

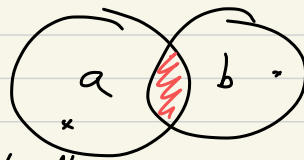
Analyse semiclassique

S. Nonnenmacher

13/10/2026



• Si $a, b \in C_c^\infty$, $\forall g \notin \text{supp}(a) \cap \text{supp}(b)$



$$\forall k, \quad |a \#_h b(g)| \leq C_k h^{k-2d} \frac{\|a\|_{C^k} \|b\|_{C^k}}{(\text{dist}(g, \text{supp}(a)) + \text{dist}(g, \text{supp}(b)))^k}$$

Si $g \in \text{supp}(a) \cap \text{supp}(b)$, $a \#_h b = a \cdot b + h \dots$

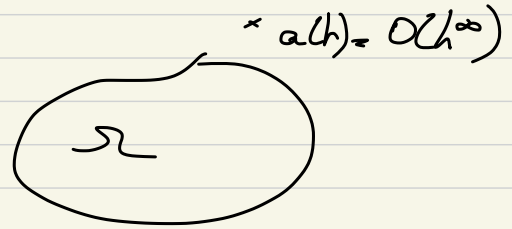
Conséquence : $\text{ess-supp}(a \#_h b) \subset \text{supp}(a) \cap \text{supp}(b)$

• $a \in C_c^\infty, b \in S(1) \rightarrow$

On peut généraliser au cas où $a = (a(h))_{h>0} \in S(\langle p \rangle^{-\infty})$
 $\downarrow$
 $\bigcap_{k \geq 0} S(\langle p \rangle^{-k})$

Si de plus $\text{ess-supp } a(h) \subset \Omega$ borné

$$|\partial^\alpha a(y; h)| = O\left(\left(\frac{1}{\text{dist}(y, \Omega)}\right)^\infty\right)$$



→ même estimée pour $a \# b$, si $b \in S(1)$.

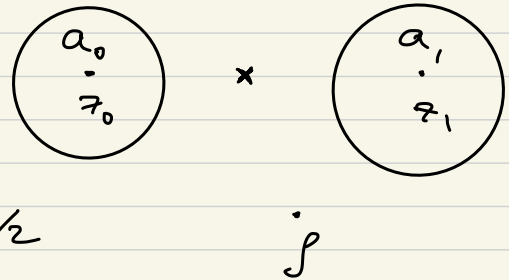
Lemme Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^{2d}$, avec $|z_0 - z_1| \geq 10$. Soit $a_0, a_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$,

$\text{supp}(a_i) \subset B(z_i, 2)$.

Alors $a_0 \# a_1$ satisfait :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \forall k \geq 0$

$$|\partial^\alpha (a_0 \# a_1)(y)| \leq C_{\alpha, k} h^{k-2d} \frac{1}{\left(|z_0 - z_1|^2 + \left|y - \frac{z_0 + z_1}{2}\right|^2\right)^{k/2}}$$



Dans l'estimer précédente, $\text{dist}(f, \text{supp}(a_0)) \geq \text{dist}(f, B(z_0, 2))$
 $\geq |f - z_0| - 2$

$$\text{dist}(f, g|_{\tau_0, z}) + \text{dist}(f, g|_{\tau_1, z}) \geq |f - \tau_0| + |f - \tau_1| - 4$$

$$\therefore \text{dist}(p, B(z_0, r)) + \text{dist}(p, B(z_1, r)) \geq c (|s - z_0| + |s - z_1|)$$

$$|p - z_0| \leq \left| p - \frac{z_0 + z_1}{2} \right| + \left| \frac{z_0 - z_1}{2} \right|$$

$$|p - z_1| \leq \epsilon$$

$$|f - z_0| + |f - z_1| \leq 2 \left| f - \frac{z_0 + z_1}{2} \right| + |z_0 - z_1|$$

$$\left| f - \frac{z_0 + z_1}{2} \right| \leq |f - z_0| + \left| \frac{z_0 - z_1}{2} \right|$$

$$\in \left| p - z_1 \right| + \left| \frac{z_0 - z_1}{2} \right|$$

$$2 \cdot \left| f - \frac{z_0 + z_1}{2} \right| \leq |f - z_0| + |f - z_1| + 2|z_0 - z_1|$$

$$\leadsto |f - z_0| + |f - z_1| \asymp \left| f - \frac{z_0 + z_1}{2} \right| + |z_0 - z_1|$$

$$A \asymp B : \exists C > 1 \text{ t.q. } \frac{1}{C} B(y) \leq A(y) \leq C B(y). \quad \forall y.$$

$$\left(|f - z_0|^2 + |f - z_1|^2 \right)^{1/2} \asymp |f - z_0| + |f - z_1|$$

$$\Rightarrow \text{dist}(f, \text{supp}(a_0)) + \text{dist}(f, \text{supp}(a_1)) \asymp \left(\left| f - \frac{z_0 + z_1}{2} \right|^2 + |z_0 - z_1|^2 \right)^{1/2}$$

uniforme p/r à f, z_0, z_1
 si $|z_0 - z_1| > 10$.

