

Théorie de la mesure et probabilités

S. Nonnenmacher

USTC

21/04/2026

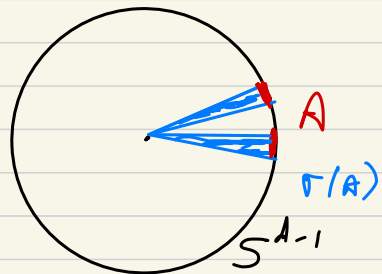


Rappels: on veut étudier une mesure ω_d sur la sphère unité $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

Pour tout borélien $A \subset S^{d-1}$ on fait correspondre le cône

$$\Gamma(A) = \left\{ r z; z \in A, r \in]0, 1] \right\}$$

$\nwarrow \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$



Thème $\forall A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on définit

$$\omega_d(A) := d \lambda_d(\Gamma(A)) = (d \lambda_d)(\tilde{p}^{-1}(A))$$

Alors ω_d est 1 mesure finie sur S^{d-1} , invariante par les isométries sur S^{d-1} (transformations orthogonales).

$\forall f$ fonction borélienne sur \mathbb{R}^d , on a. $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$

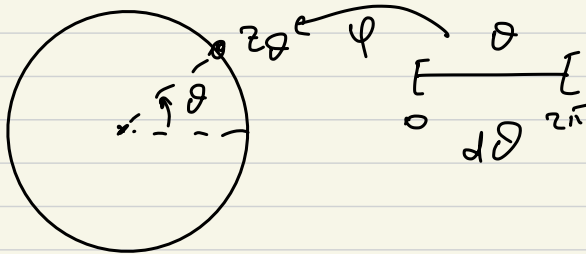
$$(F) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x) = \int_0^1 \int_{S^{d-1}} f(rz) r^{d-1} dr d\omega_d(z)$$

Masse totale de w_d :

$$d=2: \quad w_2(S^1) = 2\pi$$

$$w_d(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad \text{fonction } \Gamma \text{ d'Euler}$$

Ex: $d=2$ w_d est la mesure image la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 2\pi[\ni \theta \xrightarrow{\varphi} z_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$

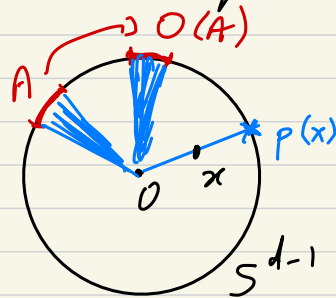


$$\varphi_* (d\theta) = w_2.$$

d quelconque : on considère la projection sur la sphère

$$p: B_d \setminus \{0\} \rightarrow S^{d-1}$$

$$x \mapsto p(x) = \frac{x}{|x|}$$



p application continue.

$$\forall A \text{ borélien de } S^{d-1}, \quad p^{-1}(A) = \Gamma(A).$$

$\Rightarrow \omega_d$ est la mesure image par p de la mesure $d\lambda_d$.

$\Rightarrow \omega_d$ est une mesure borélienne sur S^{d-1} .

$$\text{Mesure totale: } \omega_d(S^{d-1}) = d\lambda_d(B_d).$$

• Invariance par les transformations orthogonales:

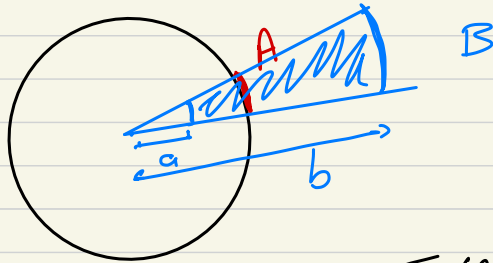
$\forall O$ matrice $d \times d$ orthogonale λ_d est invariante par O

$$\omega_d(O(A)) = d\lambda_d(\underbrace{\Gamma(O(A))}_{= O(\Gamma(A))}) = d\lambda_d(O(\Gamma(A))) = d\lambda_d(\Gamma(A)) = \omega_d(A).$$

Pour montrer la formule F : on prend $f = \mathbb{1}_B$, avec B un borélien particulier de \mathbb{R}^d

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, a < |x| \leq b, p(x) \in A \} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$$

$$0 \leq a < b.$$



B : couronne entre les rayons a et b , de base A .

