Analyse semiclassique

S. Nonnenmacher

3 novembre 2026

• Propriétés de la résolvante d'un op. $Op_h(a)$.

$R_h(z) = (Op_h(a) - z)^{-1}$, si z est dans l'ensemble résolvant de $Op_h(a)$, c'est-à-dire le complémentaire de son spectre sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$a \in S(1)$ réel $\Rightarrow$ $Op_h^W(a)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$\Rightarrow Spec(Op_h^W(a)) \subset \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(Op^W(a) - z)$ est inversible, d'inverse borné.

→ analyser les symboles de $R_h(z)$, en fonction de h et de z.

Corollaire : $m \geq 1$, $a \in S(m)$, $z \in \mathbb{C}$ t.q. $(a - z)$ elliptique dans $S(m)$. Alors, pour $h > 0$ assez petit, z est dans l'ens. résolvant de $Op_h^W(a)$, et $(Op_h^W(a) - z)^{-1}$ admet comme symbole

$$r(z;h) = (a-z)^{-1} + \mathcal{O}(h^2) \in S(m^{-1}).$$

Pr: appliquer le Thm d'inversion des ops à symbole elliptique.

$Op^w \Rightarrow (a-z) \#_h (a-z)^{-1} = 1 + r_2(z;h)$

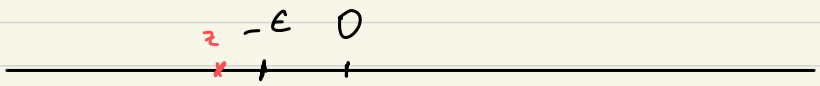
$\hookrightarrow \in h^2 S(1)$.

$\rightsquigarrow$ **Propé** Inégalité de Gårding faible.

Soit $a \in S(1)$ tel que $a \geq 0$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall 0 < h \leq h_\varepsilon$, l'op. $Op_h^w(a)$ satisfait $Op_h^w(a) \geq -\varepsilon I$

$\forall u \in L^2$, $\langle u, Op^w(a) u \rangle \geq -\varepsilon \|u\|^2$

$\Rightarrow \mathrm{Spec}(Op_h^w(a)) \subset [-\varepsilon, \infty[$



Pr. $\forall\ z < -\epsilon$, $(a - z)$ est elliptique dans $S(1)$ puisque

$(a - z) \geqslant a + \epsilon \geqslant \epsilon$ est ellipt. dans $S(1)$.

$\Rightarrow \forall h$ assez petit, $(Op_h^w(a) - z)$ est inversible $\Rightarrow z \notin \mathrm{Spec}\, Op^w(a)$.
$\forall h \leq h_z$

On veut que h_z puisse être choisi uniformément pour tout $z < -\epsilon$.

$\rightarrow$ remonter à la preuve d'inversion de $(Op(a) - z)$

$\Rightarrow$ contrôle $\| Op_h^w(r_2(z;h)) \|_{L^2 \to L^2}$ uniformément p/r z.

$\rightarrow$ contrôler des seminormes (de $S(1)$) de $r_2(z,h)$,

uniformément p/r z.

$\rightarrow$ contrôler les seminormes des 2 facteurs $(a - z)$ et $(a - z)^{-1}$.

$\rightarrow$ contrôler les dérivées de $(a - z)$ et $(a - z)^{-1}$.

$|\alpha| \geq 2$: $\partial_\xi^\alpha (a-z)$ indép. de z.

$$\partial (a-z)^{-1} = -\frac{\partial a}{(a-z)^2}$$

$$\partial^2 (a-z)^{-1} = -\frac{\partial^2 a}{(a-z)^2} + \frac{2\,\partial a\,\partial a}{(a-z)^3} = (a-z)^{-1}\left[\frac{-\partial^2 a}{(a-z)} + 2\frac{\partial a}{(a-z)}\frac{\partial a}{(a-z)}\right]$$

$$\partial^\alpha (a-z)^{-1} = (a-z)^{-1} \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\beta^1+\cdots+\beta^k=\alpha} C_{\vec{\beta}} \prod_{j=1}^{k} \left((a-z)^{-1}\partial^{\beta^j} a\right)$$

$$\left|\partial^\alpha (a-z)^{-1}\right| \leq \left|\frac{\partial^\alpha a}{(a-z)^2}\right| + \left|\frac{\partial^{\alpha-\beta} a}{(a-z)}\cdot\frac{\partial^\beta a}{(a-z)}\frac{1}{(a-z)}\right| + \cdots + \frac{|(\partial a)^{|\alpha|}}{|(a-z)^{|\alpha|+1}}$$