. Action des opérateurs pseudo-différentiels sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \mathcal{O}_{p,h}(a) u = \dots$$

Application de la théorie à la mécanique quantique $\leadsto$

l'espace naturel des fonctions d'onde est $L^2(\mathbb{R}^d) \dots H^s(\mathbb{R}^d)$
 (Sobolev)

But : contrôler la norme de $\|Op_h(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|Op_h(a)\|_{L(L^2)}$

$$a = \int \hat{a}(v) e^{i\psi(s,v)} \frac{dV}{(2\pi)^d}$$

$$\rightarrow Op(a) = \int \hat{a}(v) \underbrace{T_{hV}}_{\text{unitaire sur } L^2} \frac{dV}{(2\pi)^d}$$

$$\Rightarrow \|Op_h(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \int |\hat{a}(v)| \frac{dV}{(2\pi)^d}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})} \leq C_d \|\langle \cdot \rangle^{2d+1} a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}$$

Lemme Inégalité de Schur

Soit $K(x,y)$ le noyau de Schwartz d'un opérateur $A: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$.
 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

On suppose que

$$\left| \begin{array}{l} \sup_x \int |K(x,y)| dy \leq C_1, \\ \sup_y \int |K(x,y)| dx \leq C_2 \end{array} \right|$$

Alors A peut s'étendre à un opérateur borné $L^2 \rightarrow L^2$, avec la borne $\|A\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sqrt{C_1 C_2}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$|Au(x)|^2 = \left| \int k(x,y) u(y) dy \right|^2 \leq \left(\int |k(x,y)|^{\frac{1}{2}} |u(y)| |k(x,y)|^{\frac{1}{2}} dy \right)^2$$

$$\stackrel{CS}{\leq} \int |k(x,y)| |u(y)|^2 dy \underbrace{\int |k(x,y)| dy}_{C_1}$$

$$\leq C_1 \int |k(x,y)| |u(y)|^2 dy$$

$$\int |Au(x)|^2 dx \leq C_1 \int dx \left(\int |k(x,y)| |u(y)|^2 dy \right)$$

$$\stackrel{\text{Fubini-T.}}{\leq} C_1 \int dy |u(y)|^2 \underbrace{\left(\int |k(x,y)| dx \right)}_{\leq C_2}$$

$$\|Au\|_{L^2}^2 \leq C_1 C_2 \|u\|_{L^2}^2$$

$\mathcal{F}$ dense dans $L^2 \Rightarrow A$ peut s'étendre continûment à tout L^2 ,
avec la même borne d'op.

□

Objectif: montrer que $\forall a \in S(1)$, les opérateurs $O_h^t(a)$
sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec des bornes uniformes p/r h .

ex: si $f(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow O_h(f) = \text{multiplication par } f$
 $\Rightarrow \|O_h(f)\|_{L \rightarrow L^2} = \|f\|_\infty$

$$g(\xi) \in C_b^\infty \Rightarrow O_h(g) = g(h\mathcal{D}_\xi)$$

$$\Rightarrow \|g(h\mathcal{D}_\xi)\|_{L \rightarrow L^2} = \|g\|_\infty.$$

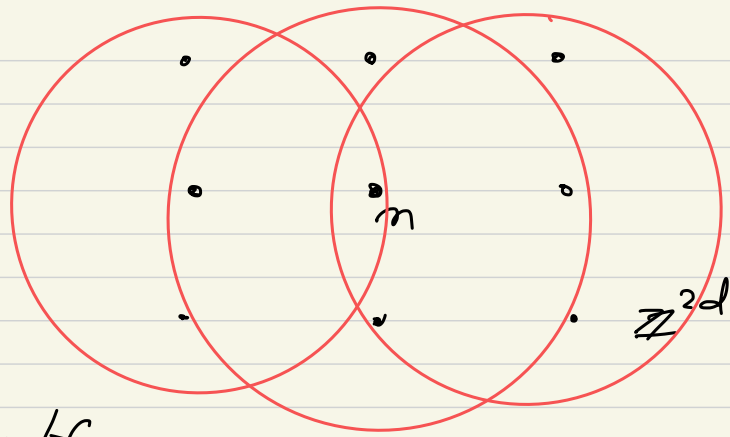
$a = a(x, \xi) \rightarrow$ + compliqué à montrer

Stratégie: découper $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} a_n$, avec $\text{supp}(a_n)$ proche de n .

