

Un problème pour le XXI(1)^{ème} siècle

- S. CROVISIER
- S. SENTI

Sylvain : *Fin 1997, Jean-Christophe m'accueille dans son immense bureau du Collège de France. Je l'avais déjà rencontré deux ans plus tôt lors d'un oral de concours. Cette fois je viens le voir pour qu'il encadre mon mémoire de DEA. Au tableau il me parle longuement de systèmes dynamiques, qu'il présente à l'aide d'un schéma.*

SYSTÈMES QUASI-PÉRIODIQUES <small>petits diviseurs & théorie KAM</small>	SYSTÈMES HYPERBOLIQUES <small>uniformes / non-uniformes</small>
--	---

Il a alors beaucoup étudié les systèmes quasi-périodiques (difféomorphismes du cercle, applications rationnelles). Mais depuis quelques années il s'intéresse d'avantage aux systèmes (non-uniformément) hyperboliques, un sujet en ébullition. Je repars plein d'enthousiasme, avec ses notes de cours sur le théorème de Jakobson.

Samuel : *Mon expérience ressemble singulièrement à la tienne. Deux années auparavant, le cours inaugural au Collège de France ayant pour sujet le théorème de Jakobson n'avait pas encore eu lieu. Et pourtant la même discussion s'est bien déroulée, avec le même schéma à l'appui, schéma bien connu de ceux qui ont eu la chance de se voir exposer son programme par Jean-Christophe : un programme à court, moyen et long terme, même très long terme puisqu'il n'osait espérer en venir à bout durant sa carrière.*

Nous avons eu la chance de suivre un peu du cheminement de Jean-Christophe dans le monde non-uniformément hyperbolique et de l'entendre évoquer son rêve de traiter un jour les systèmes conservatifs. Ces quelques pages tentent d'en donner un aperçu.

Dynamiques hyperboliques

L'étude dynamique d'une application f d'un espace X dans lui-même consiste à décrire ses orbites,

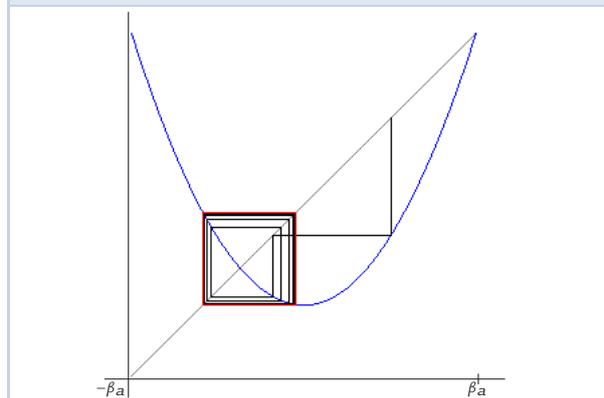
i.e. les suites de la forme $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$. On note $f^n(x)$ le $n^{\text{ème}}$ itéré de x .

Hyperbolicité uniforme en une dimension

Commençons par décrire la dynamique de l'application quadratique $f_a : x \mapsto x^2 + a$ sur l'axe réel pour les valeurs du paramètre $a < -2$. On observe deux types d'orbites : certaines tendent vers l'infini ; les autres appartiennent à un ensemble de Cantor invariant K . En outre, pour tout point $x \in K$ la suite des dérivées itérées $Df_a^n(x) := Df_a \circ \dots \circ Df_a(x)$ croît exponentiellement à un taux uniforme choisi indépendamment de x .

Malgré l'apparente simplicité, la tâche de décrire la dynamique s'avère étonnamment complexe pour les valeurs du paramètre $-2 < a < 0$. En effet, notant β_a le point fixe positif de f_a , l'intervalle $[-\beta_a, \beta_a]$ devient alors invariant et l'orbite du point critique 0 reste bornée.

FIGURE 2 – Orbite d'une application uniformément hyperbolique.



Pour certains paramètres (par exemple pour $a = -0.8$), on peut encore décomposer le système de la façon suivante :

- L'orbite de tout point hors de $[-\beta_a, \beta_a]$ tend vers l'infini.
- Il existe un ensemble compact invariant K ne contenant pas 0.

- Il existe une orbite périodique attractive qui attire l'orbite de tout point de $]-\beta_a, \beta_a[\setminus K$.

Cette dynamique est *uniformément hyperbolique* : pour les orbites contenues dans K , la suite des dérivées itérées $|Df_a^n| := |Df_a \circ \dots \circ Df_a|$ croît exponentiellement à un taux uniforme ; au contraire, elle décroît exponentiellement vers 0 pour les autres orbites bornées.

L'hyperbolicité est une propriété fondamentale : elle implique que les orbites de n'importe quelle paire de points distincts contenus dans K , même arbitrairement proches, finissent toujours par se distinguer l'une de l'autre. On peut alors associer à chaque orbite une suite dans $\{-1, 1\}$ qui code le signe de chaque itéré. De plus l'hyperbolicité entraîne la stabilité du système : pour toute application C^1 -proche de f_a , la structure de l'espace d'orbites reste inchangée.

