Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation
Cours d'introduction à l'analyse spectrale (2015-2016, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher

Examen intermédiaire (30 octobre 2015)

Problème 1. Somme de deux opérateurs : $S = A + B$

Dans ce problème on étudie la somme de deux opérateurs linéaires A et B densément définis sur un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$.

1. Supposons $(A, D(A))$ fermé et B borné sur $\mathscr{H}$. Montrer que l'opérateur $S = A+B$, défini sur $D(S) = D(A)$, est fermé. Montrer que son adjoint $S^* = A^* + B^*$.
2. Dans le reste du problème on supposera que $(A, D(A))$ est auto-adjoint.
   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est dans l'ensemble résolvant de A, alors
   $$\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}.$$
   (Indication : traiter d'abord le cas $z \in \mathbb{R}$.)
   (b) En déduire que si $z \in \operatorname{Res}(A)$ est tel que $\operatorname{dist}(z, \sigma(A)) > \|B\|$, alors z est aussi dans $\operatorname{Res}(A + B)$. En déduire une propriété de *stabilité* du spectre de A par rapport à de petites perturbations B.
3. Application : opérateurs de Schrödinger quasipériodique sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.
   Soit $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ périodique de période 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ on considère la famille d'opérateurs $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$:
   $$A_\alpha \psi(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1) + v(n\theta + \alpha)\psi(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$
   (a) Montrer que A_α est auto-adjoint, et ne dépend de α que modulo 1.
   (b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{\beta \to \alpha} A_\beta = A_\alpha$ pour la norme d'opérateurs.
   (c) Soit l'opérateur de décalage $D\psi(n) = \psi(n-1)$. Montrer que $D^* A_\alpha D = A_\beta$ pour un β qu'on explicitera.
   (d) Supposons θ *irrationnel*. Montrer que les opérateurs A_α ont tous le même spectre.
4. On suppose maintenant que $(A, D(A))$ est borné inférieurement, et on appelle q_A la forme sesquilinéaire fermée qui lui est associée, de domaine $D(q_A)$. On suppose que $(B, D(B))$ est symétrique, que son domaine $D(B) \supset D(q_A)$, et qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que
   $$\|B\psi\|^2 \leq c_1 q_A(\psi, \psi) + c_2\|\psi\|^2, \qquad \forall \psi \in D(q_A)\,.$$

(a) Montrer que l'opérateur $S = A + B$ est bien défini sur $D(S) = D(A)$. On veut montrer que $(S, D(S))$ est auto-adjoint.

(b) Considérons la forme sesquilinéaire $q_S(\varphi, \psi) = q_A(\varphi, \psi) + \langle \varphi, B\psi \rangle$ définie sur $D(q_S) = D(q_A)$. Montrer que $(q_S, D(q_S))$ est fermée.

(c) Montrer que l'opérateur associé à q_S est bien $(S, D(S))$. En conclure que S est auto-adjoint.

5. En utilisant la question précédente, montrer que pour $V \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, l'opérateur de Schrödinger $S\psi(x) = -\psi''(x) + V(x)\psi(x)$, de domaine $D(S) = H^2(\mathbb{R})$, est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$. (Indication : utiliser une injection de Sobolev dans $C_b^0(\mathbb{R})$).

6. Même question pour l'opérateur $S\psi(x) = -\psi''(x) + \frac{\alpha(x)}{i}\psi'(x) + \frac{\alpha'(x)}{2i}\psi(x)$, avec $\alpha \in C_b^1(\mathbb{R})$.

Problème 2. Laplacien mixte et son inverse

On se place sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H} = L^2([0,1])$. On s'intéresse au laplacien $\psi \mapsto -\psi''(x)$ sur $[0,1]$, avec des conditions aux bords d'un type mixte.

1. Considérons la forme sesquilinéaire

$$q(\varphi, \psi) = \int_0^1 \overline{\varphi'(x)}\, \psi'(x)\, dx, \qquad D(q) = \{\psi \in H^1([0,1]),\ \psi(0) = 0\}.$$

(a) Montre que $(q, D(q))$ est une forme fermée, et décrire l'opérateur $A = A_q$ qui lui est associé.

(b) Calculer explicitement les valeurs propres et les fonctions propres de A.

(c) Montrer que A est inversible d'inverse borné. Montrer que A est à résolvante compacte, et décrire le spectre de A.

2. On cherche à décrire explicitement l'opérateur $G = A^{-1}$. Comme A agit par deux dérivées, on va chercher G sous la forme d'une double intégrale. Pour chaque $x_0 \in [0,1]$ on définit l'opérateur

$$B_{x_0}\psi(x) = \int_{x_0}^x \psi(y)\, dy.$$

(a) Montrer que pour tout x_0, l'opérateur B_{x_0} est Hilbert-Schmidt sur $L^2([0,1])$.

(b) Montrer que G peut s'obtenir comme la composition $G = -B_{x_2} \circ B_{x_1}$, pour des valeurs x_1, x_2 qu'on précisera.

(c) Pour tout x_0, calculer l'adjoint $B_{x_0}^*$. (Indication : étudier le noyau de Schwartz de l'opérateur). En déduire que G est bien auto-adjoint.

(d) Montrer que G est Hilbert-Schmidt, et calculer sa norme de Hilbert-Schmidt. En déduire la valeur de la série $\sum_{n \geq 0} (2n+1)^{-4}$.