$$\Gamma(A) = B \text{ si } a = 0, b = 1.$$

B = "partie mesurable" dans les coordonnées (r, z) ,
 $r \in]0, \infty[$, $z \in \mathbb{S}^{d-1}$

La partie droite de (F) donne:

$$\mu(B) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}_B(rz) r^{d-1} dr d\omega_d(z)$$

But: montrer que $\mu(B) = \lambda_d(B) \leftarrow$ membre de gauche de (F) .

or a la factorisation

$$\mathbb{1}_B(rz) = \mathbb{1}_{[a,b]}(r) \mathbb{1}_A(p(x))$$

$$= \mathbb{1}_{[a,b]}(r) \mathbb{1}_A(z)$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_{[a,b]}(r) \mathbb{1}_A(z) r^{d-1} dr d\omega_d(z)$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{1}_{[a,b]}(r) r^{d-1} dr \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_A(z) d\omega_d(z)$$

$$= \int_a^b r^{d-1} dr \cdot \omega_d(A)$$

$$\mu(B) = \frac{b^d - a^d}{d} \times \omega_d(A)$$

Mesure de Lebesgue de B ?

Cas où $a=0, b=1$: $B = \Gamma(A) \Rightarrow \lambda_d(\Gamma(A))$

Cas $a=0, b>0$: $B = \{rz; r \in]0, b], z \in A\}$
 $= b \Gamma(A)$
 \uparrow facteur de dilatation

$$(b.I_d) \Gamma(A) = B$$

$$\lambda_d(b \Gamma(A)) = |\det(b I_d)| \lambda_d(\Gamma(A))$$

$$= b^d \lambda_d(\Gamma(A))$$

$$0 < a < b \Rightarrow B = b \Gamma(A) \setminus a \Gamma(A)$$

$$\Rightarrow \lambda_d(B) = \lambda_d(b \Gamma(A)) - \lambda_d(a \Gamma(A))$$

$$= (b^d - a^d) \lambda_d(\Gamma(A))$$

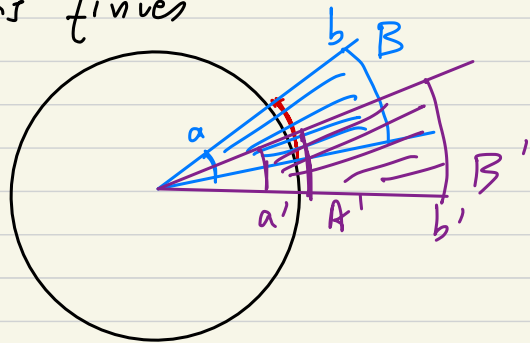
$$\Rightarrow \mu(B) = \frac{b^d - a^d}{d} \omega_d(A) = \frac{b^d - a^d}{d} \cdot \cancel{d} \lambda_d(\Gamma(A))$$

$$\text{et } \lambda_d(B) = (b^d - a^d) \lambda_d(\Gamma(A)) \Rightarrow \mu(B) = \lambda_d(B).$$

\Rightarrow on a égalité pour les pavés mesurables $B = \{v \in]0, b], z \in A\}$.

$\mathcal{C} = \{ \text{pavé mesurables } B \}$ engendrent les boréliens de \mathbb{R}^d ,
et est invariante par intersections finies

\rightarrow on peut appliquer le LCM
pour montrer que $\mu = \lambda_d$ sur
 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.



Si (F) est vraie $\forall f = \mathbb{1}_B \rightarrow$ borélien de \mathbb{R}^d ,

elle est vraie pour f mesurable ≥ 0
pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

• Formule pour la mesure totale $\omega_d (S^{d-1})$:

$$d=2: \omega_2(S^1) = \lambda_1([e, 2\pi]) = 2\pi.$$

d quelconque: on utilise les fonctions gaussiennes

$$G_d(x) = \exp(-\underbrace{|x|^2}_{\sum_{i=1}^d x_i^2}) = \prod_{i=1}^d \exp(-x_i^2)$$

