * \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) w \\ &= w + (\partial_t^2 \chi E + 2\partial_t \chi \partial_t E) * w \ .\end{aligned}$$

Supposons que w soit supportée dans $t \geq 0$. Alors la distribution $(\partial_t^2 \chi E + 2\partial_t \chi \partial_t E) * w$ est supportée dans $t \geq T$. Si en outre w est solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) w = 0 \ ,$$

on en déduit que w est nulle pour $t < T$. Comme T est choisi arbitrairement, cela implique $w = 0$.
Or, si $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$ est solution de l'équation des ondes avec données initiales u_0, v_0 nulles, alors on vérfie aisément que

$$w = \mathbf{1}_{t>0}\, u$$

est solution de l'équation des ondes. Comme elle est visiblement supportée dans $t \geq 0$, elle est identiquement nulle. On en conclut que u est nulle pour $t > 0$. Le cas $t < 0$ se traite en changeant t en $-t$ dans l'équation. Ceci achève la démonstration du théorème 13. $\square$

Énonçons maintenant le résultat analogue avec une force extérieure, dont la démonstration est laissée en exercice.

Théorème 14. *Soient $u_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$. Il existe une unique fonction $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, solution du problème*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ , \\ u(0) = u_0 \quad &, \quad u'(0) = v_0 \ .\end{aligned}$$

La fonction u est donnée par la formule

$$u(t) = \dot{F}_t * u_0 + F_t * v_0 + \int_0^t F_{t-\tau} * f(\tau)\, d\tau \ .$$

En particulier, les restrictions de $u(t)$ et de $u'(t)$ à la boule $B(x_0, R)$ ne dépendent que des restrictions de u_0 et v_0 à la boule $B(x_0, R + |t|)$, et de la restriction de $f(\tau)$ au domaine $|x - x_0| + |t - \tau| < R$, pour τ compris entre 0 et t.

La résolution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$ se ramène donc à la description de la famille de distributions $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Pour cette raison, cette famille est souvent appelée solution fondamentale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$.

5.3. **Expression des solutions fondamentales F_t. Principe d'Huyghens fort.** Dans ce paragraphe, nous montrons comment obtenir une expression explicite des distributions F_t permettant de résoudre l'équation des ondes. Nous en déduisons une particularité de ces solutions en dimension d impaire au moins égale à 3.

5.3.1. *Le cas $d = 1$.* Même si la démonstration élémentaire de D'Alembert ignore l'analyse de Fourier — et pour cause... —il n'est pas inutile de voir comment les formules générales ci–dessus se spécialisent au cas $d = 1$. Alors

$$\mathscr{F}(\dot{F}_t)(\xi) = \cos(t|\xi|) = \cos(t\xi) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{it\xi} + \mathrm{e}^{-it\xi}) \ .$$

On en déduit, en appliquant la transformation de Fourier inverse,

$$F_t = \frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}) \ .$$

Ensuite, puisque

$$F_t' = \dot{F}_t \ , F_0 = 0 \ ,$$

on obtient

$$\langle F_t, \varphi\rangle = \int_0^t \langle \dot{F}_t, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\int_{-t}^t \varphi(\tau)\, d\tau \ .$$

Si u_0, v_0 sont localement intégrables, par exemple, on en déduit la formule de D'Alembert,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^t v_0(x+\tau)\, d\tau \ .$$

5.3.2. *Le cas d impair au moins égal à* 3. Dans ce cas, on peut préciser l'information sur le support de F_t et de $\dot{F}_t$.

Théorème 15 (Principe d'Huyghens fort)**.** *Si la dimension d est impaire au moins égale à* 3*, F_t et $\dot{F}_t$ sont supportées dans la sphère de centre* 0 *et de rayon $|t|$.*

En d'autres termes, si d est impair au moins égal à trois et si $|t| > R$, la restriction à la boule $B(x_0, R)$ de la solution au temps t de l'équation des ondes, ne dépend que des restrictions des données initiales à l'anneau $B(x_0, |t|+R)\setminus\overline{B}(x_0, |t|-R)$. Ou, si l'on préfère, lorsque les données initiales sont à support dans la boule de centre x_0 et de rayon R, la solution est nulle au voisinage de x_0 en tout temps t tel que $|t| > R$. Cette propriété, qui précise le principe de vitesse finie de propagation, est appelée principe d'Huyghens fort.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour F_t, que nous allons calculer explicitement. En utilisant la continuité de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{S}'$, on sait que F_t est la limite, lorsque ε tend vers 0, de

$$F_t^\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix.\xi} \chi(\varepsilon|\xi|) \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \, d\xi \ ,$$

où χ désigne n'importe quelle fonction paire de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ valant 1 en 0. Calculons cette intégrale. Tout d'abord, à l'aide du théorème de changement de variables, il est clair que F_t^ε est une fonction invariante par rotation autour de l'origine, elle s'écrit donc $f_t^\varepsilon(|x|)$, avec

$$f_t^\varepsilon(r) = (2\pi)^{-d} \int\limits_0^\infty \chi(\varepsilon\rho) \frac{\sin(t\rho)}{\rho} \left(\int\limits_{S^{d-1}} \mathrm{e}^{ir\rho\eta_d} \, d\sigma(\eta) \right) \rho^{d-1} \, d\rho \ , \ r \geq 0.$$

Le calcul de l'intégrale sur la sphère unité repose sur le lemme suivant.