On utilise une partition lisse de

l'unité sur $\mathbb{R}^{2d}$: $\exists \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$

t.p.,
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} \chi(g-n) = 1 \quad (*)$$



Lemme: une telle χ existe.

Soit une fonction $\tilde{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, supporté

dans $B(0, R_d)$, avec $\tilde{\chi} > 0$ dans $B(0, R_d/2)$.

Si $R_d > \sqrt{d}$, l'union des boules $B(n, R_d/2)$ recouvre $\mathbb{R}^{2d}$.

$$\Rightarrow \underbrace{S(g) = \sum_n \tilde{\chi}(g-n)}_{\text{périodique}} > 0 \text{ partout.}$$
$$\geq c > 0$$

$$\Rightarrow \chi(g) := \frac{\tilde{\chi}(g)}{S(g)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ supp. dans } B(0, R_d), \text{ et}$$

satisfait (*).

→ on définit $a_n(f) = a(f) \chi(f-n)$

$a_n \in \mathcal{S}(1)$ ($\in C_c^\infty$), et les normes de a_n sont uniformes p/r n .

$$\mathcal{D}^\alpha a_n = \left| \mathcal{D}^\alpha (a \cdot \chi(f-n)) \right| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C \|\mathcal{D}^\beta a\| \|\mathcal{D}^\beta \chi(f-n)\|$$

Formellement,
$$Op_h(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} Op_h(a_n)$$

$$\|Op_h(a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \sum_n \|Op_h(a_n)\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

en $\mathcal{S}'$, pas ↓ lorsque $n \rightarrow \infty$

$\|\langle \mathcal{D} \rangle^{2d+1} a_n\|_{L^1}$ sont contrôlés uniformément p/r n .

On va utiliser le fait que, lorsque $|n-n'| \gg 1$, les opérateurs

$O_p(a_n)$ et $O_p(a_{n'})$ sont quasi-orthogonaux:

$$\|O_p(a_n) O_p(a_{n'})\|_{L^1 \rightarrow L^1} = O\left(\left(\frac{h}{|n-n'|}\right)^\infty\right)$$

$$\|O_p(\bar{a}_n) O_p(a_{n'})\|_{L^1 \rightarrow L^1} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n'} \\ n' \end{pmatrix}$$

$$\text{Ran}(O_p(a_{n'})) \subset \text{Ker } O_p(\bar{a}_n)$$

Modèle: $L^2 = \bigoplus_n H_n$, tq. $H_n^\perp \subset \text{Ker } O_p(a_n)$ et $\text{Ran}(O_p(a_n)) \subset H_n$.

$$v = \bigoplus_n v_n \quad O_p(a_n) v_n \text{ non nul et } \in H_n.$$

$$O_p(a_n) v_{n'} = 0, \quad \forall n' \neq n.$$

$\rightarrow$ Les $O_p(a_n)$ sont 2 à 2 orthogonaux.

$$\Rightarrow O_p(a) v = \bigoplus_n O_p(a_n) v_n$$

$$\Rightarrow \|O_p(a) v\|^2 = \sum_n \|O_p(a_n) v_n\|_{H_n}^2 \leq \sum_n \|O_p(a_n)\|^2 \|v_n\|^2$$

Pythagore

$$\leq \left(\sup_n \|O_p(a_n)\|^2 \right) \|v\|^2$$

$$\|O_p(a)\| \leq \sup_n \|O_p(a_n)\|.$$

Théorème de Cotlar-Stein. Soit $(A_j)_{j \geq 1}$, une famille d'ops bornées sur un Hilbert H , satisfaisant les estimées suivantes:

$$\sup_j \left(\sum_{k \geq 1} \|A_j^* A_k\|_{L(H)}^{1/2} \right) \leq C$$

$$\rightarrow \|A_j^* A_j\|^{1/2} \leq C$$

" $\|A_j\|$

et

$$\sup_j \left(\sum_{k \geq 1} \|A_j A_k^*\|^{1/2} \right) \leq C.$$

Alors, la série $\sum_{j \geq 1} A_j$ converge, au sens de la convergence forte

des opérateurs, vers un op. borné A , qui satisfait $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C$.