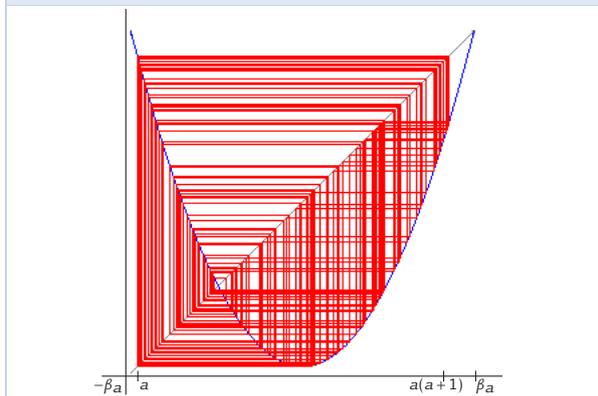
Hyperbolicité non-uniforme

En 1981, Jakobson montre [5] qu'il existe une autre sorte de comportement dynamique typique :

Théorème (Jakobson). *Il existe un ensemble de paramètres $\mathcal{P} \subset [-2, 0]$ de mesure non nulle, tel que pour $a \in \mathcal{P}$ et pour presque tout $x \in [-\beta_a, \beta_a]$,*

- l'orbite de x pour l'application quadratique f_a est dense dans l'intervalle $[a, a(a+1)]$,
- le taux de croissance asymptotique de la suite des dérivées itérées $|Df_a^n(x)|$ est exponentiel.

FIGURE 3 – Orbite d'une application non-uniformément hyperbolique.



La dynamique des applications f_a est alors raisonnablement bien comprise : l'orbite de presque tout point de l'intervalle $[-\beta_a, \beta_a]$ s'équidistribue vers une même mesure (dont le support est $[a, a(a+1)]$) ; hors de cet intervalle, toutes les orbites s'échappent à l'infini. La dynamique est non-

uniformément hyperbolique : on observe une croissance des dérivées le long de l'orbite de presque tout point x , mais cette croissance exponentielle n'est plus uniforme en x puisque certaines orbites peuvent s'approcher plus ou moins du point critique 0 où la dérivée s'annule.

La démonstration du théorème de Jakobson est délicate : le comportement décrit a beau avoir mesure non nulle dans $[-2, 0]$, son complémentaire est dense : c'est la conjecture de Fatou, démontrée par Graczyk et Świątek, ainsi que par Lyubich dans les années 90.

Rees a ensuite étendu ce résultat [10] aux applications rationnelles de la sphère de Riemann.

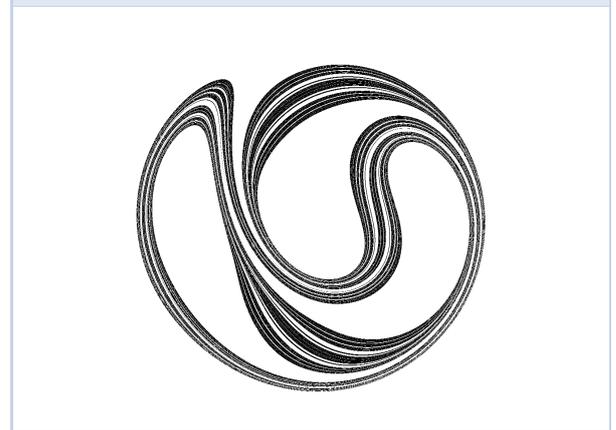
Hyperbolicité uniforme sur les surfaces

Pour les difféomorphismes de surface, le fer à cheval et l'attracteur de Plykin sont des exemples typiques de dynamiques hyperboliques. Cette fois en tout point z la propriété suivante est vérifiée :

- $(Df^n(z))_{n \geq 0}$ dilate exponentiellement les vecteurs hors d'un sous-espace $E^s(z)$.
- (\mathcal{H}) ◦ $(Df^{-n}(z))_{n \geq 0}$ dilate exponentiellement les vecteurs hors d'un sous-espace $E^u(z)$.
- $E^s(z), E^u(z)$ engendrent l'espace tangent en z .

Il existe donc un entier *uniforme* $N \geq 1$ tel que pour tout z et tout vecteur v non nul, l'image $Df^N(z).v$ ou $Df^{-N}(z).v$ est de norme plus grande que $2\|v\|$.

FIGURE 4 – Un attracteur de Plykin. Il porte une lamination en courbes. La dynamique dilate les feuilles et contracte transversalement.