Lemme 7. *Soit $g \in C^1([-1,1])$ et soit $d \geq 2$. Alors*

$$\int\limits_{S^{d-1}} g(\eta_d) \, d\sigma(\eta) = |S^{d-2}| \int\limits_{-1}^{1} g(s)(1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} \, ds \ .$$

Démontrons ce lemme. Rappelons la formule de la divergence appliquée à la boule unité B^d de $\mathbb{R}^d$,

$$\int\limits_{S^{d-1}} \eta.X(\eta) \, d\sigma(\eta) = \int\limits_{B^d} \mathrm{div} X(\eta) \, d\eta \ .$$

En appliquant cette formule au champ de vecteur

$$X(\eta) = g(\eta_d)\eta \ ,$$

il vient

$$\int\limits_{S^{d-1}} g(\eta_d) \, d\sigma(\eta) = \int\limits_{B^d} (dg(\eta_d)+\eta_d g'(\eta_d)) \, d\eta = |B^{d-1}| \int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{d-1}{2}} (dg(s)+sg'(s)) \, ds \ ,$$

où la dernière identité provient du théorème de Fubini. En intégrant par parties, il vient, en tenant compte du fait que $d \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{d-1}{2}} sg'(s) \, ds &= [(1-s^2)^{\frac{d-1}{2}} sg(s)]_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{ds} \left[s(1-s^2)^{\frac{d-1}{2}} \right] g(s) \, ds \\ &= \int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} (ds^2-1) g(s) \, ds \ . \end{aligned}$$

En reportant dans la formule ci–dessus, on en déduit

$$\int_{S^{d-1}} g(\eta_d)\, d\sigma(\eta) = (d-1)|B^{d-1}| \int_{-1}^{1} g(s)(1-s^2)^{\frac{d-3}{2}}\, ds\ ,$$

ce qui est bien le résultat annoncé, puisque

$$|S^{d-2}| = (d-1)|B^{d-1}|\ ,$$

à cause d'une autre application de la formule de la divergence.

Revenons à la démonstration du théorème. En appliquant le lemme, on obtient

$$f_t^\varepsilon(r) = (2\pi)^{-d}|S^{d-2}| \int_0^\infty \rho^{d-2} \sin(t\rho)\chi(\varepsilon\rho)K(r\rho)\, d\rho\ ,$$

où

$$K(y) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{iys}(1-s^2)^{\frac{d-3}{2}}\, ds$$

est une fonction paire de y. Puisque d est supposé impair, on peut donc transformer l'intégrale en ρ en une intégrale sur la droite tout entière,

$$\begin{aligned} f_t^\varepsilon(r) &= (2\pi)^{-d}\frac{|S^{d-2}|}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^{d-2}\mathrm{e}^{it\rho}\chi(\varepsilon\rho)K(r\rho)\, d\rho \\ &= (2\pi)^{-d}\frac{|S^{d-2}|}{2i} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho^{d-2}\mathrm{e}^{i\rho(t+rs)}\chi(\varepsilon\rho)\, d\rho \right) ds \\ &= (2\pi)^{-d}\frac{|S^{d-2}|}{2i\varepsilon} \left(-i\frac{d}{dt}\right)^{d-2} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} \hat{\chi}\left(\frac{t+rs}{\varepsilon}\right) ds\ , \end{aligned}$$

Puisque $\hat{\chi}$ est un élément de $\mathscr{S}$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\hat{\chi}\left(\frac{t+s|x|}{\varepsilon}\right) \to 0$$

sur l'ouvert défini par $t + s|x| \neq 0$, en particulier sur l'ouvert $|x| < |t|$, puisque $s \in [-1, 1]$. Il en résulte que la restriction de $F_t^\varepsilon(x)$ à l'ouvert $|x| < |t|$ tend vers 0, ce qui assure que F_t est nulle sur cet ouvert. Puisque l'on sait déjà que F_t est supportée dans $\{|x| \le |t|\}$, ceci achève la démonstration. □

Dans le cas $d = 3$, la formule ci–dessus prend une forme particulièrement simple, que nous allons maintenant établir. Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 8. *Soit $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$une fonction continue, de classe C^∞ au voisinage de $\{f = 0\}$, telle que $\nabla f \neq 0$ sur l'ensemble $\{f = 0\}$. Alors, au sens des distributions dans $\mathbb{R}^d$,*

$$\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(\tau)\, d\tau\right) \frac{\sigma}{|\nabla f|} \ ,$$

où σ désigne la mesure superficielle sur l'hypersurface $\{f = 0\}$.

Démonstration. Il suffit de se restreindre à un voisinage de l'hypersurface $\{f = 0\}$, car la limite est clairement nulle en–dehors de cette hypersurface. Posons

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\tau')\, d\tau' \ ,$$

de sorte que

$$h\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(\tau)\, d\tau\right) \mathbf{1}_{f>0} \ .$$

Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on en déduit, au voisinage de l'hypersurface $\{f = 0\}$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{f}{\varepsilon}\right) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}.\nabla\left[h\left(\frac{f}{\varepsilon}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho\, d\tau\right) \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}.\nabla[\mathbf{1}_{f>0}] \ .$$

Notons que l'ensemble $\{f = 0\}$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, donc peut être négligé dans l'identité ci–dessus. En vertu de la formule des sauts pour un ouvert à bord régulier,

$$\nabla(\mathbf{1}_{f>0}) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\sigma \ .$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

En appliquant le lemme, puisque $\chi(0) = 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\hat{\chi}\left(\frac{t + s|x|}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\pi\frac{\sigma}{|s|} \ ,$$

σ étant la mesure superficielle sur l'hypersurface d'équation $t+s|x| = 0$, qui est vide sauf si t et s sont de signes opposés. On obtient finalement

$$F_t = (2\pi)^{1-d}\frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}}|S^{d-2}|}{2}\left(\frac{d}{dt}\right)^{d-2}\int_0^1 (1 - s^2)^{\frac{d-3}{2}}\frac{\sigma_{|t|/s}}{s}\, ds \ , \tag{18}$$

où σ_r désigne la mesure superficielle sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Si $d = 3$, (18) devient

$$F_t = -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sigma_{|t|/s}}{s}\,ds,$$

soit encore

$$\begin{aligned}\langle F_t, \varphi\rangle &= -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^1 \int_{|x|=\frac{|t|}{s}} \varphi(x)\,d\sigma_{|t|/s}(x)\,\frac{ds}{s} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{|t|}^{\infty} \int_{|x|=r} \varphi(x)\,d\sigma_r(x)\,\frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_{|x|=|t|} \varphi(x)\,d\sigma_r(x)\ .\end{aligned}$$

En d'autres termes, retenons le résultat suivant :

Théorème 16. *Si $d = 3$,*

$$F_t = \frac{\sigma_{|t|}}{4\pi t}\ ,$$

où σ_r désigne la mesure superficielle sur la sphère de centre 0 et de rayon r.