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \sum_{j=1}^N A_j v \xrightarrow{N \rightarrow \infty} Av \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$



$$\left\| \sum_{j=1}^N A_j - A \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \not\rightarrow 0 \quad \text{En}$$

$$\|A_N v\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{mais } \|A_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \not\rightarrow 0.$$

Preuve du thme:

On définit les sommes tronquées $A^{(N)} = \sum_{j=1}^N A_j$, bornées,
 $A^* A$ op. borné ≥ 0 , et on a:

$$\|(A^* A)^m\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \langle v, (A^* A)^m v \rangle = (\|A^* A\|)^m = \|A\|^{2m}$$

$$\|A^\Phi A\| = \sup_{\|v\|=1} \langle v, A^\Phi A v \rangle = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|^2 = \|A\|^2.$$

$$A = A^{(j)} \Rightarrow (A^\Phi A)^m = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2m}} \underbrace{A_{j_1}^\Phi A_{j_2} A_{j_3}^\Phi \dots A_{j_{2m}}}_{A_{j_1, \dots, j_{2m}}}$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\|A_{j_1 \dots j_{2m}}\| \leq \|A_{j_1}^\Phi A_{j_2}\| \|A_{j_3}^\Phi A_{j_4}\| \dots \|A_{j_{2m-1}}^\Phi A_{j_{2m}}\|$$

$$\|A_{j_1 \dots j_{2m}}\| \leq \|A_{j_1}^\Phi\| \|A_{j_2} A_{j_3}^\Phi\| \dots \|A_{j_{2m}}\|$$

$$\|A_{j_1 \dots j_{2m}}\| \leq \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}$$

$$\leq C \|A_{j_1}^\Phi A_{j_2}\|^{1/2} \|A_{j_2} A_{j_3}^\Phi\|^{1/2} \|A_{j_3}^\Phi A_{j_4}\|^k \dots \|A_{j_{2m-1}}^\Phi A_{j_{2m}}\|^k$$

$$\|(A^{(j)})^\Phi A^{(j)}\|^m \leq C \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2m}} \downarrow$$

$$\sum_{j_{2m}} \sum_{j_{2m-1}} \sum_{j_2} \underbrace{\sum_{j_1} \|A_{j_1}^* A_{j_2}\|^{1/2}}_{\leq C} \underbrace{\|A_{j_2} A_{j_3}^*\|^{1/2}}_{\leq C} \dots C \times J$$

$$\rightarrow \| (A^{(J)})^* A^{(J)} \|^m \leq C^{2m} J$$

$$\Rightarrow \|A^{(J)}\| \leq C J^{\underline{1/2m}} \quad \forall m \geq 1$$

$$\Rightarrow \|A^{(J)}\| \leq C, \text{ borne uniforme p/r à } J!$$

Montrons la convergence forte.

Prendons $\psi \in \mathcal{H}$, et $\varphi = A_{k_0}^* \psi$, pour k_0 quelconque.

$$\sum_{j \geq 1} A_j \varphi = \sum_j A_j A_{k_0}^* \psi$$

Cette série converge absolument:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq 1} \| A_j A_k^\Phi \psi \| &\leq \sum_j \| A_j A_k^\Phi \| \| \psi \| \\
&\leq \sum_j \| A_j A_k^\Phi \|^{1/2} \| A_j A_k^\Phi \| \| \psi \| \\
&\leq \sum_{j, j'} \| A_j A_k^\Phi \|^{1/2} \| A_{j'} A_k^\Phi \|^{1/2} \| \psi \| \\
&\leq C^2 \| \psi \|
\end{aligned}$$

→ je définit $A\psi = \sum_{j \geq 1} A_j \psi$. Converge, $\forall \psi \in \text{Vect}(A_k^\Phi(\mathcal{H}), k \geq 1)$

Par extension, A s'étend à toute combinaison linéaire dans $\bigcup_{k \geq 1} A_k^\Phi(\mathcal{H})$,
et on garde la même estimée $\| A\psi \| \leq C \| \psi \|^2$

→ on étend A à l'adhésion de $\text{Vect}(A_k^\Phi(\mathcal{H}))$.

$$\overline{\text{Vect}(A_k^\Phi(\mathcal{H}))}^\perp = \bigcap_k \text{Ker } A_k$$

sur $\bigcap_k \text{Ker } A_k$, on prend $\sum_j A_j \psi = 0$. $A\psi = 0$

→ on a défini A sur $\underbrace{\text{Vect}(A_{\perp}^*(\mathcal{H}))}_{\oplus} \underbrace{\bigcap_j \text{Ker } A_j}_{\oplus}$

→ A défini sur $\mathcal{H}$, avec $\|A\| \in \mathbb{C}$.



