Intégration et Probabilités

Cours n° 2

5/3/2026

S. Nonnenmacher

- tribu engendrée par une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ tribu} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{A}$$

- <u>Tribu borélienne</u>

1. E espace topolique : il existe une topologie sur E, c'est-à-dire une famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ constituée des ouverts de E.

   - $E \in \mathcal{O}$, $\phi \in \mathcal{O}$, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ famille d'ouverts $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

     $U_1, U_2, \dots U_N \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{N} U_i \in \mathcal{O}$.

⇝ définir la tribu engendrée par cette topologie :

$$\boxed{\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O})}$$

tribu | borélienne
| des boréliens

$A \subset E$ est borélien si $A \in \mathcal{B}(E)$.

Emile Borel
(définition des mesures, des tribus)

- Si E est un espace topologique, la tribu naturelle sur E sera la tribu de Borel, $\mathcal{B}(E)$.

→ un ensemble mesurable sur E sera un ensemble borélien.

- Ex : E espace métrique (distance $d(x,y)$)

→ boules ouvertes $B(x,r) = \{ y \in E ;\ d(x,y) < r \}$ engendrent une topologie sur E.

$\rightsquigarrow \mathcal{B}(E)$ tribu borélienne sur E.

. Ex : E espace euclidien, avec une norme $\|\cdot\|$ euclidienne

(ex : $E = \mathbb{R}^d$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$), $d(x,y) = \|x-y\|$

$\rightarrow B(x,r) = \{y \in E ; \|x-y\| < r\}$.

$\rightarrow$ tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

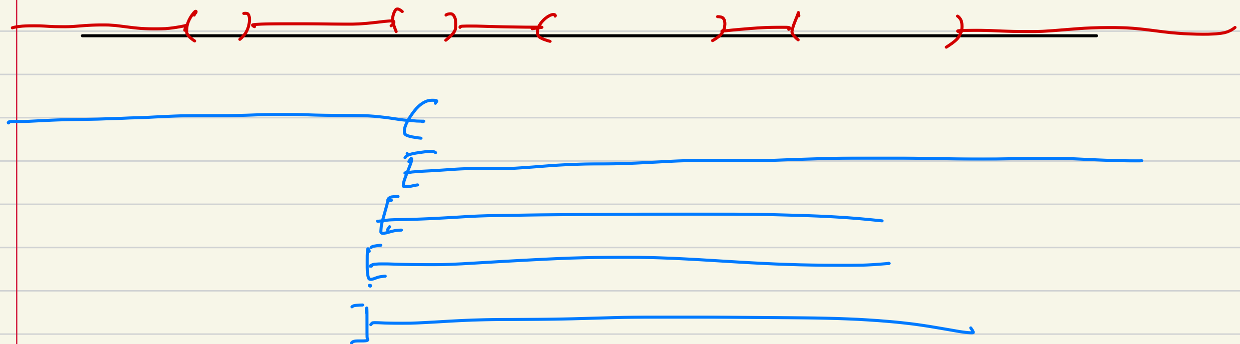
. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{\text{ouverts de } \mathbb{R}\})$

Exercice : montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des intervalles $\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}_1$

$\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\text{ouverts})$ $\{]-\infty, b[, b \in \mathbb{Q}\} = \mathcal{C}_2$

Indication :

- tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints



$]b, +\infty[$

$\longrightarrow \quad]b, a[$

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists (b_i)$ de rationnels, t.q. $b_i \xrightarrow[i \to \infty]{} a$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \left]-\infty, b_i\right[= \left]-\infty, a\right[.$$

- Complexité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient :
  - les ouverts $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$
  - les fermés $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ est / ouvert.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ n'est, en général, ni ouvert ni fermé,

on appelle un tel ensemble un ensemble $G\delta$.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ est un fermé

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ n'est, en général, pas fermé $\longrightarrow$ ensemble F_σ.

K_i compacts $\longrightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ ensemble $K\delta$.