5.3.3. *Le cas d pair.* Dans ce cas, la formule pour F_t est plus difficile à obtenir directement à partir de sa transformée de Fourier. Heureusement, il existe une méthode permettant de se ramener au cas d'une dimension impaire.

Proposition 7 (Méthode de descente)**.** *Soit d un entier, et soit $(F_t^{d+1})_{t\in\mathbb{R}}$ la solution fondamentale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

$$\langle F_t, \varphi\rangle = \langle F_t^{d+1}, \varphi \otimes 1\rangle\ .$$

On notera que, puisque F_t^{d+1} est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^{d+1}$, son action sur la fonction C^∞

$$\varphi \otimes 1 : (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \mapsto \varphi(x_1, \ldots, x_d)$$

est bien définie.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier que la famille de distributions sur $\mathbb{R}^d$ $(\tilde{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ définie par

$$\langle \tilde{F}_t, \varphi\rangle = \langle F_t^{d+1}, \varphi \otimes 1\rangle$$

résout le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}_t}{\partial t^2} - \Delta \tilde{F}_t &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ , \\ \tilde{F}_0 = 0 \quad &, \quad \frac{d\tilde{F}_t}{dt}(0) = \delta_0 \ . \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Calculons

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial^2 \tilde{F}_t}{\partial t^2} - \Delta \tilde{F}_t, \varphi \rangle &= \frac{d^2}{dt^2} \langle F_t^{d+1}, \varphi \otimes 1 \rangle - \langle F_t^{d+1}, \Delta\varphi \otimes 1 \rangle \\ &= \langle F_t^{d+1}, \Delta(\varphi \otimes 1) \rangle - \langle F_t^{d+1}, \Delta\varphi \otimes 1 \rangle \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

puisque $\Delta(\varphi \otimes 1) = \Delta\varphi \otimes 1$. Par ailleurs les conditions initiales sont trivialement vérifiées. La proposition en résulte.

À titre d'exemple, calculons F_t pour $d = 2$. Il vient

$$\begin{aligned} \langle F_t, \varphi \rangle &= \langle F_t^3, \varphi \otimes 1 \rangle = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x|^2+y^2=t^2} \varphi(x) \, d\sigma(x,y) \\ &= \frac{1}{4\pi t|t|} \int\limits_{|x|^2+y^2<t^2} (\mathrm{div}(x\varphi) + \varphi) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi t|t|} \int\limits_{|x|<|t|} (\mathrm{div}(x\varphi) + \varphi) \sqrt{t^2 - |x|^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi t|t|} \int\limits_{|x|<|t|} \varphi(x) (\sqrt{t^2 - |x|^2} - x.\nabla \sqrt{t^2 - |x|^2}) \, dx \\ &= \frac{\mathrm{sign}(t)}{2\pi} \int\limits_{|x|<|t|} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} \, dx = \frac{t}{2\pi} \int\limits_{|y|<1} \frac{\varphi(ty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} \, dy \end{aligned}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième ligne est conséquence du théorème de la divergence sur la boule tridimensionelle de centre 0 et de rayon $|t|$; le passage de la deuxième ligne à la troisième ligne est conséquence du théorème de Fubini ; le passage de la troisième ligne à quatrième ligne est à nouveau conséquence du théorème de la divergence, cette fois en dimension 2.

En d'autres termes, retenons le résultat suivant :

Théorème 17. *Si $d = 2$,*

$$F_t = \frac{\mathrm{sign}(t) \, \mathbf{1}_{|x|<|t|} \, dx}{2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}} \ .$$

On notera que F_t n'est pas supportée dans le cercle de rayon $|t|$: le principe d'Huyghens fort n'est pas vrai en dimension 2. En revanche, remarquons que, pour les dimensions $d = 1, 2, 3$, F_t est une mesure positive si $t \geq 0$. Cette observation entraîne des propriétés de monotonie remarquables pour les solutions de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ , \\ u(0) = 0 \quad &, \quad u'(0) = v_0 \ . \end{aligned}$$

En effet, compte tenu des formules du théorème 14, on constate que, si f et v_0 sont positives, alors $u(t)$ positive pour tout $t \geq 0$. À titre d'exercice, on pourra constater que cette propriété de positivité de F_t est perdue par exemple en dimension 4. Il faut également prendre garde au fait que, dès la dimension 2, la distribution $\dot{F}_t$ n'est pas une mesure, de sorte qu'il existe des solutions de l'équation des ondes dont les données initiales sont bornées, mais qui, pour un certain temps, ne sont pas localement bornées.

5.4. **Conditions aux limites.** Comme dans le cas de l'équation de la chaleur, il est possible de ramener l'équation des ondes sur un parallélépipède rectangle de $\mathbb{R}^d$ avec conditions de Dirichlet ou de Neumann, à l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^d$, avec des données périodiques par rapport à un réseau. Nous ne développerons pas ici cette approche, due à D'Alembert dans le cas de la dimension 1, et qui peut être traitée de façon analogue à ce que nous avons fait pour l'équation de la chaleur. Le lecteur est encouragé à l'étudier à titre d'exercice.

5.5. **Conservation de l'énergie et vitesse finie de propagation.** Pour conclure ce paragraphe sur l'équation des ondes, introduisons la notion importante d'énergie, et précisons son lien avec le principe de vitesse finie de propagation.