Application à $\sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} O_{T_h}(a_n)$

Théorème de Calderón-Vaillancourt

$a = (a(h)) \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$. Alors $O_{p_h}^w(a)$ peut s'étendre à 1 op. borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec une borne uniforme p/r $h \in]0, 1]$.

Plus précisément, $\exists C_d > 0$ t.q.,

$$\|O_{p_h}^w(a)\|_{L(L^2)} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq 6d+2} h^{|\alpha|/2} \| \partial^\alpha a \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

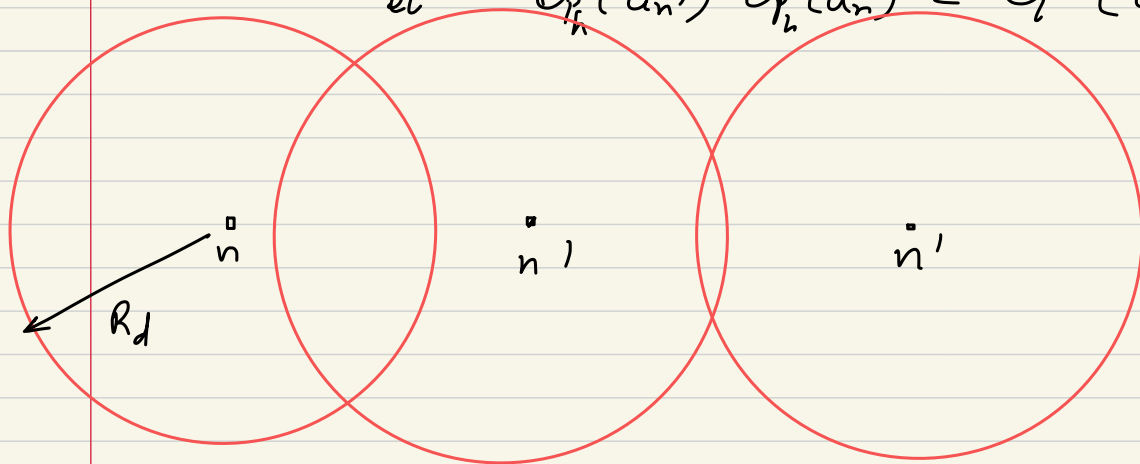
On a la même estimée pour $O_{p_h}^t(a)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Rem: le théorème est intéressant déjà pour $h = 1$.

Preuve:
$$O_p^W(a) = \sum_{A_n} O_p^W(a_n)$$

— on veut contrôler $O_p^W(a_n) \neq O_p^W(a_{n'}) = O_p^W(\bar{a}_n \#_h a_{n'})$

et $O_p^W(a_{n'}) \neq O_p^W(a_n) = O_p^W(a_{n'} \#_h \bar{a}_n)$



$$1. \quad |n - n'| \leq 10 R_d.$$

→ pour f proche de n ,

$$|\mathcal{D}^\alpha(\bar{a}_n \# a_{n'})(f)| \leq C \|\langle D \rangle^{|\alpha|+2d+1} a_n\|_{L^\infty} \|\langle D \rangle^{|\alpha|+2d+1} a_{n'}\|_{L^\infty}$$

Pour f loin de $\text{supp}(a_n) \cup \text{supp}(a_{n'})$

$$|\mathcal{D}^\alpha(\bar{a}_n \# a_{n'})(f)| \leq C h^{k-2d} \frac{\|a_n\|_{C^{k+|\alpha|}} \|a_{n'}\|_{C^{k+|\alpha|}}}{(\text{dist}(f, \text{supp } a_n) + \text{dist}(f, \text{supp } a_{n'}))^k}$$