Calculons de 2 façons l'intégrale de G_d :

$$\begin{aligned} I_d &= \int_{\mathbb{R}^d} G_d(x) \underbrace{d\lambda_d(x)}_{dx_1 \dots dx_d} = \int_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_i^2} dx_1 \dots dx_d = \int e^{-x_1^2} dx_1 \int e^{-x_2^2} dx_2 \dots \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} G_1(x) dx \right)^d \int e^{-x_d^2} dx_d \end{aligned}$$

$$I_d = (I_1)^d.$$

2^e façon de calculer I_d : en coordonnées (r, z) , $G_d(r, z) = e^{-r^2}$

G_d est une fonction radiale.

$$r = |x|$$

$$z = p(x) = \frac{x}{|x|}$$

(F) avec $f = G_d$:

$$\int_0^\infty \int_{S^{d-1}} e^{-r^2} r^{d-1} dr d\omega_d(z) = \omega_d(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr$$

Changement de variable $t = r^2$

$$dt = 2r dr$$

$$= \frac{1}{2} \omega_d(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} dt$$

$$(I_1)^d = I_d = \frac{1}{2} \omega_d(S^{d-1}) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$\text{Calcul de } I_1 : (I_1)^2 = I_2 = \frac{1}{2} \omega_2(S^1) \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

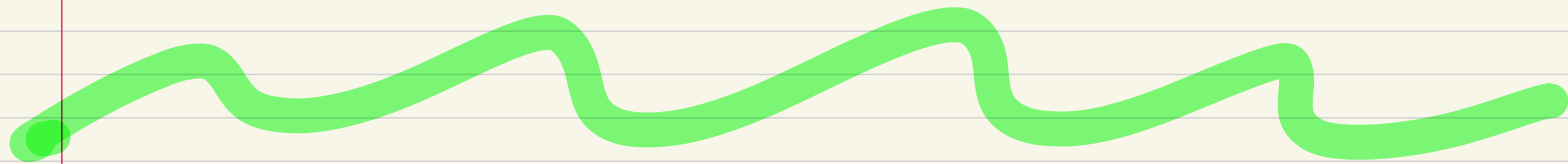
$$\Rightarrow I_1 = \sqrt{\pi}.$$

$$\rightarrow \omega_d (S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Si d est pair : $\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{d}{2}-1\right)!$

d impair : $\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) = \dots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

en utilisant la propriété $\Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$.



Théorie des probabilités

Espace mesuré, fonctions, mesures images sous une transformation

Vocabulaire spécifique à la théorie des probabilités.

	Intégration	Probabilités
espace mesuré	(Espace mesurable (E, \mathcal{A}) mesure μ)	(Espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}) mesure de probabilité sur Ω , notée P . $\rightarrow P(\Omega) = 1$)
	$x \in E$ point de E .	$\omega \in \Omega$ une éventualité.
	$A \in \mathcal{A}$ sous-ensemble mesurable	$A \in \mathcal{A}$ un <u>événement</u>
	$f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ fonction mesurable	$X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ une <u>variable aléatoire</u> à valeur dans (F, \mathcal{B})
		ex: $(F, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: X variable aléatoire réelle.

$\mu(A)$ poids de A

$$\int f d\mu$$

$f: E \rightarrow F$ mesurable

$\xrightarrow{\mu}$
 $\rightarrow f_*\mu$ mesure image
sur (F, \mathcal{B})

$P(A)$ la probabilité de A .

$$\int X dP = E[X] \text{ l'espérance de } X$$

$X: \Omega \rightarrow F$

$P \rightarrow$ mesure image sur F :

P_X , appelée la loi de la
variable aléatoire X .

La théorie des probabilités cherche à faire des prévisions lorsqu'on fait des expériences dont on ne connaît le résultat a priori. Si on recommence la même expérience, le résultat peut changer.


Définir des probabilités sur cette expérience, c'est déterminer les chances d'obtenir un résultat plutôt qu'un autre.

- Soit on a l'intuition des probabilités.
- Soit on répète plein de fois la même expérience, et on compte combien de fois on obtient un résultat donné.

Si $A = \{ \text{la pièce tombe sur "face"} \}$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \leftarrow \text{combien de "face" obtenues}$$

Exemples

1) Tirage d'un dé. 

1 tirage de dé \rightarrow 6 résultats possibles

$$\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$\mathcal{t} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribu totale.

Si le dé n'est pas truqué, $P(i) = \frac{1}{6}$, $\forall i = 1, \dots, 6$.

ex. d'événement: $A = \{ \text{nombre pair} \} = \{ 2, 4, 6 \}$.

