Analyse IV

Intégration et Probabilités

S. Nonnenmacher

3 mars 2026

USTC

Introduction - motivation : pourquoi une nouvelle théorie de l'intégration ?

- < 19^e siècle : fonctions dérivables, primitives :

$$f : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Primitive : fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\forall x \in [0,1], \quad F'(x) = f(x)$.

$\longrightarrow$ solution $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + c^{te}$.

$f(x)$ décrite par une formule explicite

ex : $f(x) = P(x)$ polynôme

$f(x) = \exp(\lambda x)$

$f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$

$\vdots$

→ chercher la formule pour la primitive $F(x)$.

19ᵉ siècle : s'intéresser à des familles "générales" de fonctions :

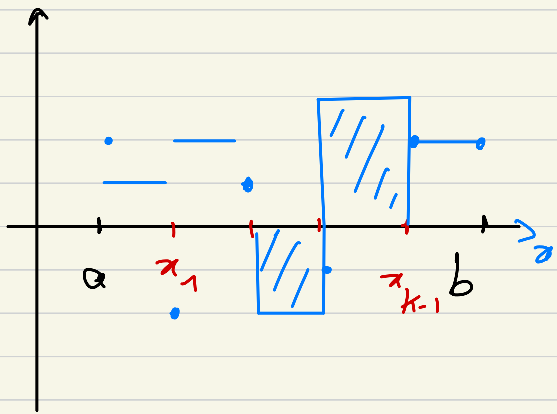
- fonctions continues $f \in C^0(I, \mathbb{R})$
- " " dérivables $f \in C^1(I, \mathbb{R})$
- fonctions définies par un processus limite (ex : $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, avec conditions sur les coefficients (a_n).

→ comment calculer (ou définir) la primitive de telles fonctions ?

→ 1 proposition : Berhardt Riemann, en 1854 : définit une procédure pour calculer l'intégrale d'une fonction f définie sur $I = [0, 1]$.

Base de la procédure : <u>fonctions en escalier.</u>

$I = [a, b]$, découpé en un nombre fini de sous-intervalles : $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_K = b$



f en escalier sur ce découpage de I : f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$.

→ l'intégrale d'une fonction en escalier

$\forall j, \quad f(x) = f_j$ sur $]x_j, x_{j+1}[$

$\Longrightarrow$ son intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{K-1} f_j\,(x_{j+1}-x_j)$

aire algébrique du rectangle

Généralisation (Riemann) en prenant des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ obtenues comme limites uniformes de fonctions en escalier.

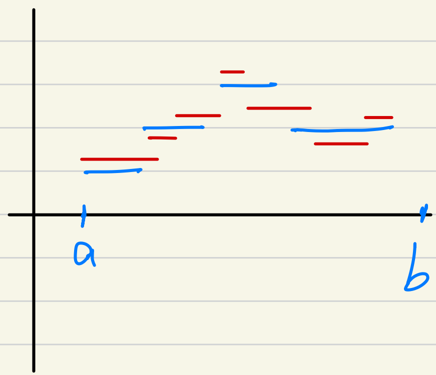
Notation : norme sup $\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions converge uniformément vers une fonction f si : $\|f-f_n\|_{\sup} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est appelée une fonction réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

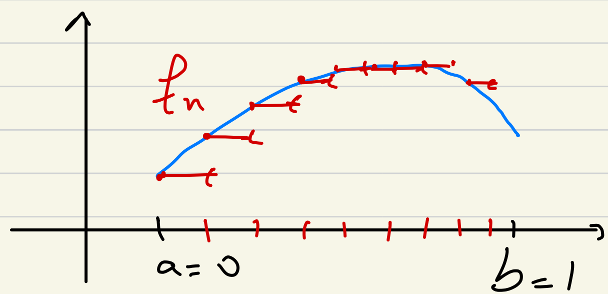
$\Longleftrightarrow$ si il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier sur I, telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément sur I.