Théorème 18. *On suppose que $u_0 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $v_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$u \in C^0(\mathbb{R}, H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$$

et, pour tout $R > 0$, la fonction

$$t \in (-\infty, R) \mapsto E_R(t) = \int\limits_{|x|<R-t} \left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\right) dx$$

est décroissante, et constante si $R = +\infty$.

Démonstration. Supposons tout d'abord $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors la formule

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{v}_0(\xi) + \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) \ ,$$

combinée au théorème de Plancherel, montre que

$$u \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d) \ .$$

En outre, le couple $(\hat{u}'(t,\xi), |\xi|\hat{u}(t,\xi))$ se déduit du couple $(\hat{v}_0(\xi), |\xi|\hat{u}_0(\xi))$ par la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} \cos(t|\xi|) & -\sin(t|\xi|) \\ \sin(t|\xi|) & \cos(t|\xi|) \end{pmatrix},$$

de sorte que la quantité

$$|\hat{u}'(t,\xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2$$

reste constante au cours du temps. En intégrant en ξ et en appliquant le théorème de Plancherel, on en déduit la conservation de $E_\infty(t)$. Passons maintenant à la décroissance de $E_R(t)$ pour $R < +\infty$. Quitte à régulariser les données, on peut supposer que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Pour montrer que E_R est décroissante, nous allons, comme pour le principe du maximum de l'équation de la chaleur, recourir à une méthode directe, ne nécessitant aucune information sur la formule explicite donnant u. Écrivons

$$E_R(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} E^\varepsilon(t) \; , \; E^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\varepsilon(|x|+t) \left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 \right) \, dx \; ,$$

où

$$\chi_\varepsilon(s) = \chi\left(\frac{s-R}{\varepsilon}\right) \; ,$$

χ est une fonction C^∞, décroissante, valant 1 sur $\mathbb{R}_-$ et 0 sur $[1, +\infty[$. Il suffit donc de montrer que E^ε est décroissante pour tout $\varepsilon > 0$. Calculons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E^\varepsilon(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi'_\varepsilon(|x|+t) \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \right) + 2\chi_\varepsilon(|x|+t) \mathrm{Re} \left(\overline{\partial_t u} \partial_t^2 u + \overline{\nabla u} . \partial_t \nabla u \right) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi'_\varepsilon(|x|+t) \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \right) + 2\chi_\varepsilon(|x|+t) \mathrm{Re} \left(\overline{\partial_t u} \Delta u + \overline{\nabla u} . \partial_t \nabla u \right) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi'_\varepsilon(|x|+t) \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 \right) - 2\nabla(\chi_\varepsilon(|x|+t)) . \mathrm{Re} \left(\overline{\partial_t u} \nabla u \right) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi'_\varepsilon(|x|+t) \left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 - 2\mathrm{Re} \left(\overline{\partial_t u} \frac{x}{|x|} . \nabla u \right) \right) \, dx \leq 0 \; .
\end{aligned}$$

Le théorème en résulte. $\square$

Notons enfin que, comme dans le cas du principe du maximum pour la chaleur, la démonstration ci–dessus s'adapte sans problème à des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet ou Neumann.

6. Introduction aux équations dispersives

Ce dernier parapraphe est consacré à une introduction à une classe d'équations d'évolution intervenant souvent en physique, et dont l'étude des perturbations non linéaires ont récemment donné lieu à des développements mathématiques importants.

6.1. **Généralités : relation de dispersion, vitesse de groupe.** Soit $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, à croissance polynomiale à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées. La multiplication par ω agit donc sur les fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et, par transposition, sur les distributions tempérées. On définit l'opérateur

$$\omega(D) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$$

par la formule

$$\widehat{\omega(D)u}(\xi) = \omega(\xi)\hat{u}(\xi)\ .$$

On s'intéresse à l'équation d'évolution

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \omega(D)u \tag{19}$$

pour une fonction inconnue $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. En utilisant la transformation de Fourier partielle comme dans les deux paragraphes précédents, on établit aisément le résultat suivant.

Proposition 8. *Pour tout $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ de l'équation (19) vérifiant de plus*

$$u(0) = u_0\ .$$

La solution u est donnée par la formule

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-it\omega(\xi)}\hat{u}_0(\xi)\ . \tag{20}$$

En outre, si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ et

$$\|u(t)\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}\ .$$

Enfin, si $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$.

Exemples.

– L'équation de Schrödinger sans interaction

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0\ , \tag{21}$$

correspond au cas

$$\omega(\xi) = |\xi|^2\ .$$

Comme on le verra, elle est le prototype des équations dispersives, dans un sens que nous allons définir un peu plus loin.

– L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla u = 0 \ , \tag{22}$$

pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ fixé, correspond au cas

$$\omega(\xi) = v.\xi \ .$$

En utilisant la formule (20), on constate que ses solutions sont de la forme

$$u(t, x) = u_0(x - tv) \ ,$$

reproduisant à l'instant t le profil initial u_0 translaté à la vitesse constante v. On les appelle des ondes progressives.