Si $F_i \in F_\sigma$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in F_\sigma$.

mais $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ seront d'un nouveau type : $F_{\sigma\delta}$

$$G_\delta \to \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} O_{ij}}_{G_\delta}}_{G_{\delta\sigma}}$$

$\dots \; G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta} \; \dots$ sont tous dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

. Produit de 2 espaces mesurés

2 ensembles $E_1, E_2 \longrightarrow$ produit cartésien $E_1 \times E_2$

$$E_1 \times E_2 = \left\{ (x,y) ; \begin{array}{l} x \in E_1 \\ y \in E_2 \end{array} \right\}.$$

Si $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ 2 espaces mesurables

$\Rightarrow$ tribu naturelle sur $E_1 \times E_2$?

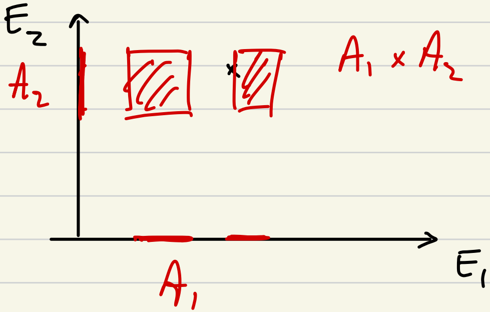
tribu ? $\longrightarrow$ $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \left\{ A_1 \times A_2 \text{, avec } \begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{T}_1 \\ A_2 \in \mathcal{T}_2 \end{array} \right\}$

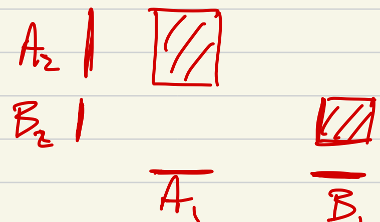
NON en général (pas stable par union)

La tribu naturelle sur $E_1 \times E_2$, c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$:

$$\underbrace{\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2}_{\text{la tribu produit}} := \sigma(\underbrace{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}_{\text{produit des tribus}}) = \sigma\left(\left\{ A_1 \times A_2,\ \begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{A}_1 \\ A_2 \in \mathcal{A}_2 \end{array} \right\}\right)$$

$A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$





$(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$ n'est pas de la forme $C_1 \times C_2$

Ex : $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\to$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est égale à la tribu borélienne

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{ O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2 \})$$

$\forall$ O_1, O_2 ouverts de $\mathbb{R}$, le produit cartésien

$O_1 \times O_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \{ O_1 \times O_2 , \ O_1, O_2 \text{ ouverts de } \mathbb{R} \} \subset \{ \text{ouverts de } \mathbb{R}^2 \}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Vrai pour tout espace topologique E :

$$\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \subset \mathcal{B}(E^2).$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{ B_1 \times B_2 , \quad B_1, B_2 \text{ boréliens de } \mathbb{R} \} \right)$$

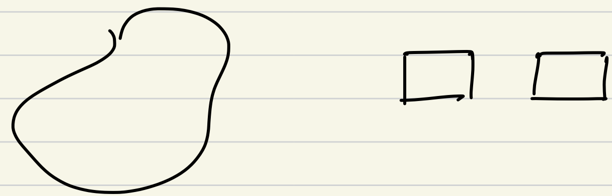
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{ \text{Ouverts de } \mathbb{R} \} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma\left(\{ B_1 \times B_2 \} \right) = \sigma\left(\{ O_1 \times O_2 ; \ O_i \text{ ouverts de } \mathbb{R} \} \right)$$

$$= \sigma\left(\{ O_1 \times B_2 \} \right)$$

$$= \sigma(\{B_1 \times O_2\})$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{O \text{ ouverts de } \mathbb{R}^2\})$$



On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \mu(A) \end{aligned}$$

"poids" de A

la mesure de A.

Déf : Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure (positive) sur cet $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \longmapsto [0, \infty]$ ayant les propriétés suivantes :

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) Pour une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties disjointes 2 à 2 mesurables,

$\forall i \neq j, \; A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mu\Big(\underbrace{\bigsqcup_{i=0}^{\infty} A_i}_{\in \mathcal{A}}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} \mu(A_i)$$

$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad \dots$

Remarques :

0. $\mu(A)$ peut valoir $+\infty$.