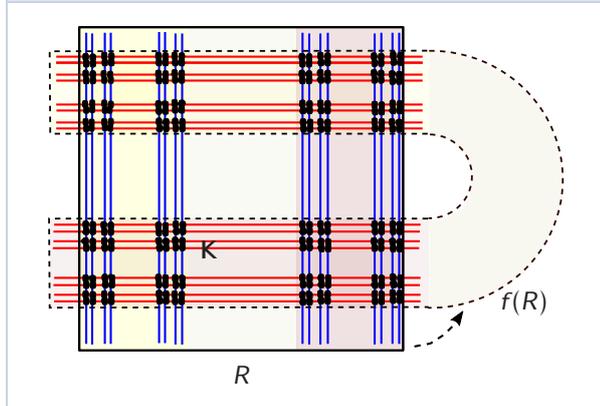


La dynamique peut à nouveau être décomposée : il existe une collection finie d'ensembles compacts invariants élémentaires sur lesquels s'accroissent les orbites passées et futures. Trois types

d'ensembles existent :

- Les pièces qui attirent toute orbite future issue d'un voisinage sont les *attracteurs*. Elles peuvent être des orbites périodiques attractives (des puits), ou des ensembles laminés en courbes, dilatées par la dynamique, dont l'attracteur de Plykin est un exemple.
- Les pièces attirant toute orbite passée issue d'un voisinage sont les *répulseurs*.
- On trouve aussi des pièces de type selle, au voisinage desquelles certaines orbites s'échappent par itérations futures et passées. C'est le cas du *fer à cheval*.

FIGURE 5 – Le fer à cheval : un ensemble de Cantor K ayant une structure produit. La dynamique étire et plie un rectangle R : elle contracte les verticales et dilate les horizontales.



Pour en savoir plus sur la dynamique uniformément hyperbolique, nous recommandons vivement l'introduction écrite par Jean-Christophe [14].

Hyperbolicité non-uniforme sur les surfaces

Les difféomorphismes hyperboliques ont été intensivement étudiés dans les années 1960-1970, mais il est rapidement apparu qu'ils ne suffisaient pas à décrire la plupart des dynamiques. Dans un article de 1991, Benedicks et Carleson [1] ont généralisé le théorème de Jakobson aux difféomorphismes de surface. Ils y étudient la famille de Hénon, i.e. les difféomorphismes du plan de la forme :

$$f_{a,b} : (x, y) \mapsto (x^2 + a - y, bx).$$

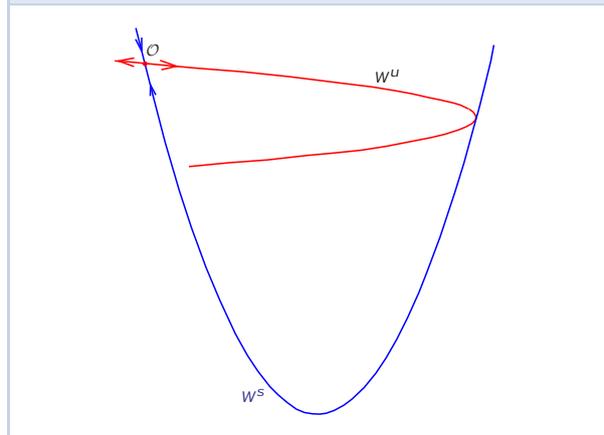
Théorème (Benedicks-Carleson). *Il existe une région ouverte U du plan et un ensemble de paramètres $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ de mesure non nulle, tel que pour tout $(a, b) \in \mathcal{P}$ il existe un ensemble compact $\Lambda_{a,b} \subset U$ vérifiant :*

- $\Lambda_{a,b}$ est un attracteur de l'application de Hénon $f_{a,b}$: l'orbite future de tout point de U s'accumule sur une partie de $\Lambda_{a,b}$,
- $\Lambda_{a,b}$ est transitif : il contient un point z dont l'orbite est dense dans $\Lambda_{a,b}$,
- $\Lambda_{a,b}$ n'est pas une orbite périodique.

Des travaux ultérieurs de Benedicks-Young [3] et Benedicks-Viana [2] ont montré que les orbites de presque tout point de U se distribuent vers une même mesure de probabilité $\mu_{a,b}$, supportée sur l'attracteur $\Lambda_{a,b}$. La propriété (\mathcal{H}) énoncée précédemment n'est vérifiée qu'asymptotiquement, et seulement pour $\mu_{a,b}$ -presque tout point. Elle n'est pas vérifiée en tout point car la topologie de U est une obstruction à l'hyperbolicité uniforme.

L'attracteur de Benedicks et Carleson est une "version non-uniforme" de l'attracteur de Plykin. La preuve de l'existence de tels systèmes est un tour de force : en effet Newhouse a montré [7] qu'arbitrairement proche des paramètres isolés par Benedicks et Carleson il en existe pour lesquels les orbites futures issues de U se séparent vers une collection infinie d'attracteurs distincts.

FIGURE 6 – Une tangence homocline entre les courbes stable W^s et instable W^u d'un point fixe \mathcal{O} .