Les facteurs $\frac{1}{|a-z|}$ sont bornés unif^t p/r à $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $z \leq -\epsilon$.

$$\left|\frac{1}{(a(\xi)-z)}\right|^j \leq \frac{1}{\epsilon^j}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{2d}, \ \forall\, z \leq -\epsilon.$$

→ bornes sur $|\partial^\alpha (a-z)^{-1}|$, uniformes p/r à $\rho \in \mathbb{R}^{2d}$ et $z \leq -\epsilon$.

→ borner uniformes sur $\partial^\alpha r_2(z;h)$, et donc sur $\| Op_h^w(r_2(z;h)) \|_{L^2} \leq C h^2$, unif^t pour $z \leq -\epsilon$. $h \in (0,1]$.

→ $\exists\, h_\epsilon > 0$ tq $(I + Op^w(r_2(z)))$ est inversible pour tout $h < h_\epsilon$ et tout $z < -\epsilon$, tel que $(I + Op(r_2))^{-1}$ est uniformément borné.

→ $\forall\, h \leq h_\epsilon$ et $\forall\, z \leq -\epsilon$, $(Op(a) - z)$ est inversible,
$(Op^w(a) - z)^{-1} = Op^w((a-z)^{-1}) \cdot (I + Op(r_2))^{-1}$.

→ $\forall\, h \leq h_\epsilon$, $z \in Res(Op_h^w(a))$, $\forall\, z \leq -\epsilon$.
$(-\infty, -\epsilon] \subset Res(Op_h^w(a))$.

□

. But : prendre $\epsilon = h^\delta$, $\alpha > 0$, pour borner $\mathrm{Op}(a) \geq -Ch^\delta$.

→ prendre $z \sim -h^\delta$

$a \geq 0$ $\quad (a-z) \geq h^\delta \qquad (a-z)^{-1} \leq h^{-\delta}$

$$|\partial^\alpha (a-z)^{-1}| \leq \frac{C_\alpha}{|a-z|^{|\alpha|+1}} \leq C_\alpha h^{-\delta(|\alpha|+1)}$$

⇝ classes de symboles "exotiques"

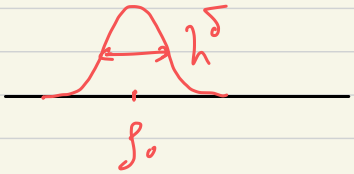
Def $\delta \in (0, 1/2)$, et m une fonction d'ordre. On définit alors la classe "exotique" de symboles :

$$S^\delta(m) = \Big\{ a(h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) ;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d},\ \exists C_\alpha > 0,\ \forall h \in (0,1],\ \forall \rho \in \mathbb{R}^{2d},\ |\partial^\alpha a(\rho;h)| \leq C_\alpha m(\rho) h^{-|\alpha|\delta} \Big\}$$

"à chaque dérivée, on perd une puissance $h^{-\delta}$."

Ex: si $z = z(h) = -h^\delta$, alors $(a-z)^{-1} \in h^{-\delta} S_\delta(m)$
$a \in S(1)$, $a \geq 0$

Ex: si $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, $a(\rho;h) = \chi\left(\frac{\rho-\rho_0}{h^\delta}\right)$ est dans $S_\delta(\langle\rho\rangle^{-\alpha})$.



Propᵉ Pour $m=1$, le calcul symbolique sur $S(1)$, et le thme de Calderon-Vaillancourt, s'étendent à la classe $S_\delta(1)$, avec un paramètre effectif de développement asymptotique $h^{1-2\delta}$.

→ il faut $\delta < 1/2$!!