• " " " $A = \{ 1 \}$.

• On tire 1 dé 2 fois, en regardant les 2 résultats.

$$\Omega_2 = (\Omega_1)^2$$

ex. d'événements: " j'ai tiré 1 " 2 fois " $(1, 1)$

" j'ai tiré 1, puis 2 " $(1, 2)$

Si le dé est bon, $P((i, j)) = \frac{1}{6^2}$ si $i \neq j$

Ω_2 permettrait de décrire 1 seul tirage.

L'événement " je tire 1 au premier tirage "

$$= \{ (1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6) \} \subset \Omega_2.$$

2) Expérience : tirer un dé jusqu'à ce qu'on obtienne "6".
Quelle est la chance d'obtenir "6" pour la première fois
après 10 tirages ?

Ce temps $n=10$ est appelé un "temps d'arrêt".

n peut prendre les valeurs $1, 2, 3, \dots, 10^{10}, \dots, +\infty$.

→ quel espace Ω prendre pour décrire cette expérience ?

$\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, espace des valeurs possibles du
temps d'arrêt.

$n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow P(n) = ?$

Pour calculer effectivement $P(n)$, il faut utiliser un
espace de probabilité plus gros, celui qui contiendra toute
l'information sur mes tirages.

$$\Omega = (\Omega_1)^{\mathbb{N}^*} = \left\{ \text{suites } \omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_n \dots, \right. \\ \left. \text{où } \omega_j \in \{1, 2, \dots, 6\} \right\}$$

ω décrit la suite de tous les résultats de tirage de mon dé, si je le tire une infinité de fois.

Ω est infini indénombrable. \exists application

$$\varphi: \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$\omega \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k - 1}{6^k} \quad \left(\text{converge vers un point de } [0, 1] \right).$$

\uparrow décomposition d'1 $x \in [0, 1]$ en base 6.

$$[0, 1] \ni x = 0, (\omega_1 - 1) (\omega_2 - 1) (\omega_3 - 1) \dots$$

Évènement : ne regarder que les résultats des m premiers tirages.
 $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, 6\}$

$$A_{i_1, \dots, i_m} = \left\{ \omega \in \Omega \text{ t.q. } \omega_1 = i_1, \omega_2 = i_2, \dots, \omega_m = i_m \right\}$$

$$A_{666} = \left\{ \omega \in \Omega \text{ t.q. } \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 6 \right\}.$$

Je veux que ces A_{i_1, \dots, i_m} soient tous mesurables.

→ on choisit la tribu \mathcal{A} la plus petite, telle que tous ces événements soient mesurables

$$\mathcal{A} = \sigma \left(\left\{ A_{i_1, \dots, i_m} \right\} \right).$$

Prop: • \mathcal{A} est aussi la + petite tribu telle que l'application
 $\varphi: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ est mesurable

$$(*) \mathbb{P}(A_{i_1 \dots i_m}) = \frac{1}{6^m} \quad \text{si le dé est bon}$$

$\mathcal{C} = \{ A_{i_1 \dots i_m}, m \geq 1, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, 6\} \}$
 engendre \mathcal{F} , et \mathcal{C} est invariante par intersections finies.

$$A_{i_1 \dots i_m} \cap A_{j_1 \dots j_{m'}} \quad \omega = \underbrace{j_1 j_2 \dots j_{m'}}_{\dots}$$

Si $m' < m$

$$\omega = \underbrace{i_1 \dots i_{m'}}_{\dots} i_{m+1} \dots$$

Soit $j_1 \dots j_{m'} \neq i_1 \dots i_{m'} \Rightarrow A_{i_1 \dots i_m} \cap A_{j_1 \dots j_{m'}} = \emptyset$

soit " = "

$$\Rightarrow A_{i_1 \dots i_m} \subset A_{i_1 \dots i_{m'}}$$

$$\Rightarrow A_{i_1 \dots i_m} \cap A_{j_1 \dots j_{m'}} = A_{i_1 \dots i_m}$$

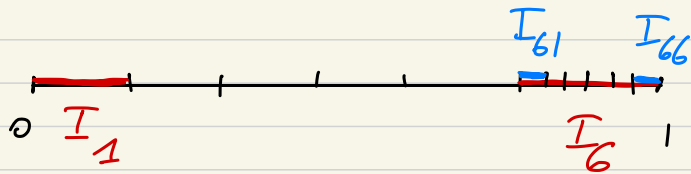
LCM \Rightarrow la mesure \mathbb{P} satisfaisant (*) est nécessairement unique.