L'hyperbolicité non-uniforme se traduit par l'existence de *points critiques*, i.e. de points $z \in \Lambda_{a,b}$ admettant un vecteur $v \neq 0$ tel que $\|Df_{a,b}^n(z).v\|$ décroît exponentiellement aussi bien lorsque n tend vers $+\infty$ que vers $-\infty$. Les *tangences homoclines* sont des exemples simples de points critiques : dans ce cas, z est un point de tangence entre deux courbes W^s (dite stable) et W^u (dite instable) ayant la propriété d'être contractées par itérations respectivement positives et négatives vers une même orbite périodique \mathcal{O} . La présence de points critiques rend l'analyse de la dynamique particulièrement

difficile.

Fers à cheval non-uniformément hyperboliques

Jean-Christophe a rapidement suivi le développement de la dynamique non-uniformément hyperbolique : en 1990 il donne un séminaire Bourbaki [15] où il expose les travaux de Jakobson, Rees, Benedicks-Carleson. Sa présentation [16] au Congrès International des Mathématiciens en 1994 à Zürich souligne l'importance de cette nouvelle thématique. C'est aussi l'objet d'un cours qu'il donne à l'ETH en 1996, de sa leçon inaugurale en 1997, puis de six cours donnés au Collège de France entre 1998 et 2016.

Son objectif était clairement annoncé [16] :

« What we would like to do in the next few years is to obtain a conceptual theory of “weakly hyperbolic basic sets” (including of course the striking examples considered above). For a smooth diffeomorphism f of a manifold M , such a “weakly hyperbolic basic set” should again be a *compact, invariant, transitive, locally maximal* subset K of M satisfying moreover some kind (?) of *weak hyperbolicity condition*. »

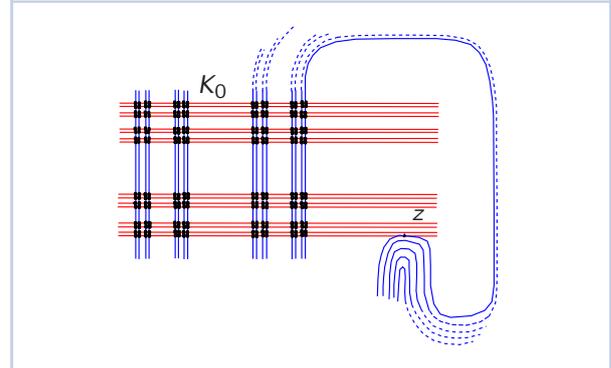
Plusieurs caractéristiques des ensembles non-uniformément hyperboliques décrits par Benedicks et Carleson dans [1] et de leurs méthodes méritent d'être mentionnées. Tout d'abord, les itérations futures sont privilégiées par rapport aux itérations passées : dans ce cadre, seule la première condition dans \mathcal{H} est difficile à obtenir. Enfin, la démonstration nécessite de supposer que la dynamique est *extrêmement dissipative* (le paramètre b – le jacobien – est supposé très proche de 0), de sorte que l'attracteur est très fin, presque une courbe.

Jean-Christophe envisage une approche différente pour l'étude de l'hyperbolicité non-uniforme, dans l'esprit de la démonstration initiale de Jakobson. Dès 1997-98, son cours annonce une “théorie générale” des systèmes non-uniformément hyperboliques pour les difféomorphismes de surface. Son objectif est de développer une technique qui soit symétrique par rapport au temps, qui ne se restreigne pas aux attracteurs, et qui permette de comprendre également des ensembles ayant une grande dimension de Hausdorff.

Avec Jacob Palis, il propose d'appliquer ce programme à l'étude des bifurcations homoclines des fers à cheval : les points dont les orbites futures ou

passées sont attirées par cette pièce hyperbolique définissent deux laminations (stable et instable). Une modification de la dynamique permet de déformer ces laminations pour créer de nouvelles intersections et enrichir ainsi la dynamique initiale. Lorsque le fer à cheval est suffisamment épais certaines intersections entre les feuilles des deux laminations produisent des tangences qui persistent pour les systèmes voisins : ceci a été mis en évidence par Newhouse [7] à la fin des années 1970, puis précisé [9, 6] par Palis, Takens, Moreira et Yoccoz.

FIGURE 7 – Tangence entre les laminations stable et instable d'un fer à cheval



Le théorème de Palis-Yoccoz

Dans ce théorème les auteurs considèrent un difféomorphisme de surface f_0 possédant un fer à cheval K_0 ainsi qu'un point de tangence quadratique z entre une feuille stable et une feuille instable. La tangence est supposée isolée : l'union Λ_0 de K_0 avec l'orbite de z possède un voisinage U duquel s'échappe toute orbite issue de $U \setminus \Lambda_0$. Il s'agit de décrire pour une famille générique (f_t) contenant f_0 , l'ensemble Λ_t des points dont l'orbite reste dans U dans le futur comme dans le passé. On peut supposer que les laminations stable et instable s'intersectent encore au voisinage de z pour les paramètres $t > 0$.