1. $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$

les A_i sont disjoints 2 à 2.

2. $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ est toujours bien définie.

3. ii) est appelée σ-additivité

Si $A_N = A_{N+1} \cdots = \emptyset \Rightarrow \bigsqcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{N-1} A_i$

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=0}^{N-1} A_i\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu(A_i)$$

$\rightarrow$ additivité de μ.

4. Cette σ-additivité ne s'étend pas à une famille indénombrable d'éléments mesurables.

ex : $E = \mathbb{R}^1$, $\mu = \lambda_1$ mesure de Lebesgue (= "longueur")

$$\lambda_1(]a,b[) = b-a > 0 \text{ si } b > a.$$

$$]a,b[= \bigsqcup_{x \in]a,b[} \{x\} \qquad \lambda_1(\{x\}) = 0$$

$$\cancel{\sum_{x \in]a,b[} \lambda_1(\{x\})}$$

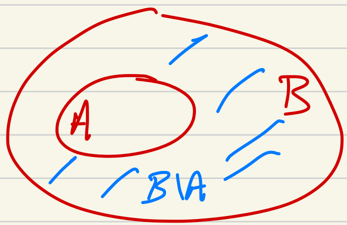
- En général, μ n'est définie que sur les éléments de la tribu $\mathcal{A}$, mais pas sur les autres ~~sous~~-ensembles de E.

ex : λ_1 mesure de Lebesgue n'est pas définie sur tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

• Propriétés de μ.

1. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

   Si $\mu(A) < \infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.



pr : $B = A \sqcup (B \setminus A) \to \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$

Si $\mu(A)$ fini
- soit $\mu(B)$ est aussi fini

  $\to \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- soit $\mu(B) = +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = +\infty$

  $= +\infty - \mu(A)$

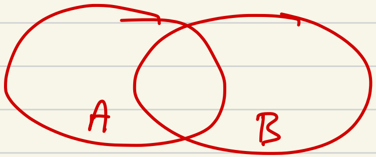
  $= \mu(B) - \mu(A)$.

si $\mu(A) = +\infty$, l'égalité n'est pas toujours vraie

alors $\mu(B) = +\infty$ aussi, mais $\mu(B) - \mu(A) = \,?$

$+\infty - (+\infty) = \,?$

2.



$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$$

$$\left(\Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \right)$$

$$A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$$

$$B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$$

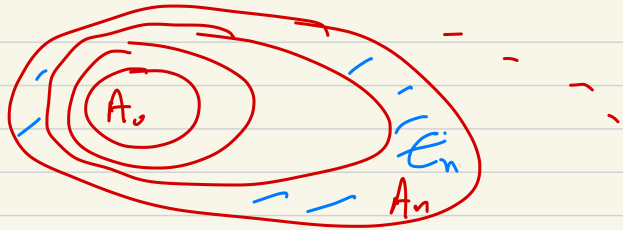
$$\mu(B) = \quad " \quad " \quad + \mu(B \setminus A)$$

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \underbrace{\mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)}_{\mu(A \cup B)}$$

$$\quad " \quad " \quad + \quad \mu(A \cup B)$$

3. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ famille croissante : $A_n \subset A_{n+1}$

$\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$



$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mu(A_n).$$

pr: (A_n) suite $\uparrow$ $\longrightarrow$ on définit $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $C_0 = A_0$

$= A_n \cap (A_{n-1}^c)$ $\quad C_1 = A_1 \setminus A_0$

$$A_n = C_0 \sqcup C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$$

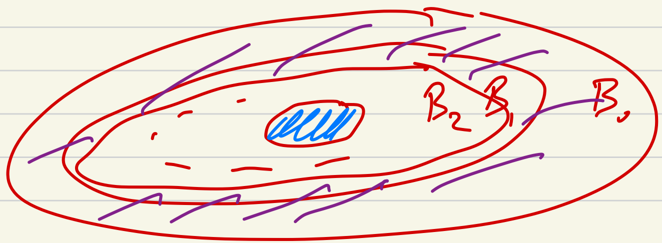
$$\Rightarrow \mu(A_n) = \sum_{j=0}^{n} \mu(C_j)$$

$$\lim_n \mu(A_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(C_j) = \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