$$\varphi(A_{i_1 \dots i_m}) = I_{i_1 \dots i_m} = \left[x_{i_1 \dots i_m}, x_{i_1 \dots i_m} + \frac{1}{6^m} \right]$$

$$x_{i_1 \dots i_m} = \sum_{k=1}^m \frac{(i_k - 1)}{6^k} \in [0, 1]$$

Si $\omega = i_1 \dots i_m \omega_{m+1} \omega_{m+2} \dots$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) \in I_{i_1 \dots i_m}$$



$$I_{i_1} = \varphi(A_{i_1}) = \left[x_{i_1}, x_{i_1} + \frac{1}{6} \right]$$

On remarque que $\lambda_1(I_{i_1 \dots i_m}) = \frac{1}{6^m}$.

On peut construire \mathbb{P} à partir de λ_1 sur $[0, 1]$, en définissant

une application "pseudo-inverse" de φ .

Pb. φ n'est pas injective : $\exists \omega \neq \omega' \text{ tq } \varphi(\omega) = \varphi(\omega')$

arrive si $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m \underbrace{11111111}_{(\omega_m > 1)}$

$$\rightarrow \varphi(\omega) = \sum_{k \geq 1} \frac{(\omega_k - 1)}{6^k} = x_{\omega_1, \dots, \omega_m}$$

$$\omega' = \omega_1 \omega_2 \dots (\omega_m - 1) \underbrace{6666}_{\dots}$$

$\Rightarrow \varphi(\omega') = \varphi(\omega) = x_{\omega_1, \dots, \omega_m} \rightarrow$ point de bord
de l'intervalle

$\mathcal{N} = \{ \text{points } x_{i_1, \dots, i_m} \}$ forment 1 ens.
dénombrable. $I_{\omega_1, \dots, \omega_m}$

si $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{N}$, φ est injective vers x : $\exists! \omega \text{ tq } \varphi(\omega) = x$

\rightarrow définir $s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ quasi-inverse de φ .

$x \in [0, 1]$ \rightarrow soit $x \notin \mathcal{G} \Rightarrow s(x) = \omega$ unique t.g.
 $\varphi(\omega) = x$

\searrow soit $x = x_{i_1 \dots i_m} \rightarrow s(x) = i_1 i_2 \dots i_m 111111$

\rightarrow définit $s: [0, 1] \rightarrow \Omega$ t.g. $\varphi \circ s = \text{id}$.

$s(x)$ = représentation canonique en base 6 du point x .

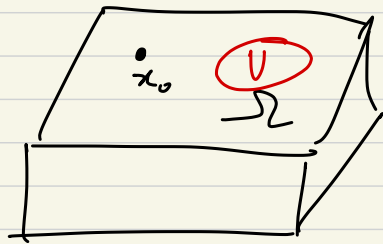
λ_1 sur $[0, 1]$ \rightarrow on pose λ_1 par s , pour définir

$\mu = s_* \lambda_1$ sur (Ω, \mathcal{A}) .

$$\forall i_1 \dots i_m, \mu(A_{i_1 \dots i_m}) = \lambda_1(I_{i_1 \dots i_m}) = \frac{1}{6^m}.$$

$\Rightarrow \mu$ est la bonne loi de probabilité sur Ω .

3) Ω "espace continu": probabilité de présence d'une particule quantique.



$$\Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

\hookrightarrow esp. de probabilité, P mesure de proba.

$U \subset \Omega$ sous-région de Ω $U \in \mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$

$P(U)$ = la probabilité de détecter mon électron dans la région U .

Ici, P est en général absolument continue p/r à λ_3 .

$f \in \mathcal{L}^1(\lambda_3) \rightarrow P = \int \lambda_3$, avec $f \geq 0$ mesurable, et telle que

$$\int_{\Omega} f \, d\lambda_3 = \int_{\Omega} dP = 1$$

↳ densité de probabilité de présence.

$$\rightarrow IP(\{x_0\}) = 0.$$