On associe à K_0 les dimensions d^s, d^u transverses aux laminations stables et instables. La dimension de Hausdorff de K_0 , égale à $d^s + d^u$, joue un rôle essentiel :

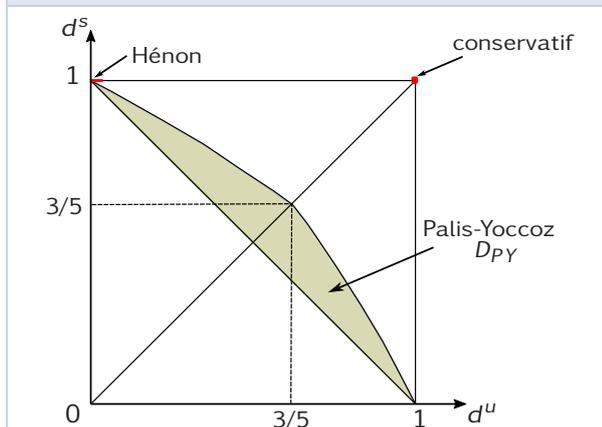
- Lorsque $d^s + d^u < 1$, l'ensemble des paramètres $t > 0$ pour lesquels la dynamique est hyperbolique est [9] de densité totale en 0.
- Lorsque $d^s + d^u > 1$, l'ensemble des paramètres $t > 0$ pour lesquels la dynamique n'est pas hyperbolique est [6] de densité totale en

0.

Voulant comprendre comment se produit cette “perte de l’hyperbolicité”, Jean-Christophe et J. Palis se concentrent sur le cas où $d^s + d^u$ est légèrement supérieur à 1. Ils montrent que l’hyperbolicité non-uniforme est prévalente dans un voisinage explicite $D_{PY} \subset \{(d^s, d^u), d^s + d^u > 1\}$ du lieu $d^s + d^u = 1$.

Théorème (Palis-Yoccoz [8]). Fixons $(d^s, d^u) \in D_{PY}$. Alors pour un ensemble de paramètres $t > 0$ de mesure non nulle l’ensemble Λ_t est un fer à cheval non-uniformément hyperbolique.

FIGURE 8 – Dimensions stable et instable d’un fer à cheval.



La notion de “fer à cheval non-uniformément hyperbolique” est technique, mais satisfait deux propriétés essentielles :

- L’ensemble des orbites attirées par Λ_t (dans le passé ou le futur) est de mesure de Lebesgue nulle. En particulier Λ_t est de type “selle”, et ne contient pas d’attracteur, ni de répulseur.
- La “plupart” (en un sens que nous ne précisons pas ici!) des orbites de Λ_t s’équidistribuent par itérations futures vers une mesure de probabilité invariante μ_t^+ . De plus μ_t^+ presque tout point satisfait \mathcal{H} . (Une propriété analogue est satisfaite pour les itérations passées, par rapport à une autre mesure μ_t^- .)

Leur démonstration [8] leur a demandé plusieurs années de travail et remplit un volume entier des Publications Mathématiques de l’IHES. L’impact laissé par Jean-Christophe sur ce sujet est considérable et dépasse largement cet article monumental.

Régularité forte

L’analyse des dynamiques non-uniformément hyperboliques proposée par Benedicks et Carleson

repose sur un contrôle minutieux de la croissance des dérivées itérées aux points critiques.

Jean-Christophe cependant a compris qu’en introduisant une version *ad hoc* des puzzles de Yoccoz (voir l’article de Xavier Buff dans ce volume) il peut isoler une structure permettant d’exprimer le choix des paramètres en termes combinatoires. Cette structure se trouve aussi être juste assez rigide pour permettre d’en extraire la preuve de la positivité de la mesure de l’ensemble des paramètres en question. Cette approche ressemble plus en esprit à celle de Jakobson en ceci que l’analyse de la dynamique se concentre sur une suite d’ensembles uniformément hyperboliques dont l’uniformité dégénère à mesure qu’ils approchent le lieu critique.

Régularité forte en dimension un

Pour comprendre ces idées plus en détails, il est utile de revisiter le cas unidimensionnel.

Lorsque la dynamique est uniformément hyperbolique, l’ensemble hyperbolique K se laisse recouvrir par une collection finie d’intervalles disjoints I_i , chacun s’envoyant difféomorphiquement par un itéré $f_a^{n_i}$ sur un intervalle prédéterminé.

Pour analyser la dynamique de l’application $f_a(x) = x^2 + a$ lorsque $a \in [-2, 0]$, Jean-Christophe considère [12] l’intervalle $A = [\alpha_a, -\alpha_a]$ où α_a est le point fixe négatif de f_a . L’on peut à nouveau essayer de remplir l’intervalle A avec une collection (cette fois dénombrable) d’intervalles I_i . Pour les intervalles les plus *simples* (loin du point critique 0), tous les itérés $f^k(I_i)$ sont disjoints de A quand $1 \leq k < n_i$. Près du point critique 0, on trouve des intervalles plus petits qui peuvent revenir, sous itération de f_a , plusieurs fois dans l’intervalle A avant de le recouvrir.