Pr: Si $a \in S_\delta(1)$, alors $\tilde{a}(\rho;h) = a(h^\delta \rho; h)$ est dans $S(1)$.

calcul → $a_1 \#_h a_2 (h^\delta \rho) = \tilde{a}_1 \#_{h^{1-2\delta}} \tilde{a}_2 (\rho) \in S(1)$.

$$= \widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2 - \frac{ih}{2} \{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2\} + (h^{1-2\delta})^2 \widetilde{a}_1 \omega(\overleftarrow{D}^2, \overrightarrow{D}^2) a_2$$

$$\in S(1)$$

$$(a_1 \#_h a_2)(\rho) \in S_\delta(1).$$

Ops de dilation unitaires $U_{h\delta}$:

conjugaison $U_{h\delta} \, Op_h^w(a) = Op_{h^{1-2\delta}}^w(\widehat{a}) \, U_{h\delta}$

$$\| Op_h^w(a) \|_{L^2} = \| \; \|_{L^2} = O(1)$$ □

Rem: $a_1 \#_h a_2 = a_1 \cdot a_2 - \frac{ih}{2} \{a_1, a_2\} + h^2 \, a_1 \overleftarrow{D}^2 \overrightarrow{D}^2 a_2$

$\partial_{a_1} \partial_{a_2}$

$O(h^{-\delta} O(h^{-\delta}))$

ordre effectif $O(h^{1-2\delta})$

$+ \; - \; -$

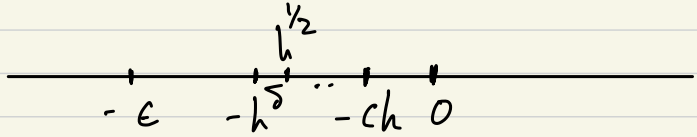
$O(h^2 h^{-2\delta} h^{-2\delta})$

$O(h^{2(1-2\delta)})$

→ ces classes S_δ permettent d'étudier les résolvantes

$(Op(a) - z)^{-1}$, pour $z \in -\mathbb{R}^\delta$, avec $\delta < 1/2$.

⇝ montrer $(Op(a) - z)^{-1}$ est inversible si $z < -h^\delta$.



On voudrait une classe S_δ avec $\delta = 1/2$

$S_{1/2}$: $|\partial^\alpha a| \leq C_\alpha h^{-|\alpha|/2}$ → pb : pas de dévt asympt pour $a_1 \#_h a_2$!

→ idée : 2e petit paramètre $\tilde{h}$, tel que

$$|\partial^\alpha a(\rho; h, \tilde{h})| \leq \tilde{C}_\alpha \tilde{h}^{\frac{|\alpha|}{2}} h^{-\frac{|\alpha|}{2}} = \tilde{C}_\alpha \left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-\frac{|\alpha|}{2}}$$

$$\Rightarrow a_1 \#_h a_2 = a_1 a_2 - ih\, \partial a_1 \partial a_2 + h^2 \partial a_1 \partial^2 a_2 + \cdots$$

$\in S(1)$; $h \left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$; $h^2 \left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-1} \left(\left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-1}\right)$

$1 + h^{1/2}\tilde{h}^{1/2} O(\tilde{h}) + O(\tilde{h}^2)$ $h, \tilde{h}$ +.

Def. Classe critique de symboles

$h \in (0,1]$, un 2e param. indépendant de h, $\tilde{h} \in [0,1]$.

$$\widetilde{S}_{1/2}(1) = \left\{ a(h,\tilde{h}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ \forall \alpha,\ \exists C_\alpha,\ \| \partial^\alpha a \|_\infty \leq C_\alpha \left(\frac{h}{\tilde{h}}\right)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \right\}$$

Propr. Le calcul symbolique et le thme de Calderon-Vaillancourt s'étendent à cette classe $\widetilde{S}_{1/2}(1)$, avec paramètre effectif du développement $\tilde{h}$.

Si $a \in \widetilde{S}_{1/2}$, $\| \mathrm{Op}_h^w(a(h,\tilde{h})) \|_{L^2 \to} = O(1)_{h,\tilde{h}}$

Si a_1 et $a_2 \in \widetilde{S}_{1/2} \to a_1 \#_h a_2 = a_1 a_2 + O(\tilde{h})$

Si $a_1 \in \widetilde{S}_{1/2}$ et $a_2 \in S(1)$, alors $a_1 \#_h a_2 =$ dvt asymptotique en puissances de $\sqrt{h\tilde{h}}$.