– L'équation de Klein–Gordon,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0 \ ,$$

où m est un paramètre positif, se rencontre en théorie des champs. En ramenant, comme pour l'équationd es ondes, cette équation à un système de deux équations d'ordre 1, on constate qu'on est ramené à étudier des cas où ω est non polynomiale,

$$\omega(\xi) = \pm\sqrt{|\xi|^2 + m^2} \ .$$

Au–delà de la proposition 8 ci–dessus, une question naturelle est la description des propriétés qualitatives de la solution u dans différentes asymptotiques, en particulier lorsque t tend vers l'infini. Partons de l'exemple simple de l'onde monochromatique de vecteur d'onde ξ,

$$u(t, x) = \mathrm{e}^{ix.\xi - it\omega(\xi)} \ ,$$

correspondant à la donnée initiale $u_0(x) = \mathrm{e}^{ix.\xi}$. La proposition 8 exprime que toute solution tempérée de (19) est superposition de telles ondes monochromatique. Par exemple, si $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}_0(\xi)\, \mathrm{e}^{ix.\xi - it\omega(\xi)}\, d\xi \ . \tag{23}$$

Supposons que la transformée de Fourier de u_0 est un support très petit, proche d'un vecteur d'onde ξ_0, de sorte que l'on puisse écrire

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^d} a\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varepsilon}\right) \ ,$$

pour une certaine fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, en posant $\xi = \xi_0 + \varepsilon\eta$ dans l'intégrale au second membre de (23), on obtient

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\eta)\, \mathrm{e}^{ix.(\xi_0 + \varepsilon\eta) - it\omega(\xi_0 + \varepsilon\eta)}\, d\eta \ .$$

En développant

$$\omega(\xi_0 + \varepsilon\eta) = \omega(\xi_0) + \varepsilon\eta.\nabla\omega(\xi_0) + O(\varepsilon^2|\eta|^2) \ ,$$

on constate que

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{ix.\xi_0 - it\omega(\xi_0)}\, U\left(\varepsilon(x - t\nabla\omega(\xi_0))\right) + O(\varepsilon^2) \ ,$$

où U est donnée par

$$U(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} a(\eta)\,\mathrm{e}^{iy.\eta}\,d\eta \ .$$

En d'autres termes, lorsque ε tend vers 0, u est approchée par une onde monochromatique, modulée par une onde progressive dans les variables lentes $\varepsilon t, \varepsilon x$, avec la vitesse de propagation

$$v(\xi_0) = \nabla\omega(\xi_0) \ .$$

Ce calcul élémentaire motive les définitions suivantes.

Définition 5. (1) *La quantité $v(\xi) = \nabla\omega(\xi)$ est appelée* **vitesse de groupe** *de l'équation (19) pour le vecteur d'onde ξ.*

(2) *L'équation (19) est dite* **dispersive** *si des ondes de vecteurs d'ondes différents se propagent à des vitesse de groupe différentes, c'est–à –dire si l'application $\xi \mapsto v(\xi)$ est injective.*

(3) *La fonction ω est appelée* **relation de dispersion** *de l'équation (19), ou du milieu modélisé par cette équation.*

Par exemple, l'équation de transport (22) a pour vitesse de groupe v, donc n'est pas dispersive. En revanche, pour l'équation de Schrödinger (21), la vitesse de groupe est $v(\xi) = 2\xi$, l'équation est donc dispersive. Il en est de même pour l'équation de Klein–Gordon, qui possède les deux vitesse de groupe

$$v_\pm(\xi) = \pm\frac{\xi}{\sqrt{|\xi|^2 + m^2}} \ .$$

Comme le montre la formule (23), l'étude lorsque t tend vers l'infini des solutions $u(t,x)$ de telles équations se ramène à l'étude d'intégrales du type

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{it\phi(\xi)} a(\xi)\,d\xi$$

où la phase ϕ est une fonction régulière, à valeurs réelles, et dont le gradient varie si l'équation est dispersive. C'est l'objet du paragraphe suivant.

6.2. **Notions sur les intégrales oscillantes.** On appelle intégrale oscillante une intégrale du type

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)}\, a(x)\, dx \ ,$$

où λ est un paramètre tendant vers l'infini, ϕ est une fonction régulière à valeurs réelles, et a est une fonction assez régulière. Le domaine d'intégartion est le plus souvent $\mathbb{R}^d$ tout entier. Commençons par traiter le cas de la dimension 1.

6.2.1. *Intégrales oscillantes en dimension 1.* Dans ce cas, on dispose d'estimations particulièrement simples, dont la clé est le lemme suivant.

Lemme 9 (Van der Corput)**.** *Il existe une suite $(c_k)_{k\geq 1}$ de nombres positifs telle que, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, pour tout entier $k \geq 1$, pour toute fonction $\phi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant*

$$\forall x \in J \ , \ |\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \ ,$$

ϕ' étant de plus monotone si $k = 1$, pour tout nombre $\lambda > 0$, on ait l'estimation

$$\left| \int_J e^{i\lambda\phi(x)}\, dx \right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}} \ .$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas $k = 1$. Considérons une fonction $\phi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que ϕ' est monotone, et $\forall x \in J \ , \ |\phi'(x)| \geq 1$. En partant de la formule

$$e^{i\lambda\phi(x)} = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} \frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) \ ,$$

on peut écrire, si $J = [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} \int_J e^{i\lambda\phi(x)}\, dx &= \frac{1}{i\lambda} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\phi'(x)} \frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right)\, dx \\ &= \frac{1}{i\lambda}\left[\frac{e^{i\lambda\phi(x)}}{\phi'(x)}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{i\lambda}\int_\alpha^\beta e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\, dx \ . \end{aligned}$$

Puisque ϕ' est monotone et ne s'annule pas sur J, la dérivée de $1/\phi'$ est de signe constant, donc

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\, dx \right| \leq \int_\alpha^\beta \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right) \right|\, dx = \left| \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\, dx \right| \ .$$

On en conclut

$$\left| \int_J e^{i\lambda\phi(x)}\, dx \right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\left| \frac{1}{\phi'(\alpha)} + \frac{1}{\phi'(\beta)} \right| + \left| \frac{1}{\phi'(\alpha)} - \frac{1}{\phi'(\beta)} \right| \right) \leq \frac{2}{\lambda} \ .$$

Montrons maintenant les autres cas par récurrence. Soit k un entier au moins égal à 1 pour lequel le lemme est montré à lm'ordre k. Montrons le lemme à l'ordre $k+1$. Soit donc $\phi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall x \in J \ , \ |\phi^{(k+1)}(x)| \geq 1 \ .$$