4. Si les $(B_n)_n$ famille décroissante $(B_n \supset B_{n+1})$,

et si $\mu(B_0) < \infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mu(B_n)$$



(condition + faible : $\exists N$ t.q. $\mu(B_N) < \infty$)

pr : $A_n = B_0 \setminus B_n$ suite croissante

$$\mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \mu\Big(\underbrace{B_0 \setminus \big(\bigcap_{n\geq 0} B_n\big)}\Big)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \lim_n \nearrow \mu(A_n)$$

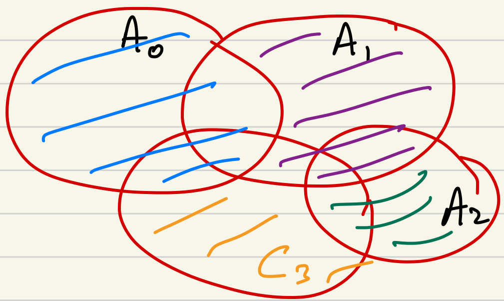
$$= \lim_n \mu(B_0 \setminus B_n)$$

$$= \lim_n \left(\mu(B_0) - \mu(B_n) \right)$$

$$= \mu(B_0) - \lim_n \mu(B_n)$$

5. Famille $(A_n)_{n \geq 0}$ de mesurables, alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$$ (σ-sous-additivité)



A partir des (A_n), on fabrique une famille d'ensembles disjoints

$C_0 = A_0$

$C_1 = A_1 \setminus A_0$

$C_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1)$

$C_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$

$$\bigcup_{j=0}^{n} A_j = \bigsqcup_{j=0}^{n} C_j$$

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\mu(C_j)}_{\leq \mu(A_j)}$$

$$C_j \subset A_j$$

$$\Rightarrow \mu(C_j) \leq \mu(A_j)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j).$$

. Exemples de mesures :

1. $E = \mathbb{N}$, tribu complète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On définit la mesure de comptage $\mu(A) = \# A$.

$\mu(\mathbb{N}) = +\infty$.

$B_n = \{n, n+1, \dots\}$, $\mu(B_n) = +\infty$.

(B_n) suite décroissante, et $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset$!

$\forall n$, $\mu(B_n) = +\infty$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = +\infty$$

MAIS $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$.

2. $(E, \mathcal{A})$, $x \in E$. $\longrightarrow$ mesure de Dirac en x,

$$\mu = \delta_x \qquad \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

$$= \mathbb{1}_A(x)$$

Dirac : $E = \mathbb{R}$, "fonction" de Dirac $\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ +\infty \text{ si } x = 0 \end{cases}$

mais telle que $\int \delta(x)\,dx = 1$

$\rightarrow \delta(x) =$ mesure δ_0.

- Si $(E, \mathcal{A})$, μ_1, μ_2 2 mesures.

  $\underline{\underline{\alpha_1, \alpha_2 \geq 0}} \rightarrow \mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ est encore une mesure.

$$\forall A, \quad \mu(A) = \alpha_1 \mu_1(A) + \alpha_2 \mu_2(A).$$

- $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mesure de Lebesgue λ_1,

  telle que, $\lambda_1(\,]a,b[\,) = b - a$ "longueur"

$$\lambda_1([a,b]) = b - a$$

$$\rightarrow \lambda_1(\{a\}) = 0$$

notations Equivalentes : λ_1, λ, m, dL, dx.

On montrera l'unicité de cette mesure.

Généralisation en dimension supérieure :

$d = 2$, λ_2 sur $\mathbb{R}^2$: mesure d'<u>aire</u>.