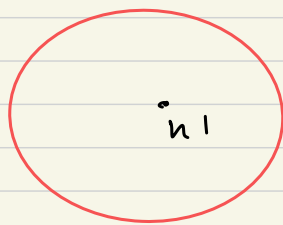
$$|\alpha| \leq 2d+1, \quad k = 2d+1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|A_n \# A_{n'}\|_{\ell(L^2)} &\leq C_d \|a_n\|_{C^{4d+2}} \|a_{n'}\|_{C^{4d+2}} \\ &\leq C_{d,\chi} \|a\|_{C^{4d+2}}^2 \end{aligned}$$

$$2. |n - n'| > 10R_d \quad (" \text{loin} ")$$



$$\frac{n+n'}{2}$$



$$|\partial^{\alpha} (\bar{a}_n \neq a_{n'}) (g)| \leq C_d h^{k-2d} \frac{\|a_n\|_{C^{k+d}} \|a_{n'}\|_{C^{k+d}}}{(|n-n'|^2 + |g - \frac{n+n'}{2}|^2)^{k/2}}$$

$$k \geq 2d+1$$

$$|\alpha| \leq 2d+1$$

$$\rightarrow \|A_n^{\Phi} A_{n'}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_{d,k} h^{k-2d} \frac{\|a_n\|_{C^{k+2d+1}} \|a_{n'}\|_{C^{k+2d+1}}}{\langle n-n' \rangle^k}$$

$$\leq C_{d,k,\gamma} h^{k-2d} \frac{\|a\|_{C^{k+2d+1}}^2}{\langle n-n' \rangle^k}, \quad k \geq 2d+1$$

$$\|A_n A_{n'}^{\Phi}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

"

"

Pour appliquer Gårdar-Stein, on veut faire $\sum_{n'} \| \cdot \|^{1/2}$
 $n \in \mathbb{Z}^{2d}$

$$\sum_k C_k h^* \frac{1}{\langle n - n' \rangle^{k/2}}$$

Sommable si $k \geq 4d + 1$.

Prends $k = 4d + 1$

$$\sum_{n'} \|A_n^* A_{n'}\|^{1/2} = \sum_{|n' - n| \leq 10R_d} C \|a\|_{C^{4d+2}} + \underbrace{\sum_{|n' - n| > 10R_d} C h^{2d+1} \frac{\|a\|_{C^{6d+2}}}{\langle n - n' \rangle^{2d+1/2}}}_{C h^{2d+1} \|a\|_{C^{6d+2}}}$$

$$\leq C_d \|a\|_{C^{4d+2}} + C h^{2d+1} \|a\|_{C^{6d+2}}$$

$$\leq C_{d,h} \|a\|_{C^{6d+2}}$$

$$\sum_{n'} \|A_{n'}^* A_n\|^{1/2} \leq \quad \quad \quad$$

→ on applique Coherstein: $\sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} \hat{Q}_h^u(a_n) \xrightarrow{S} \hat{Q}_h^w(a)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$,

avec $\|Q_h^w(a)\|_{L \rightarrow L^2} \leq C_d \|a\|_{C^{d+2}}$

$= C_d \sum_{|\alpha| \leq d+2} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty}$ - uniforme p/r h.

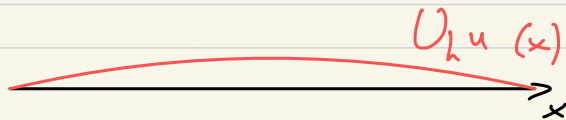
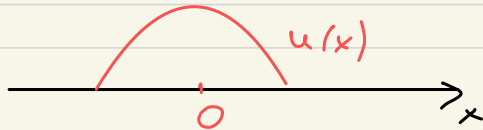
Pour gagner les puissances $h^{k/2}$:

On applique le résultat pour $h=1$:

$\|Q_1^w(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq d+2} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty} \quad \forall a \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$

On utilise une dilatation sur l'espace des phases:

$[U_h u](x) = h^{d/4} u(h^{1/2} x)$, unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

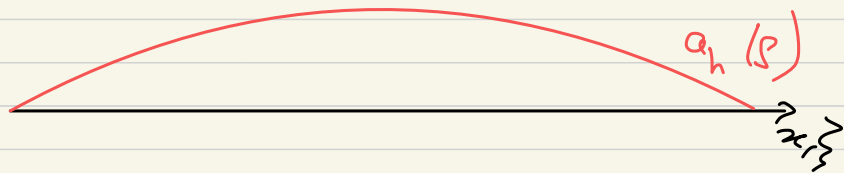
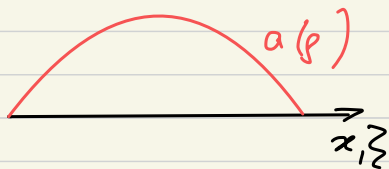


U_h conjugue les quantifications O_p^w et $O_{p_1}^w$.