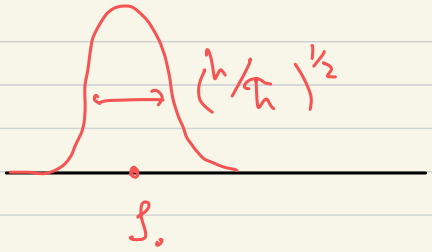
Pr: par dilatation : $\widetilde{a}(\rho) = a\left(\left(\frac{h}{\widetilde{h}}\right)^{1/2}\rho\right) \in S(L)$

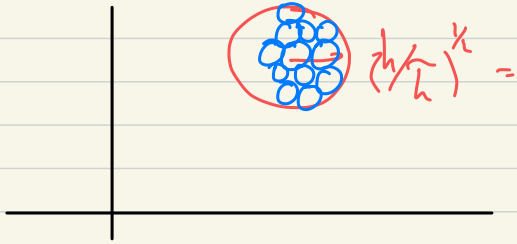
$(a_1 \#_h a_2) = \widetilde{a}_1 \#_{\widetilde{h}} \widetilde{a}_2 \in S(1)$

$\downarrow$

$a_1 \#_h a_2 \in \widehat{S}_{1/2}$.

- Dilatation unitaire $U_{(h/\widetilde{h})^{1/2}} \longrightarrow Op_h(a)$ unitairement conjugué à $Op_{\widetilde{h}}(\widetilde{a})$.





boule de rayon $\sqrt{h}$ est une cellule de Planck

$\rightarrow$ $a \in \widehat{S}_{1/2}$ peut être supportée dans "quelques" cellules de Planck. ($\mathcal{O}(\widetilde{h}^{-\frac{1}{2}}d)$)

Thme Inégalité forte de Gårding. Soit $a \in S(1)$, avec $a \geq 0$.
Alors $\exists\, C_0 > 0$ et $h_0 > 0$ tq, $\forall\, h < h_0$, l'op. $Op_h^w(a)$ satisfait

$$Op_h^w(a) \geq -C_0 h .$$

Preuve : construire un inverse de $\left(Op_h^w(a) - z\right)$, pour $z \leq -C_0 h$, avec $C_0 > 0$ une constante assez grande, indép. de h. $h < h_0$

$\Longleftrightarrow$ $z \leq -h/\widetilde{h}$, avec $\widetilde{h}$ assez petit, $h \leq h_0$.

$\longrightarrow$ retourner à l'étude de $(a - z)^{-1}$, avec $z < 0$.

$$\| (a-z)^{-1} \|_{L^\infty} \leq |z|^{-1}$$

$$(a-z)^{-1} \, |\partial^\beta a| \leq C_\beta \, |z|^{-1}$$

$$\longrightarrow \quad |\partial^\alpha (a-z)^{-1}| \leq C_\alpha \, (a-z)^{-1} \, |z|^{-|\alpha|} \leq C_\alpha \, |z|^{-|\alpha|-1}$$

$\uparrow$

Si on prend $z = -Ch \longrightarrow \leq C_\alpha (Ch)^{-k/-1}$

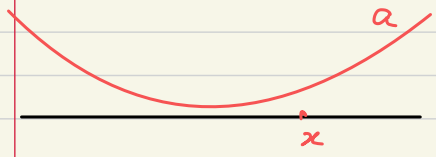
n'est pas dans une bonne classe !

En fait, les bornes ne sont pas optimales pour $\partial (a-z)^{-1}$.

On va se servir de la positivité de a, pour montrer que lorsque $a \gtrsim 0$, alors ∇a doit être petite !

$$\partial (a-z)^{-1} = -\frac{\partial a}{(a-z)^2}$$

Si $a \gtrsim 0$, $\frac{1}{(a-z)^2} \lesssim \frac{1}{|z|^2}$. Mais ∂a est petite !