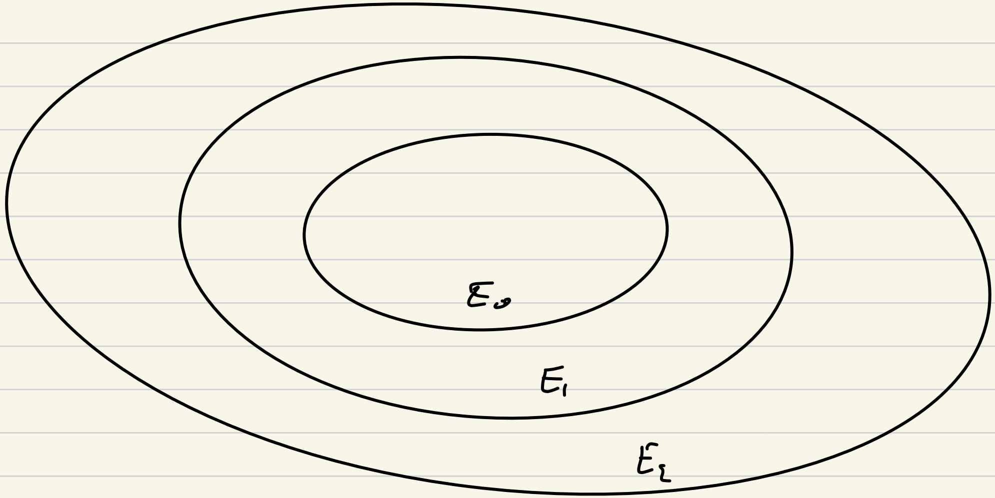
$d = 3$, λ_3 sur $\mathbb{R}^3$: mesure de volume.

$d > 3$ λ_d volume d-dimensionnel.

• <u>Déf°</u> 1. μ est <u>finie</u> si $\mu(E) < \infty$.
↳ masse totale de μ.

Si $\mu(E) = 1$: μ mesure de probabilité.

2. μ est σ-finie s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n \geq 0}$ de mesurables, telle que $\bigcup_{n \geq 0} E_n = E$, et $\mu(E_n) < \infty$, $\forall n$.



$$\bigcup_{n\geq 0} E_n = E$$

j'autorise

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(E_n)$$

à être infinie.

Ex : . mesure de comptage sur $\mathbb{N}$: $E_n = [\![0, n]\!]$

. mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, ou sur $\mathbb{R}^d$.

$E_n = [-n, n]$ $\qquad$ $E_n = B(0, n)$.

Contre-exemple : E indénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, μ = mesure de comptage

μ n'est pas σ-finie

Si E_n t.q. $\mu(E_n) = \# E_n < \infty$

$\bigcup_{n \geq 0} E_n$ est au plus dénombrable

$\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \neq E$.

3. un point $x \in E$ est appelé un <u>atome</u> de la mesure μ si $\{x\} \in \mathcal{A}$, et $\mu(\{x\}) > 0$.

Ex : $\mu = \#$ sur $\mathbb{N}$. $\mu(\{n\}) = \#\{n\} = 1$

4. μ est <u>diffuse</u> si elle n'a pas d'atomes.

ex : mesure de Lebesgue λ_1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1(\{x\}) = 0$.

5. Si $B \subset E$ est tel que $B \subset A$, A mesurable tel que $\mu(A) = 0$, alors B est (μ-)négligeable.

(est aussi μ-négligeable)

$(E, \mathcal{A}, \mu)$. On dit que la tribu $\mathcal{A}$ est <u>complète</u> (pour μ)

si tout sous-ensemble B μ-négligeable est dans ma tribu.

Si $(\mathcal{A}, \mu)$, on pourra compléter $\mathcal{A}$ p/r à la mesure μ

$\rightsquigarrow$ fabrique une plus grosse tribu $\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$,

$\overline{\mathcal{A}}$ complète p/r μ.