En général, les découpages / partitions de I sont différents pour toutes les fonctions f_n



Exemple de fonction réglée :

- f fonction en escalier
- f fonction continue sur I



On découpe (a, b) en n sous-intervalles de même longueur

$$I_k^{(n)} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad k = 0, .., n-1.$$

f_n fonction en escalier sur ce découpage, avec

$$f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right), \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$$

f continue sur $I \underset{\text{thme de Heine}}{\Longrightarrow}$ f est uniformément continue sur I

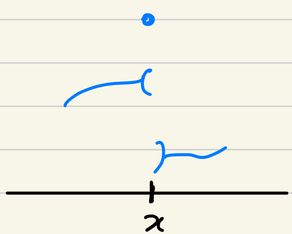
$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1 \text{ tq } \quad \forall x, y \in I,$$
$$\text{si } |x-y| < \frac{1}{n_\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \|f_n - f\|_{\sup} \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ les fonctions (f_n) convergent uniformément vers f.

• On peut montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si, en tout point $x \in I$, f admet une limite à gauche $\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y) = f_-(x)$

et une limite à droite $\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y) = f_+(x)$



<u>Proposition</u>: Soit f une fonction réglée sur I, et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Alors on montre que les intégrales

$S_n = \int_I f_n(x)\,dx$ ont une limite lorsque $n \to \infty$.

Cette limite définit l'intégrale (de Riemann) de la fonction f sur I, on la note $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$$= \int_a^b f(x)\,dx .$$

<u>Preuve:</u> Convergence uniforme des (f_n)

$\Rightarrow \forall \epsilon,\ \exists n_\epsilon,\ \forall n \geq n_\epsilon,\ \| f_n - f \|_{sup} \leq \epsilon$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_\epsilon,\ \| \underbrace{f_n - f_m}_{\text{fonction en escalier}} \|_{sup} \leq 2\varepsilon .$

$\to$ le calcul montre que

$$S_n - S_m = \int_I (f_n(x) - f_m(x))\,dx \leq 2\varepsilon\,(b-a) = 2\varepsilon\,|I| .$$

$\Rightarrow$ la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est complet $\Rightarrow$ la suite (S_n) a une limite,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

- S est indépendante du choix de la suite (f_n).

Si on a une 2^e suite $(\tilde{f}_n)$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, on sait alors que la suite $(\tilde{S}_n)$ converge vers une limite $\tilde{S}$.

$$\forall \varepsilon,\ \exists \tilde{n}_\varepsilon \text{ tq } \forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon,\quad \|\tilde{f}_n - f\|_{\sup} \leq \varepsilon$$

$$\forall n \geq \max(n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon),\quad \|f_n - f\|_{\sup} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f_n - \tilde{f}_n\|_{\sup} \leq 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow |S_n - \tilde{S}_n| \leq 2\varepsilon |I| .$$

$n \to \infty$: $\quad |S - \tilde{S}| \leq 2\epsilon |I| \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow S = \tilde{S}$. $\quad \square$

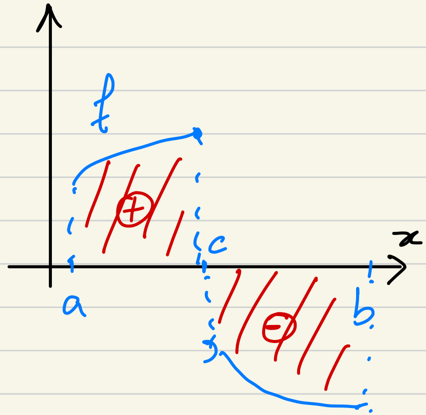
Exercice : Montrer que l'intégrale des fonctions en escalier est une <u>opération linéaire</u> :

f, g 2 fonctions en escalier, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est en escalier.

Alors $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx$

Corollaire : on a le même résultat de linéarité pour f, g 2 fonctions réglées.