$x \to \rho$

$$\forall x \forall y, \quad a(x+y) = a(x) + y \cdot \nabla a(x) + \int_0^1 (1-t) \langle \partial^2 a(x+ty)\, y, y \rangle \, dt$$

Prenons $y = -\lambda \nabla a(x)$, pour un $\lambda > 0$ à choisir

$$0 \le a(x - \lambda \nabla a(x)) = a(x) - \lambda |\nabla a(x)|^2 + \lambda^2 \int_0^1 \langle \partial^2 a(x + t y) \nabla a(x), \nabla a(x) \rangle \, dt$$

$$\lambda |\nabla a(x)|^2 = a(x) + \lambda^2 - -$$

$$\lambda |\nabla a(x)|^2 \le a(x) + \lambda^2 \|\partial^2 a\|_{L^\infty} |\nabla a(x)|^2$$

Prenons $\lambda = \frac{1}{\|\partial^2 a\|_{L^\infty}} \rightarrow |\nabla a(x)| \le \sqrt{2 \|\partial^2 a\|_{L^\infty} a(x)}$

$$|z|^{1/2} |\nabla a(x)| \le C |z|^{1/2} |a(x)|^{1/2} \le \frac{C}{2} \left(|z| + |a(x)| \right)$$

$$|z|^{1/2} |\nabla a(x)| \le \frac{C}{2} (a - z)$$

$$\Leftrightarrow (a - z)^{-1} |\nabla a(x)| \le \frac{C}{2} |z|^{-1/2}$$

Dans le développement de $\partial^\alpha (a - z)^{-1}$, le terme le + méchant était $\frac{|\nabla a|^{|\alpha|}}{(a - z)^{|\alpha| + 1}}$

$$\frac{|\partial a|^\alpha}{(a-z)^{|\alpha|+1}} = (a-z)^{-1} \left|\frac{\partial^\alpha}{(a-z)}\right|^{|\alpha|} \leq C(a-z)^{-1} |z|^{-|\alpha|/2}.$$

Les autres termes ($k < |\alpha|$) ne donnent pas des estimées + grandes.

$$\rightarrow \left|\partial^\alpha (a-z)^{-1}\right| \leq C_\alpha \underbrace{(a-z)^{-1}}_{\leq |z|^{-1}} |z|^{-|\alpha|/2} \quad // \text{ au lieu de } |z|^{-|\alpha|} !$$

Si on prend $z = h \Rightarrow |\partial^\alpha(\cdot)^{-1}| \leq C_\alpha h^{-1} h^{-|\alpha|/2}$

$$\in h^{-1} S_{1/2}(1)$$

Si on utilise un 2e petit param. $\tilde{h}$, et $z \leq -h/\tilde{h}$

$$\rightarrow \left|\partial^\alpha (a-z)^{-1}\right| \leq C_\alpha (h/\tilde{h}) (h/\tilde{h})^{-|\alpha|/2}$$

$$\Rightarrow (a-z)^{-1} \in (h/\tilde{h})^{-1} \tilde{S}_{1/2}(1).$$

$\frac{|z|}{a-z} \leq 1$ $\quad |z|(a-z)^{-1} \in \tilde{S}_{1/2}(1).$

$\Rightarrow$ on peut calculer le produit

$$(a-z) \#_h (a-z)^{-1} = \underbrace{\frac{(a-z)}{|z|}}_{\frac{1}{|z|} S(1)} \#_h \underbrace{h/(a-z)^{-1}}_{\widetilde{S}_{1/2}} = 1 + O + r_2(z,h;\tilde{h})$$

$$\in \frac{1}{|z|} \left(\sqrt{h\tilde{h}}\right)^2 \widetilde{S}_{1/2}$$

$$\frac{1}{|z|} \in \frac{\tilde{h}}{h}$$

$$\frac{1}{|z|} \; h\tilde{h} \; \widetilde{S}_{1/2} \subset \tilde{h}^2 \widetilde{S}_{1/2}$$

Calc. V. sur $\widetilde{S}_{1/2}$

$\Rightarrow$ pour $\tilde{h}$ assez petit, $h \leq \tilde{h} \leq h_0$, $\| Op_h^w(r_2) \| \leq 1/2$

$\rightarrow$ on peut inverser $(Op_h^w(a) - z)$.