Cette construction présente un avantage : elle permet une approximation successive de la dynamique par l’ensemble K des orbites qui ne visitent qu’une collection finie d’intervalles I_i ; puisque K évite un voisinage du point critique un résultat de Mañé montre qu’il est ainsi uniformément hyperbolique. Lorsque l’on enrichit la collection I_i , l’hyperbolicité dégénère.

La décomposition de A en intervalles I_i permet d’analyser la dynamique de façon combinatoire, et de coder les orbites par la suite des intervalles qu’elle rencontre. Pour capturer des dynamiques qui ne sont pas uniformément hyperboliques il faut permettre que l’orbite critique ait des retours toujours plus proches du point critique.

Jean-Christophe définit alors les applications *fortement régulières* : ce sont les applications f_a , pour lesquelles la plupart des retours de l'orbite critique dans l'intervalle A appartiennent à un intervalle I_j simple. L'hypothèse que la somme de tous les temps de retour "profonds" de l'orbite critique ne représente qu'une petite fraction de tous les itérés va garantir que la collection I_j remplit bien presque tout l'intervalle A impliquant ainsi que la dynamique est non-uniformément hyperbolique.

FIGURE 9 – Notes de cours sur le théorème de Jakobson.

(35)

3.4 Strongly regular parameters.

3.4.1 We keep in the following the parameter confined to the interval $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$.

We will define a new condition on the parameter, which we call strong regularity. It will later be shown that, on one side, strongly regular parameters are regular, and, on the other side,

The first return of the critical orbit in A is at time M . The first part of our "strong regularity" condition is that

$$(*) \quad T_c^M(0) \in \bigcap_{n \geq 0} \text{Dom}(T^n) = \bigcap_{n \geq 0} T^{-n} W$$

Assuming $(*)$ is satisfied, we will denote by $J(k)$ the element of \mathcal{J} , of order $N(T^k(0))$, such that $T^k(0) \in \text{int } J(k)$.

The second half of the "strong regularity" condition is that most $J(k)$ are simple. We ask, for $k > 0$:

$$(**) \quad \sum_{\substack{1 \leq i < k \\ N(T^i(0)) > M}} N(T^i(0)) \leq 2^{-\sqrt{M}} \sum_{1 \leq i < k} N(T^i(0)) = 2^{-\sqrt{M}} (N_k - M)$$

Sélection des paramètres

Il faut encore montrer que dans l'ensemble des paramètres les applications fortement régulières ont une mesure de Lebesgue positive. Suivant l'adage d'Adrien Douady "semer dans l'espace dynamique pour récolter dans l'espace des paramètres", Jean-Christophe montre que la dépendance de la structure de puzzle induit une structure similaire dans l'ensemble des paramètres et que cette dernière ne change que lentement lorsque l'on fait varier le paramètre, un phénomène de *transversalité* qui va permettre d'exploiter dans l'espace des paramètres les estimées obtenues dans l'espace dynamique.

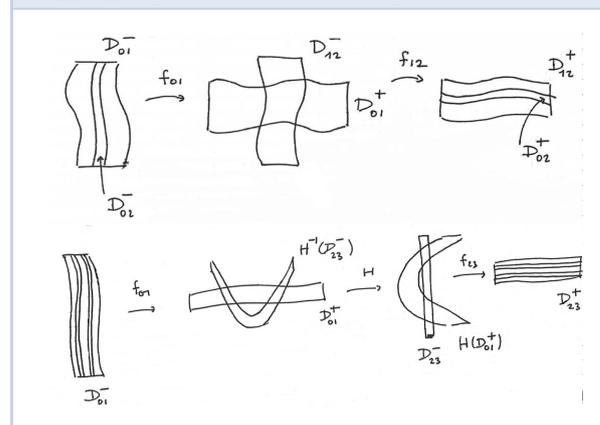
Pour le paramètre $a = -2$ le deuxième itéré du point critique est fixe et tous les intervalles I_j sont

simples. À mesure qu'un paramètre $a > -2$ s'approche de -2 , la partie de A qui n'est pas remplie par des intervalles simples est contenue dans un voisinage de plus en plus petit du point critique. La dynamique dans le complémentaire est uniformément hyperbolique et les estimées sur les taux d'expansion obtenues pour cet ensemble sont bonnes. La condition de régularité forte autorise suffisamment de retours profonds pour permettre d'exploiter ces bonnes estimées dans l'ensemble des paramètres et prouver, par un argument de grandes déviations, que l'ensemble des paramètres fortement réguliers a un point de densité de Lebesgue en $a = -2$.

Régularité forte sur les surfaces

En dimension supérieure, lorsque l'on itère un difféomorphisme de surface uniformément hyperbolique, on est amené à composer des applications "de type affine" qui dilatent et contractent le long de deux directions transverses (voir figure 10) : la composition de telles applications reste affine. Cependant, en présence de points critiques, on doit aussi considérer des applications "de type pli", i.e. d'allure quadratique. Il faut alors vérifier que les compositions qui apparaissent dans le système préservent cette nouvelle classe d'applications. Ce n'est pas le cas en général et il faut sélectionner les paramètres pour lesquels les effets des plis ne s'accumulent pas par itération.