$\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire algébrique comprise entre l'axe des x et le graphe de f

$$G_f = \{ (x, f(x)) \,;\, x \in I \} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{>0} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{<0}$$

$$= \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{A_+} - \int_c^b |f(x)|\,dx$$

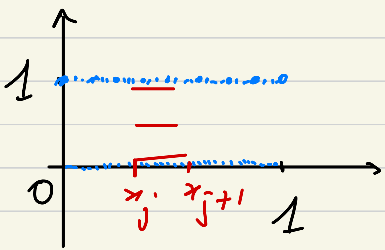
$$A_+ - A_-$$

Problèmes avec l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

→ apparition de fonctions "très singulières".

Ex : $I = [0,1]$. Fonction caractéristique des rationnels de I :

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\cap I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$\forall r < q \in \mathbb{Q}, \exists x \in]r,q[, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\forall x \in I$, f n'admet pas de limite à gauche en x, ni de limite à droite en x.

→ f n'est pas réglée.

Facile demontrer que f ne peut pas être être approchée uniformément par des fonctions en escalier:

$\forall g$ fonction en escalier, $\exists]x_j, x_{j+1}[$ sur lequel $g(x) = g_j$.

Sur $]x_j, x_{j+1}[$, $\exists x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 1$

Par absurde, supposons que pour $\forall \epsilon > 0$, on peut trouver g en escalier telle que $\|f - g\|_{\sup} \leq \varepsilon$.

$$\Rightarrow |1 - g_j| \leq \varepsilon$$

$\exists$ aussi $x' \in]x_j, x_{j+1}[$, tq $x' \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(x') = 0$

$$|0 - g_j| \leq \varepsilon$$

Si $\epsilon < \frac{1}{2} \longrightarrow$ contradiction. Donc on ne peut pas approcher f par des fonctions en escalier.

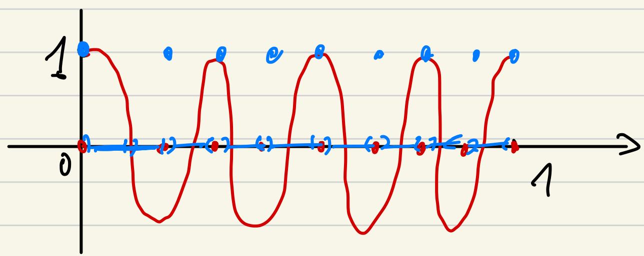
Qu : comment peut-on définir l'intégrale de cette fonction f ?

. Remarque : on peut fabriquer cette fonction f comme limite <u>simple</u> de fonctions continues

Convergence simple

$$F_n(x) = \lim_{m \to \infty} \cos(\pi n! x)^{2m}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$



$$\cos(\pi n! x)^{2m} = 1 \text{ pour}$$

$$x = \frac{j}{n!}, \; j \in \mathbb{Z}.$$

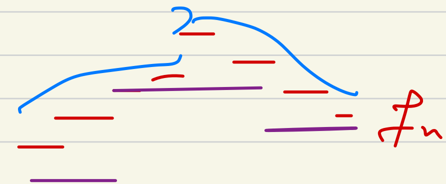
$$F_n = \mathbb{1}_{\{\frac{k}{n!},\, k = 0 \dots n!\}}$$

$$F_{n+1} = \mathbb{1}_{\{\frac{k}{(n+1)!},\, k = 0 \dots (n+1)!\}}$$

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap I} = \lim_{n \to \infty} F_n \qquad \text{Convergence simple.}$$

• Généralisation de l'intégrale de Riemann :

On choisit des suites de fonctions en escalier (f_n) telles que $f_n(x) \leq f(x)$



On définit $S_-(f) = \sup\limits_{\substack{f_n \leq f \\ f_n \text{ en escalier}}} \int_I f_n(x)\,dx$