Les estimées sont uniformes pour $z \leq -\frac{h}{\tilde{h}}$.

On prend $\tilde{h} = h_0 \Rightarrow z \leq -\frac{h}{h_0} =: -C_0 h$.

$\Rightarrow$ Si $z \in -\mathbb{C}^{\#}$, $\left(Op_h^W(a) - z\right)$ est inversible, avec $h \in]0, h_0]$

donc $z \in \mathrm{Res}\left(Op_h^W(a)\right)$. □.

Conclusion : si $a \geq 0$, $Op_h^W(a)$ n'est pas strictement positif, mais "presque". Quantification de Weyl.

. ∃ d'autres méthodes de quantification (quantification anti-Wick) qui préservent la positivité : $a \geq 0$

$\Rightarrow Op_h^{AW}(a) \geq 0$.

$Op_h^W(a)$ a d'autres qualités.

Corollaire : meilleures estimées sur $\|Op_h^W(a)\|_{L^2}$.

$a \in S(1)$, à valeurs réelles. Alors $\exists\, C_a > 0$ et $h_0 > 0$ t.q., $\forall\, h \in]0, h_0]$,

$$I\left(\inf_\xi a(\xi) - C_a h\right) \leq Op_h^W(a) \leq \left(\sup_\xi a(\xi) + C_a h\right) I$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Spec}\, Op_h^W(a) \subset [\inf a - C_a h,\ \sup a + C_a h].$$

Si $N(a) = [\inf a, \sup a]$, $\mathrm{Spec}\,(Op_h^W(a)) \subset N(a) \pm C_a h$.

En particulier

$$\|Op_h^W(a)\|_{L^2} \leq \|a\|_{L^\infty} + C_a h.$$

(on savait que $\|Op_h(a)\| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M_d} h^{|\alpha|/2} \|\partial^\alpha a\|_\infty$

$\leq C\|a\|_{L^\infty} + Ch\|\partial a\| + \cdots$

Prove: $a_- = a(s) - \inf a \geq 0$

$a_- \in S(1)$

$\Rightarrow \quad O_p(a_-) \geq -ch.$

$\Leftrightarrow \quad O_p(a) - O_p(\inf a) \geq -ch$

$O_p(a) - \inf a \cdot I \geq -ch$

$O_p(a) \geq -ch + \inf a \cdot I$

$a_+(s) = \sup(a) - a(s) \geq 0, \quad \in S(1)$

$\Rightarrow \quad O_p(a_+) \geq -ch$

$\Rightarrow (\sup a) I - O_p(a) \geq -ch \quad ..$ □

Suite : calcul fonctionnel des opr. pseudo-différentiels.

A autoadj. sur L^2, de domaine $D(A) \subset L^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, C^∞

$\longrightarrow$ on définit l'op. $f(A)$ par calcul fonctionnel (cf. cours de Th. spectrale).

But : à quoi ressemble l'op. $f(A)$ lorsque $A = Op_h^w(a)$, avec $a \in S(m)$ à valeurs réelles ?

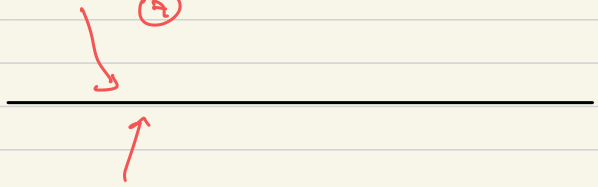
But : $f(Op_h^w(a))$ est un op. ΨD dans $\Psi_h(1)$, et on aura un dév^t asymptotique pour son symbole de Weyl

$$f(Op_h^w(a)) = Op_h^w(\underbrace{f(a)}_{\in S(\cdots)}) + O(h)$$

Pour analyser $f(O_p(a)) = A$, on va se servir d'une formule de Cauchy pour définir f :

$$f(A) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}(z) \underbrace{(z - A)^{-1}}_{\text{résolvante}} \, d^2 z$$

$\Rightarrow$ analyser $(z - O_p(a))^{-1}$, y compris lorsque z se rapproche de $\mathbb{R}$, et de $\mathrm{Spec}(O_p(a))$.



$\tilde{f}$ = extension presque analytique de f.