Pour tout $\delta > 0$, on considère

$$J_\delta := \{x \in J, |\phi^{(k)}(x)| \leq \delta\} \ .$$

Puisque $\phi^{(k+1)}$ ne s'annule pas sur J, $\phi^{(k)}$ est strictement monotone sur J, donc J_δ est un intervalle. De plus, si $x, y \in J_\delta$, le théorème des accroissements finis implique

$$|x - y| \leq |\phi^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(y)| \leq 2\delta \ .$$

On en déduit que la longueur de J_δ est au plus 2δ, en particulier

$$\left| \int\limits_{J_\delta} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)} \, dx \right| \leq 2\delta \ .$$

Par ailleurs, $J \setminus J_\delta$ est un intervalle ou la réunion de deux intervalles, sur lesquels $\phi^{(k)}$ est monotone et vérifie

$$\forall x, \ |\phi^{(k)}(x)| \geq \delta \ .$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la fonction ϕ/δ, on en déduit

$$\left| \int\limits_{J_\delta^c} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)} \, dx \right| \leq \frac{2c_k}{(\delta\lambda)^{\frac{1}{k}}} \ .$$

En conclusion, on obtient

$$\left| \int\limits_{J} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)} \, dx \right| \leq 2\delta + \frac{2c_k}{(\delta\lambda)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{c_{k+1}}{\lambda^{\frac{1}{k+1}}} \ ,$$

en choisissant $\delta = \lambda^{-\frac{1}{k+1}}$ et en posant

$$c_{k+1} = 2 + 2c_k \ .$$

Le lemme en résulte, avec $c_k = 2^{k+1} - 2$. $\square$

Du lemme de Van der Corput, on déduit

Corollaire 3. *Il existe une suite $(c_k)_{k \geq 1}$ de nombres positifs telle que, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, pour tout entier $k \geq 1$, pour toute fonction $\phi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant*

$$\forall x \in J \ , \ |\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \ ,$$

ϕ' étant de plus monotone si $k=1$, pour tout nombre $\lambda>0$, pour toute fonction $a\in C^1(\mathbb{R})$ s'annulant en une extrémité J, on ait l'estimation

$$\left|\int_J e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx\right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\int_J |a'(x)|\,dx\ .$$

En effet, si par exemple $a(\beta)=0$, il suffit d'intégrer par parties selon

$$\int_J e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx = -\int_J \left(\int_\alpha^x e^{i\lambda\phi(t)}\,dt\right)\,a'(x)\,dx \quad ,$$

et d'appliquer le lemme de Van der Corput.

Observons que le corollaire ci–dessus s'applique en particulier si $J=\mathbb{R}$, pourvu que, par exemple, $a\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En effet, on a alors, pour tout $X>0$,

$$\int_{-X}^{X} e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx = a(X)\int_{-X}^{X} e^{i\lambda\phi(x)}\,dx + \int_{-X}^{X} e^{i\lambda\phi(x)}\,(a(x)-a(X))\,dx\ .$$

En vertu du lemme de vertu de Van der Corput et du fait que $a(X)$ tend vers 0 lorsque X tend vers l'infini, le premier terme au second membre tend vers 0, tandis que le second terme s'estime grâce au corollaire. On obtient donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx\right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\int_{\mathbb{R}} |a'(x)|\,dx\ .$$

Discutons maintenant l'optimalité de cette estimation. Si $k=1$, la décroissance en λ peut être considérablement améliorée, grâce au résultat très utile suivant.

Proposition 9 (Lemme de la phase non stationnaire)**.** *Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ |\phi'(x)|\geq 1\ ,\ \forall k\geq 2\ ,\ |\phi^{(k)}(x)|\leq B_k\ .$$

Pour toute fonction $a\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout entier $N\geq 1$, lorsque $\lambda\to+\infty$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx\right| \leq \frac{C(N,a,B_k,k\leq N+1)}{\lambda^N}\ .$$

Démonstration. Il suffit en effet de reprendre l'intégration par parties au début de la démonstration du lemme de Van der Corput,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\,a(x)\,dx = -\frac{1}{i\lambda}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{a(x)}{\phi'(x)}\right)\,dx,$$

et d'itérer N fois cette opération avant de majorer sous l'intégrale. $\square$

En revanche, à partir de $k = 2$, l'ordre de décroissance $\lambda^{-\frac{1}{k}}$ est optimal, comme le montre le célèbre résultat suivant, souvent attribué au physicien britannique William Thompson, Lord Kelvin (1824–1907).

Proposition 10 (Lemme de la phase stationnaire)**.** *Pour toute fonction $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout entier $N \geq 0$, lorsque $\lambda \to +\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\pm i\lambda\frac{x^2}{2}}\, a(x)\, dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\pm i)^n}{2^n n! \lambda^n} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n} a(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right) .$$

Démonstration. Elle est fondée sur le lemme suivant.

Lemme 10. *Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\pm i\frac{x^2}{2}}\right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mp i\frac{\xi^2}{2\lambda}} .$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe γ tel que $\mathrm{Re}(\gamma) \geq 0$, la fonction u_γ définie par

$$u_\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\gamma\frac{x^2}{2}}$$

définit un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. En outre, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\gamma \mapsto \int_{\mathbb{R}} u_\gamma(x)\, \varphi(x)\, dx$$

est continue sur le demi–plan fermé $\{\mathrm{Re}(\gamma) \geq 0\}$ et holomorphe sur le demi–plan ouvert $\{\mathrm{Re}(\gamma) > 0\}$. On a donc les mêmes propriétés pour la fonction $\gamma \mapsto \langle \hat{u}_\gamma, \varphi\rangle$. Si $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on sait d'après le paragraphe sur l'équation de la chaleur que

$$\hat{u}_\gamma(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2\gamma}} .$$