Si $f(x) \leq C$, $\forall x \in I \Rightarrow \forall n,\ f_n(x) \leq C$

$$\Rightarrow \int f_n(x)\,dx \leq C|I|$$

$$\Rightarrow S_-(f) \leq C|I|.$$

De même, $S_+(f) = \inf\limits_{g_n \geq f} \int g_n(x)\,dx$

En général, $\quad g_n(x) \geq f_m(x) \quad \forall n, m \quad \forall x.$

$$\rightarrow \int g_n(x)\,dx \geq \int f_n(x)\,dx$$

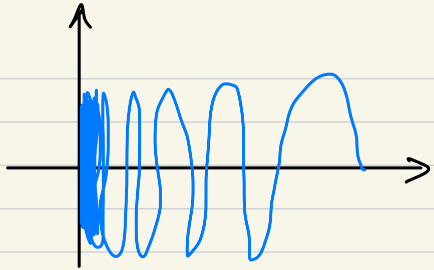
$$\rightarrow \quad S_+ \geq S_- .$$

<u>Déf</u>: f est une fonction Riemann-intégrable si $S_+ = S_-$. Dans ce cas, on définit l'intégrale

$$S := \int_I f(x)\,dx := S_+ = S_-$$

Remarque: il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont pas réglées.

ex: $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \in]0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$



$\longrightarrow$ on peut définir $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Par contre, la fonction $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap I}(x)$ n'est pas Riemann-intégrable.

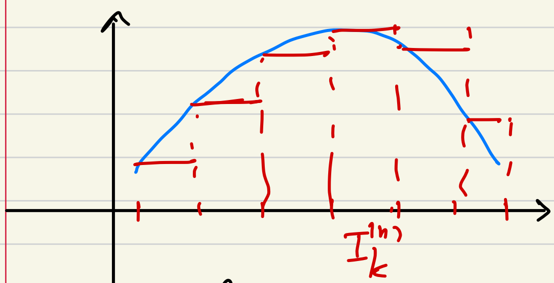
$\forall f_n \leq f \longrightarrow f_n \leq 0$ sur chaque sous-intervalle $\Rightarrow \int f_n(x)dx \leq 0$

$\forall g_n \geq f \Rightarrow g_n \geq 1$ " " $\int g_n(x)dx \geq 1.|I|$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_+ = 1.|I| \\ S_- = 0 \end{cases}$$

• Difficulté principale : exigence de convergence <u>uniforme</u> $f_n \to f$.

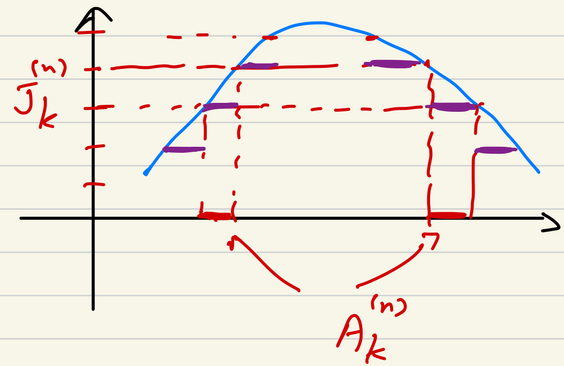
$\rightsquigarrow$ 1901 : Henri Lebesgue propose une nouvelle définition de l'intégrale. Intégrale de Lebesgue.



Riemann

découpage de

$$I = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} I_k^{(n)}$$



découpage de $J = \bigsqcup J_k^{(n)}$, l'intervalle image de f

$$J_k^{(n)} = [y_k^{(n)}, y_{k+1}^{(n)}] \quad \rightsquigarrow \quad A_k^{(n)} = f^{-1}(J_k^{(n)})$$

→ on définit une <u>fonction étagée</u>

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)} \, \mathbb{1}_{A_k^{(n)}}(x)$$

Fonction qui peut être plus compliquée qu'une fonction étagée :

- admet un nombre fini de valeurs
- les ensembles $A_k^{(n)}$ peuvent être plus compliqués que des sous-intervalles.

Intégrale de la fonction étagée :

$$\int_I f_n(x)\,dx = \sum_k y_k^{(n)} \underbrace{\left|A_k^{(n)}\right|}_{\text{longueur de } A_k^{(n)}.}$$

→ Question : peut-on toujours attribuer à l'ensemble $A_k^{(n)}$ une longueur ?