FIGURE 10 – Applications de type affine et de type pli. (dessin de J.-C. Yoccoz)



Le passage en dimension 2 s'accompagne aussi d'autres difficultés. En effet l'unique point critique $c = 0$ est remplacé par un ensemble critique infini : la sélection des paramètres doit donc prendre en compte chacun de ses points. De plus cet ensemble n'est plus connu a priori comme en dimen-

sion 1 : la définition de point critique introduite plus haut nécessite d'analyser le comportement de suites $\|Df^n(z).v\|$ arbitrairement longues, et donc de connaître suffisamment précisément la dynamique.

Puisque l'ensemble critique contient les points de tangences entre les laminations stable et instable (comme sur la figure 7), on s'attend à ce que sa dimension soit minorée par $d^s + d^u - 1$, formule donnant la dimension de l'intersection typique entre ensembles de Cantor. Par conséquent l'ensemble critique est d'autant plus difficile à contrôler que la dimension du fer à cheval initial est grande. Le cas de la dynamique de l'attracteur de Hénon traité par Benedicks et Carleson correspondrait à une dimension $d^s = 1$ et à une dimension d^u extrêmement proche de 0. En comparaison, l'hypothèse sur (d^s, d^u) faite par Palis-Yoccoz est complètement explicite et permet de s'approcher du cas $d^s + d^u = 6/5$.

La preuve de [8] ne remplissait pas entièrement les exigences de Jean-Christophe : la définition de la régularité forte qui y est énoncée dépend non seulement de l'application, mais aussi de la paramétrisation de la famille. La notion a été reprise et retravaillée quelques années plus tard [4] par Pierre Berger dans le cadre des attracteurs. Ceci a conduit Jean-Christophe à programmer pour son cours de 2016 au Collège de France une preuve du théorème de Benedicks et Carleson qui utilise la régularité forte et qui s'appuie largement sur [4]. Malgré la maladie, il proposait là un de ses cours les plus ambitieux. Affaibli, il n'en présenta que les deux premiers exposés – clairs et profonds.

Dynamique conservative

Jean-Christophe souhaitait « bâtir une théorie de systèmes (faiblement) hyperboliques qui permettrait à terme de traiter d'autres exemples encore mal compris, en particulier dans un cadre conservatif. » [17] Il pensait ici aux systèmes préservant une forme volume. La famille d'applications servant de modèle est la famille standard sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

$$(x, y) \mapsto (2x + a \sin(2\pi x) - y, x).$$

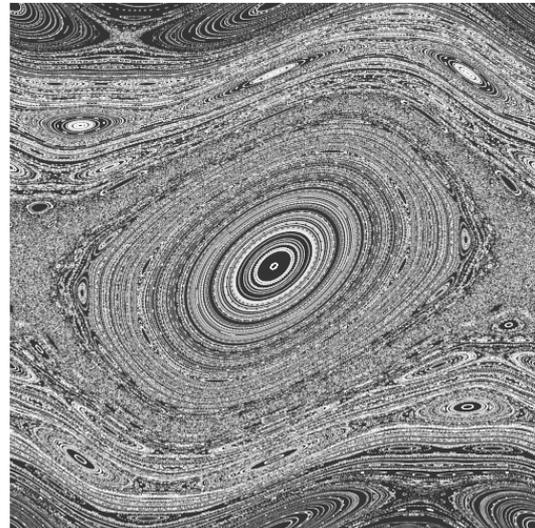
Il s'agit de répondre à ce problème bien connu des dynamiciens [11] :

Conjecture (Sinai). *La famille standard vérifie la propriété (H) pour un ensemble de paramètres a et de points $z \in \mathbb{T}^2$ de mesure de Lebesgue non nulle.*

L'hypothèse de préservation du volume entraîne

de nouveaux phénomènes. En effet le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser montre qu'il peut exister des familles de courbes fermées invariantes par la dynamique, dont l'union est de volume non-nul, et la propriété (H) ne peut pas être satisfaite sur ces courbes. Il faudrait donc vérifier que cette partie "elliptique" de la dynamique peut co-exister avec une partie non-uniformément hyperbolique, ou même qu'elle disparaît lorsque le paramètre a est suffisamment grand.

FIGURE 11 – Quelques orbites de l'application standard sur le tore \mathbb{T}^2 .



Le billard

Dans une courte interview [13], Jean-Christophe explique que la conjecture de Sinai est son problème ouvert favori en systèmes dynamiques. Il choisit d'en parler sur un exemple plus "concret".