Par prolongement analytique, cette identité se prolonge à tout γ dans le demi–plan ouvert $\{\mathrm{Re}(\gamma) > 0\}$. Il suffit de faire tendre γ vers $\mp i\lambda$ pour conclure. $\square$

Achevons la démonstration de la proposition. En écrivant la formule d'inversion de Fourier

$$a = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(\sigma\hat{a}) ,$$

et en appliquant le lemme, il vient

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\pm i\lambda \frac{x^2}{2}}\, a(x)\, dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mp i\frac{\xi^2}{2\lambda}}\, \hat{a}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\left(\mp i\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^n + O\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}\right)\right) \hat{a}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{n!}\left(\mp i\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^n \hat{a}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right) .$$

La démonstration est complétée par le cas particulier suivant de la formule d'inversion de Fourier,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n}\hat{a}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi} = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n} a(0) .$$

□

6.2.2. *Intégrales oscillantes en dimension supérieure.* En dimension au moins égale à 2, le problème de l'estimation optimale des intégrales oscillantes est considérablement plus délicat. Nous nous en tiendrons aux deux résultats suivants, qui sont les versions multidimensionnelles des propositions 9 et 10.

Proposition 11 (Lemme de la phase non stationnaire)**.** *Soit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ , \ |\nabla\phi(x)| \geq 1 \ , \ |\partial^\alpha \phi(x)| \leq B_\alpha, |\alpha| \geq 2 .$$

Pour toute fonction $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout entier $N \geq 1$, lorsque $\lambda \to +\infty$,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)}\, a(x)\, dx\right| \leq \frac{C(N, d, a, B_\alpha, |\alpha| \leq N+1)}{\lambda^N} .$$

Démonstration. C'est la même que celle de la proposition 9, avec cette fois l'identité

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\lambda\phi} &= \frac{1}{i\lambda} L\left(\mathrm{e}^{i\lambda\phi}\right) , \\ L(f) &:= \frac{1}{|\nabla\phi|^2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} . \end{aligned}$$

Il suffit alors d'itérer N fois la formule d'intégration par parties

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)}\, a(x)\, dx = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\lambda\phi(x)}\, {}^tL(a)(x)\, dx,$$

où ${}^tL$ est l'opérateur transposé de L,

$$ {}^tL(g) := -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}g\right) . $$

□

Venons–en à la version multidimensionnelle du lemme de la phase stationnaire. Soit $Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée,

$$ Q(x) = \langle Ax, x\rangle, $$

où A est une matrice symétrique réelle inversible. Appelons sl forme duale de Q la forme quadratique $\hat{Q}$ donnée sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$ \hat{Q}(\xi) = \langle A^{-1}\xi, \xi\rangle \ , $$

et *signature* de Q le nombre entier $\sigma(Q)$ obtenu en soustrayant le nombre valeurs propres négatives de A du nombre de valeurs propres positives de A.

Lemme 11.

$$ \mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{2}Q}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{i\sigma(Q)\frac{\pi}{4}}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\hat{Q}} . $$

Démonstration. Le cas $d = 1$ a été établi dans le lemme 10. Si A est diagonale, de valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_d$, alors

$$ \mathrm{e}^{\frac{i}{2}Q(x)} = \prod_{j=1}^{d} \mathrm{e}^{\frac{i}{2}x_j^2}, $$

et, puisque la transformation de Fourier commute au produit tensoriel,

$$ \begin{aligned} \mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{2}Q}\right)(\xi) &= \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{2\pi}{|\mu_j|}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{i\mathrm{sgn}(\mu_j)\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-i\frac{\xi^2}{2\mu_j}} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathrm{e}^{i\sigma(Q)\frac{\pi}{4}}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\hat{Q}(\xi)} . \end{aligned} $$

Dans le cas général, on peut écrire $A = PB^tP = PDP^{-1}$, où B est une matrice diagonale de mêmes valeurs propres que A et P est une matrice orthogonale. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, en effectuant le changement de variables $x = Py$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{2}Q(x)}\,\hat{\varphi}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{2}\langle By,y\rangle}\,\hat{\varphi}(Py)\,dx \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} e^{i\sigma(Q)\frac{\pi}{4}}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{2}\langle B^{-1}\eta,\eta\rangle}\,\varphi(P\eta)\,d\eta \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} e^{i\sigma(Q)\frac{\pi}{4}}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{2}\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}\,\varphi(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

après le changement de variables $\eta = P^{-1}\xi$. $\square$

Il est maintenant facile d'obtenir un version multidimensionnelle de la proposition 10.

Proposition 12 (Lemme de la phase stationnaire mutlidimensionnel)**.** *Pour toute fonction $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout entier $N \geq 0$, si $\lambda \to +\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{\lambda}{2}Q(x)}\,a(x)\,dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{e^{i\sigma(Q)\frac{\pi}{4}}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right) ,$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_n = \frac{i^n}{2^n n!}\left(\hat{Q}(\nabla)\right)^n a(0)\ .$$

Démonstration. Elle est semblable à celle de la proposition 10 et est laissée au lecteur à titre d'exercice. $\square$

6.3. **L'équation de Schrödinger.** C'est l'équation

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0\ .$$

Outre son interprétation en mécanique quantique, elle intervient couramment en optique, dans certains régimes asymptotiques de l'équation de Maxwell. Rappelons que, pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, la solution tempérée est donnée par

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\,\hat{u}_0(\xi)\ .$$

En particulier, si $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a la formule intégrale

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle - it|\xi|^2}\,\hat{u}_0(\xi)\,d\xi\ .$$

Cette formule va nous fournir une description asymptotique très précise des valeurs de $u(t,x)$ lorsque t tend vers l'infini.