$$U_h(O_p^w(a)u) = O_{p_1}^w(a_h)U_h u, \quad \text{avec}$$

↖ calcul explicite

$$a_h(p) = a(\Pi_h p).$$



$$O_p^w(a) = U_h^{-1} O_{p_1}^w(a_h) U_h \quad \begin{array}{l} \text{conjugaison} \\ \text{unitaire} \end{array}$$

$$\Rightarrow \|O_p^w(a)\|_{L(L^2)} = \|O_{p_1}^w(a_h)\|_{L(L^2)}.$$

$$\leq C_d \sum_{|\alpha| \leq d+2} \| \partial^\alpha a_h \|_{L^\infty}$$

$$\leq C_d \sum_{|\alpha|} h^{|\alpha|/2} \| \partial^\alpha a \|_{L^\infty} \quad \square$$

→ Corollaire Calcul pseudodifférentiel sur $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$a, b \in S(1)$. Alors $a \#_h b \in S(1)$. Le développement asymptotique de $a \#_h b$ se traduit en un développement du produit d'opérateurs:

$$O_{P_h}^W(a) O_{P_h}^W(b) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(ih/2)^j}{j!} O_{P_h}^W \left(a (w(\vec{x}, \vec{D}))^j b \right) + \underbrace{O(h^N)}_{\mathcal{L}(L^2)}$$

Les constantes dépendent d'un certain nombre de dérivées de a et b .

$$O_{P_h}^W(a) O_{P_h}^W(b) = O_{P_h}^W(ab) - \frac{ih}{2} O_{P_h}^W(\{a, b\}) + O(h^2)_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$a, b \in S(1)$, corresp. class. qui-quantique dans le cadre $\mathcal{L}(L^2)$.

$N=2$:

Si $a, b \in S(1)$ avec $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) = \emptyset$, alors

$$O_{p_h}^w(a) O_{p_h}^w(b) = O(h^\infty)_{\mathcal{L}(L^2)}.$$

Thème | Si $a \in S(1)$ et est à valeurs réelles, alors

$$O_{p_h}^w(a) : L^2 \rightarrow L^2 \text{ est bornée et auto-adjoint.}$$

Dans la direction inverse : aller des propriétés de $O_p(\partial^\alpha a)$ sur L^2 ,
aux propriétés du symbole $a \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{2d})$.

Prop: (v. Zworski) Calderon-Vaillancourt Inverse

| Soit $a \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{2d})$. Supposons que $O_{p_h}^R(\partial^\alpha a)$ sont tous
bornés $L^2 \rightarrow L^2$ lorsque $|\alpha| \leq 2d+1$.

Alors $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, et on a les estimations:

$$\|a\|_{L^\infty} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq 2d+1} h^{\frac{|\alpha|}{2}} \| \mathcal{O}_{P,h}^R(\partial^\alpha a) \|_{L(L^2)}.$$

Pr : Calcul d'intégrales explicites, spécifique à $\mathcal{O}_P^R$.

Corollaire $\exists$ constante $M_d > 0$ tq : soit $t \in [0,1]$,

supposons que les ops $\mathcal{O}_{P,h}^t(\partial^\alpha a)$ sont bornés $L^2 \rightarrow L^2$
 $\forall |\alpha| \leq M_d$. Alors $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|a\|_{L^\infty} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq M_d} h^{\frac{|\alpha|}{2}} \| \mathcal{O}_{P,h}^t(\partial^\alpha a) \|_{L(L^2)}$$

Preuve: $\mathcal{O}_{P,h}^t(a_t) = \mathcal{O}_{P,h}^R(a_1) : \partial_{x_j}^\alpha a_t = e^{ih(t-1) \mathcal{D}_x \cdot \mathcal{D}_\xi} \partial_{x_j}^\alpha a_1$

$$\mathcal{O}_{P_h}^L(\partial^{\alpha} a_t) = \mathcal{O}_{P_h}^R(\partial^{\alpha} a_1)$$

$$\|\mathcal{O}_{P_h}^L(\partial^{\alpha} a_t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \|\mathcal{O}_{P_h}^R(\partial^{\alpha} a_1)\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

CV inverse $\Rightarrow$ $\|a_1\|_{L^{\infty}}$, et sur $\|\partial^{\beta} a_1\|_{L^{\infty}}$ si on contrôle

$$\|\mathcal{O}_P(\partial^{\alpha+\beta} a_1)\|_{\mathcal{L}(L^2)}, \quad |\beta| \in M_d - (2d+1)$$

$\rightarrow$ on contrôle $\|a_1\|_{C^{M_d - (2d+1)}}$

$$a_1 \rightarrow a_t : \quad \|a_t\|_{L^{\infty}} \leq C \|a_1\|_{C^K}, \quad \text{pour } K = K_d.$$

$\rightarrow$ il suffit de prendre $M_d = K_d + (2d+1)$, pour contrôler $\|a_t\|_{L^{\infty}}$.