6. Si E espace topologique $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}(E)$ tribu borélienne.

Une mesure borélienne μ est <u>localement finie</u> si,

$\forall x \in E$, $\exists$ voisinage V_x de x, tel que $\mu(V_x) < \infty$.

Ex : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \left( ]x-\epsilon, x+\epsilon[\right) = 2\varepsilon.$$

$$\lambda_1 \left(\{x\} \right) = 0$$

$A = \{ x_i, \ i \in \mathbb{N} \}$ ens. dénombrable de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ par σ-additivité, $\lambda_1(A) = 0$.

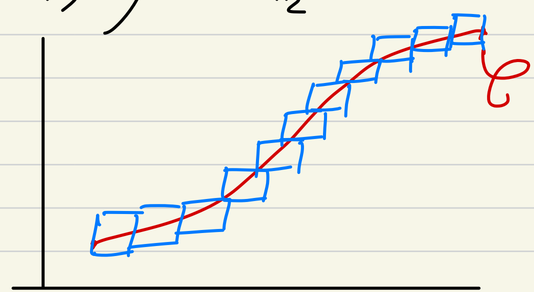
ex : $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$.

. il existe des sous-ensembles indénombrables de $\mathbb{R}$, également tels que $\lambda_1(A) = 0$.

Ex : TD4 : A = ensemble de Cantor.

Exercice : $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mu = \lambda_2$.

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ courbe lisse



$\rightarrow \lambda_2(\mathcal{C}) = 0$.

Recouvrir $\mathcal{C}$ par $\sim \frac{1}{\epsilon}$ petits carrés de côté ϵ.

$\longrightarrow$ aire totale $\sim \frac{1}{\epsilon} \times \epsilon^2 \sim \epsilon$.

- Lemme de classe monotone : <u>identifier</u> une mesure μ, à partir d'un "petit" nombre de poids $\mu(A)$.

  Si je connais suffisamment de poids $\mu(A)$ $(A \in \mathcal{A})$, je peux identifier ma mesure μ.

Trouver une sous-famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ telle que, si j'ai 2 mesures μ_1, μ_2 sur $\mathcal{A}$, et que

$\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, alors les mesures

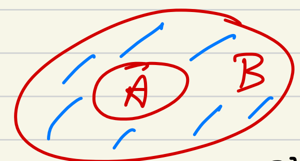
μ_1, μ_2 sont égales sur toute la tribu $\mathcal{A}$.

N$^{\text{elle}}$ structure : notion de classe monotone.

Déf° : Une sous-famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ est une classe monotone si :

i) $E \in \mathcal{M}$

ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$, avec $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$



iii) Si $(A_n \in \mathcal{M})_{n \geq 0}$ suite croissante, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Une tribu $\mathcal{T}$ est automatiquement une classe monotone.

- i) + ii) $\Rightarrow$ si $A \in \mathcal{M}$, alors $E \setminus A = A^c \in \mathcal{M}$.

Sur E, il y a "plus de classes monotones que de tribus".

Lemme Une classe monotone $\mathcal{M}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{M}$ est stable par intersections finies.

pr: $\boxed{\Leftarrow}$ si $\mathcal{M}$ est 1 tribu $\Rightarrow$ stable par intersec° dénombrable, donc finie.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{M}$ stable par $\cap$ finies.

" " par complémentaire.

$\Rightarrow$ " " par $\cup$ finies.

Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ suite d'éléments de $\mathcal{M}$. On veut montrer que $\bigcup_n B_n$ est dans $\mathcal{M}$.

$A_0 = B_0, \quad A_1 = A_0 \cup B_1, \quad A_2 = A_1 \cup B_2 \ \ldots$

$$\overset{\cap}{\mathcal{T}} \qquad A_n = \underbrace{A_{n-1} \cup B_n}_{\in \mathcal{T}}$$

$(A_n)_n$ suite croissante, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$

iii) $\Longrightarrow \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{T}.$

$$\overset{\|}{\bigcup_n B_n}$$

$\Longrightarrow$ montre le iii) de la définition d'une tribu.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ est une tribu.