→ NON ! ⇝ définir la notion d'ensemble mesurable.

- définir les classes de fonctions f qu'on peut approcher par des fonctions étagées.
  fonctions <u>mesurables</u>.
- vérifier qu'on peut passer à la limite $n \to \infty$ pour définir l'intégrale de la fonction f.
  ⇝ classe des fonctions <u>intégrables</u>.
  ⇝ $\int f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$

. Généralisation : A_k mesurables $\longrightarrow$ $|A_k|$ longueur de A_k

$= \text{mesure de Lebesgue de } A_k$

$= \underbrace{\mu_{Leb}}\,(A_k)$

$= \lambda_1\,(A_k)$

μ_{Leb} peut être remplacée par une mesure + générale

$A_k \longrightarrow \underset{\geq 0}{\mu(A)}$ poids de A_k pour la mesure μ.

$\longrightarrow$ définir l'intégrale d'une fonction f par rapport à la mesure μ : $\int f(x)\, d\mu(x)$, qui n'a plus rien à voir avec l'aire algébrique entre (Ox) et le graphe de f.

- Définir l'intégrale de f définie sur des espaces E plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

1 avantage : on se servira de la <u>convergence simple</u> des fonctions.

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \quad \text{simplement}$$

Chapitre 2 : Mesures (positives), fonctions mesurables

E espace quelconque. $f : E \to \mathbb{R}$ fonction réelle.

On va définir les notions de

- sous-ensemble (partie) mesurable de E.
  - $\rightsquigarrow$ forment une tribu / σ-algèbre sur E (famille des sous-ensembles mesurables)
- une mesure μ, définie sur cette tribu
- les fonctions f mesurables par rapport à cette tribu.
  - $\rightsquigarrow$ $\int f(x)\, d\mu(x)$

. **Tribus** E ensemble quelconque. $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Déf: Soit E un ensemble. Une tribu de E est une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ de parties de E, satisfaisant les propriétés suivantes:

i) $\mathcal{A} \ni E$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors son complémentaire $CA = A^c = E \setminus A$ est aussi dans $\mathcal{A}$. ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire)

iii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors leur union $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est aussi dans $\mathcal{A}$.
($\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable)

Les éléments $A \in \mathcal{A}$ sont appelés les sous-ensembles ($\mathcal{A}$-)mesurables de E.

Conséquences simples :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $(A_n)_{n\geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors

$$\bigcap_{n\geq 0} A_n = \bigcap_{n\geq 0}\left((A_n^c)^c\right) = \left(\bigcup_{n\geq 0}(A_n^c)\right)^c \in \mathcal{A}$$

$\rightarrow$ stabilité par intersection dénombrable

3. Si on prend $A_n = \emptyset$ pour $n \geq N+1$

$$\rightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$$

$\rightarrow$ stabilité par union finie.
intersection finie.

Rem : si on avait seulement stabilité par union et intersections finies $\rightsquigarrow$ on appellerait $\mathcal{A}$ une algèbre.
Si on autorise les $\bigcup$ $\bigcap$ dénombrables $\rightarrow$ σ-algèbre.

Exemples :

1. la tribu complète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.
2. la tribu minimale : $\mathcal{A}_{min} = \{E, \emptyset\}$

Pour $E = \mathbb{R}$, ces 2 tribus ne sont pas intéressantes.
$\longrightarrow$ les tribus intéressantes $\mathcal{A}_{min} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}(E)$.

Propo Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont 2 tribus sur E, alors leur intersection $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A \subset E \,;\, A \in \mathcal{A} \text{ et } A \in \mathcal{B}\}$ est également une tribu.

<u>Déf°</u> Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E.

Alors il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

Cette tribu est unique, définie par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ tribu}, \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{A}$$

On appelle $\sigma(\mathcal{C})$ <u>la tribu engendrée par la famille $\mathcal{C}$.</u>

Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$$