$\leadsto$ Caractérisation des symboles dans $S(1)$, à partir
 des propriétés de $\mathcal{O}_h(a)$. (commutateurs entre
 $\mathcal{O}_h(a)$ et les quantifications
 de fonctions linéaires).

Symboles linéaires : $p(x, \xi) = \xi_0 \cdot x - x_0 \cdot \xi$
 $= \omega(V, g)$

Action adjointe de $\mathcal{O}_h(p)$: $\text{ad}_{\mathcal{O}_h(p)} A = [\mathcal{O}_h(p), A]$.

$$\mathcal{O}_h(p) = \xi_0 \cdot x - x_0 \cdot \frac{h}{i} \partial_x$$

$$[\mathcal{O}_h(p), A] = \xi_0 \cdot x A - A \xi_0 \cdot x - x_0 \frac{h}{i} (\partial_x A - A \partial_x)$$

Calc: $[O_p(l), O_p^t(a)] = -i\hbar O_p^t(\{l, a\}) +$ ~~$O_p^t(a)$~~

ex: $l(x) = x_1$

$$\begin{aligned}
 x_1 O_p(a) u(x) &= x_1 \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i\xi \cdot (x-y)}{\hbar}} u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi\hbar)^d} \\
 - [O_p(a)(x_1 u)](x) &= - \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i\xi \cdot (x-y)}{\hbar}} y_1 u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi\hbar)^d} \\
 &= \int a(\quad) \underbrace{e^{\frac{i\xi \cdot (x-y)}{\hbar}} (x_1 - y_1)}_{\quad} u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi\hbar)^d} \\
 &= \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \frac{\hbar}{i} \partial_{\xi_1} \left(e^{\frac{i\xi \cdot (x-y)}{\hbar}} \right) u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi\hbar)^d} \\
 &= i\hbar \int (\partial_{\xi_1} a(\quad)) e^{i(\quad)} u \frac{dy d\xi}{(2\pi\hbar)^d} \\
 &= i\hbar O_p^w(\partial_{\xi_1} a) = -i\hbar O_p(\{l, a\})
 \end{aligned}$$

$$p = \pi_i \rightarrow \{p, a\} = -\partial_{\xi_i} a$$

$$p = \xi_i \rightarrow \{p, a\} = \partial_{x_i} a$$

Théorème de Beals

Soit $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$, qui peut dépendre de h . Pour $t \in [0, 1]$, on définit $A = Q_h^t(a)$. Alors les 2 énoncés suivants sont équivalents:

1. $a \in S(1)$

2. $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall$ suite $p_1, \dots, p_N$ de symboles linéaires, l'opérateur $\text{ad}_{Q_h(p_N)} \dots \circ \text{ad}_{Q_h(p_2)} \text{ad}_{Q_h(p_1)} A$ sont bornés sur L^2 ,

de normes $\left\| \text{ad}_{Q_h(p_N)} \dots \circ \text{ad}_{Q_h(p_1)} A \right\|_{L^2} = O(h^N)_{p_1, \dots, p_N}.$

Pr. $\forall p$ linéaire, $[O_{p_h}(e), O_{p_h}^t(a)] = -i\hbar O_{p_h}^t(\{e, a\})$

$$\Rightarrow \|O_{p_h}^t(\partial a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(1)_{h \rightarrow 0}$$

$$\|O_{p_h}^t(\partial^2 a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(1)_{h \rightarrow 0} \quad |\alpha| \leq N.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\partial^{\beta} a\|_{L^{\infty}} &\leq C_d \sum_{|\alpha| \leq |\beta|} h^{|\alpha|/2} \underbrace{\|O_p(\partial^{\alpha+\beta} a)\|_{\mathcal{L}(L^2)}}_{O(1)} \\ &= O_{\beta}(1), \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a \in S(1).$$

Si $a \in S(1) \rightarrow [O_p(e), O_p(a)] = -i\hbar O_p(\underbrace{\{e, a\}}_{\in S(1)})$
 $\underbrace{\phantom{O_p(\{e, a\})}}_{O(1)_{\mathcal{L}(L^2)}}$