Si l'on joue au billard à l'intérieur d'un domaine convexe U , on repère chaque trajectoire en notant à chaque réflexion le point d'impact sur le bord de U et l'angle d'incidence. On obtient ainsi une transformation de l'anneau $A := \partial U \times (-\pi/2, \pi/2)$ qui associe à chaque réflexion la réflexion suivante. C'est un difféomorphisme qui préserve une forme volume! Dans le cas très particulier où la table U est une ellipse, chaque orbite passant près du bord de l'anneau A appartient à une courbe invariante. Dans le cas général, on s'attend à observer une coexistence de courbes invariantes et d'hyperbolicité non-uniforme :

Problème. *Montrer que pour la transformation as-*

sociée à un billard convexe qui n'est pas une ellipse l'ensemble des points vérifiant la propriété (H) a un volume non nul.

Des fers à cheval de dimension arbitrairement proche de 2 apparaissent au sein des dynamiques conservatives. Or, lorsque $d^s + d^u$ croît, la récurrence de l'ensemble critique tend à être plus forte. Pour montrer l'hyperbolicité non-uniforme de ces systèmes, il semble nécessaire de considérer des compositions fréquentes d'applications de type pli conduisant à des applications d'ordres plus élevés.

La difficulté est considérable. Jean-Christophe disait qu'il n'espérait pas une solution avant la fin du XXI^{ème} siècle!

FIGURE 12 – Jean-Christophe et deux de ses étudiants en 1998 à Cetraro.



Références

- [1] M. BENEDICKS et L. CARLESON. « The dynamics of the Hénon map ». *Ann. of Math.* n° 133 (1991), p. 73–169.
- [2] M. BENEDICKS et M. VIANA. « Solution of the basin problem for Hénon-like attractors ». *Invent. Math.* n° 143 (2001), p. 375–434.
- [3] M. BENEDICKS et L.-S. YOUNG. « Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps ». *Invent. Math.* n° 112 (1993), p. 541–576.
- [4] P. BERGER. *Abundance of non-uniformly hyperbolic Hénon like endomorphisms*. 2009. arXiv : 0903. 1473.
- [5] M. JAKOBSON. « Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps ». *Comm. Math. Phys.* n° 81 (1981), p. 39–88.
- [6] C. G. MOREIRA et J.-C. YOCOZ. « Tangences homoclines stables pour des ensembles hyperboliques de grande dimension fractale ». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* n° 43 (2010), p. 1–68.
- [7] S. NEWHOUSE. « The abundance of wild hyperbolic sets and non smooth stable sets for diffeomorphisms ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* n° 50 (1979), p. 101–151.
- [8] J. PALIS et J.-C. YOCOZ. « Non-uniformly hyperbolic horseshoes arising from bifurcations of Poincaré heteroclinic cycles ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* n° 110 (2009), p. 1–217.
- [9] J. PALIS et F. TAKENS. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 35. Cambridge, 1993.
- [10] M. REES. « Positive measure sets of ergodic rational maps ». *Ann. Sci. École Norm. Sup.* n° 19 (1986), p. 383–407.
- [11] Y. SINAI. *Topics in ergodic theory, Lecture 13*. Princeton Mathematical Series 44. Princeton University Press, 1994.
- [12] J.-C. YOCOZ. « A proof of Jakobson's theorem » (2015). Notes de cours. URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-christophe-yoccoz/UPL7416254474776698194_Jakobson_jcy.pdf.
- [13] J.-C. YOCOZ. « Billard et chaos mathématique » (2014). Les entretiens du Collège de France. URL : <http://www.college-de-france.fr/site/jean-christophe-yoccoz/Billard-et-chaos-mathematique-3-.htm>.
- [14] J.-C. YOCOZ. « Introduction to hyperbolic dynamics ». In : *Real and complex dynamical systems (Hillerod, 1993)*. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 464. Kluwer, 1995, p. 265–291.
- [15] J.-C. YOCOZ. « Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon ». *Astérisque*, n° 201-203 (1992). Séminaire Bourbaki, exposé 734, p. 143–165.
- [16] J.-C. YOCOZ. « Recent developments in dynamics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zurich, 1994)*. Birkhauser, 1995, p. 246–265.
- [17] J.-C. YOCOZ. « Résumé de cours au Collège de France » (1997).



Sylvain CROVISIER

CNRS - Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud
www.math.u-psud.fr/~crovisie

Sylvain Crovisier est directeur de recherches au CNRS. Ses travaux portent sur les systèmes dynamiques topologiques, différentiables et leurs perturbations.



Samuel SENTI

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, CP. 68 530, Rio de Janeiro, Brésil.
senti@im.ufrj.br
www.im.ufrj.br/~senti

Samuel Senti est professeur à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro au Brésil, où il a émigré en 2004. Ses travaux portent sur les systèmes dynamiques ainsi que la théorie ergodique. Outre les mathématiques, il pratique aussi la capoeira.

L'image de la figure 11 a été produite à partir d'une expérience numérique interactive de J.-R. Chazottes et M. Monticelli disponible sur experiences.math.cnrs.fr. Nous remercions Stefano Marmi pour la photo 12.