Proposition 13. *Lorsque t tend vers $+\infty$ et $|x| \leq Ct$ pour une certaine constante C, pour tout entier N,*

$$u(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{-id\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{c_n(t,x)}{t^n} + O\left(\frac{1}{t^{N+1}}\right) \right) ,$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ c_n(t,x) = \frac{(-i)^n}{4^n n!} \Delta^n \hat{u}_0 \left(\frac{x}{2t}\right) \ .$$

Démonstration. La formule ci–dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-it\left|\xi - \frac{x}{2t}\right|^2} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-it|\eta|^2} \hat{u}_0\left(\eta + \frac{x}{2t}\right) d\eta \ . \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 12 avec $Q(x) = -2|x|^2$. $\square$

Remarquons que la condition $|x| \leq Ct$ permet d'assurer que la fonction

$$a_{t,x}(\eta) = \hat{u}_0\left(\eta + \frac{x}{2t}\right)$$

reste uniformément bornée dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et donc que le reste est bien contrôlé par $O(t^{-(N+1)})$ — voir l'estimation du reste dans la démonstration de la proposition 10. Dans ces conditions, si $\frac{x}{2t}$ n'appartient pas au support de $\hat{u}_0$, alors tous les termes dans le développement ci–dessus s'annulent, et $u(t,x)$ est à décroissance rapide en t.

On constate aussi sur le développement précédent que $|u(t,x)|$ est borné par $t^{-\frac{d}{2}}$. Ceci est un fait très général dès que la donnée initiale est intégrable.

Théorème 19 (Estimée de dispersion pour Schrödinger)**.** *Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la solution $u(t)$ de l'équation de Schrödinger est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \neq 0$, et*

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_d}{|t|^{\frac{d}{2}}} \|u_0\|_{L^1} \ .$$

Démonstration. Soit F_t la distribution tempérée telle que

$$\hat{F}_t(\xi) = \mathrm{e}^{-it|\xi|^2} \ .$$

Alors la solution u est donnée par le produit de convolution

$$u(t) = F_t * u_0 \ .$$

La distribution F_t est appelée solution fondamentale de l'équation de Schrödinger. D'après le lemme 11, pour tout $t \neq 0$,

$$F_t(x) = \frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi|t|)^{\frac{d}{2}}} e^{-id\,\mathrm{sign}(t)\frac{\pi}{4}} \ .$$

En particulier, $F_t \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\|F_t\|_{L^\infty} = \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{d}{2}}} \ .$$

Le théorème résulte donc de l'estimation élémentaire

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|F_t\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^1} \ .$$

□

6.4. **L'équation d'Airy et les autres équations dispersives monodimensionnelles.** L'équation d'Airy,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{24}$$

est la forme linéarisée d'une équation importante de la mécanique des fluides, l'équation de Korteweg–de Vries,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \ .$$

La solution fondamentale F_t de (24) est donnée par

$$\hat{F}_t(\xi) = e^{-it\xi^3} \ .$$

Bien que l'on ne dispose pas, comme dans le paragraphe précédent, d'une formule explicite pour F_t, nous allons montrer le même type d'estimée dispersive.

Théorème 20 (Estimée de dispersion pour l'équation d'Airy)**.** *Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, la solution $u(t)$ de l'équation d'Airy est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $t \neq 0$, et*

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{1}{3}}} \|u_0\|_{L^1} \ .$$

Démonstration. En procédant comme ci–dessus, il suffit de montrer que, pour tout $t \neq 0$, $F_t \in L^\infty(\mathbb{R})$, et vérifie

$$\|F_t\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{1}{3}}} \ .$$

Soit $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$. Alors, si ε tend vers 0,

$$\chi(\varepsilon\xi) \to 1$$

dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, de sorte que, si l'on pose

$$F_t^\varepsilon := \mathscr{F}^{-1}\left(\chi(\varepsilon\xi)e^{-it\xi^3}\right) \ ,$$

on obtient

$$F_t^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} F_t$$

dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. On dispose alors de la formule intégrale

$$F_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi - it\xi^3}\,\chi(\varepsilon\xi)\,d\xi\ .$$

On va estimer cette intégrale en appliquant le corollaire 3 du lemme de Van der Corput. Posons

$$\phi_{t,x}(\xi) = -\mathrm{sign}(t)\xi^3 + \frac{x}{|t|}\xi\ .$$

Alors

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, |\phi_{t,x}^{(3)}(\xi)| = 6\ .$$

Il en résulte que, pour tout $t\neq 0$,

$$|F_t^\varepsilon(x)| \le \frac{C_1}{|t|^{\frac13}}\int_{\mathbb{R}} \varepsilon|\chi'(\varepsilon\xi)|\,d\xi \le \frac{C_1}{|t|^{\frac13}}\int_{\mathbb{R}} |\chi'(\xi)|\,d\xi\ = \frac{C}{|t|^{\frac13}}\ .$$

Pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}$, on en déduit

$$|\langle F_t,\varphi\rangle| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} F_t^\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \le \frac{C}{|t|^{\frac13}}\int_{\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\,dx\ .$$

Puisque $\mathscr{S}$ est dense dans L^1, F_t se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur L^1. Or de telles formes linéaires sont données par l'intégrale contre des fonctions L^∞. Il en résulte que $F_t\in L^\infty$ et

$$\|F_t\|_{L^\infty} \le \frac{C}{|t|^{\frac13}}\ .$$

□

Notons que l'analyse précédente sétend à une grande classe d'équations dispersives en dimension 1. Si $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^∞ et satisfait à

$$\forall\xi\in\mathbb{R}\ ,\ \inf_{\xi\in\mathbb{R}}|\omega^{(k)}(\xi)| > 0\ ,$$

pour un entier $k\ge 2$, alors pour toute donnée initiale $u_0\in L^1(\mathbb{R})$, la solution u de l'équation

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \omega(D)u$$

est L^∞ pour tout $t\neq 0$, et vérifie

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le \frac{C}{|t|^{\frac1k}}\|u_0\|_{L^1}\ .$$