

Université Paris-Saclay
Faculté des Sciences
Département mathématiques

Taux de croissance linéaire du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős

Rapport de stage

d'avril à août 2021

par

Benjamin Terlat

Maître de stage : Sanjay Ramassamy

Enseignant tuteur : Nicolas Curien

Institut de Physique théorique - CEA Saclay



Table des matières

Remerciements	1
Présentation du stage	2
Résumé	3
Chapitre 1 Présentation des modèles et premières propriétés	4
1.1 Graphes aléatoires de Barak-Erdős	4
1.2 Le modèle IBM	5
1.2.1 Définition du modèle	5
1.2.2 Ordre partiel sur les configurations et monotonie de Φ	7
1.3 Le couplage de Foss-Konstantopoulos	7
1.4 Existence de la vitesse pour l'IBM	8
1.4.1 Cas à support fini	8
1.4.2 Cas général	10
Chapitre 2 Formules pour v_μ, C, et régularité de C	13
2.1 Par développement perturbatif exact	14
2.2 Par construction de l'IBM stationnaire	17
2.2.1 Construction de l'IBM stationnaire	17
2.2.2 Formules pour v_μ	20
2.3 Analyticité de C et développement en série entière au voisinage de 1	23
2.4 Un développement asymptotique pour C autour de 0	29
Chapitre 3 Nouveaux résultats	31
3.1 Calcul des coefficients du développement en série entière de C autour de 1	31
3.1.1 Par la méthode du développement perturbatif exact	31
3.1.2 Par encadrement de la vitesse avec des lois à support fini	32
3.1.3 Par le calcul des bons mots minimaux	32
3.1.4 Par le calcul des bons mots triangulaires minimaux	36
3.2 Développement perturbatif exact sur les graphes	37
Bibliographie	42

Remerciements

J'adresse mes chaleureux remerciements à tous ceux qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidé pour la rédaction de ce rapport.

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mon maître de stage Sanjay Ramassamy pour ses conseils, sa disponibilité et son accompagnement durant le stage. Grâce à lui, j'ai découvert le domaine de la recherche et j'ai pu commencer à travailler sur le sujet de ma future thèse.

Je tiens également à remercier Arvind Singh pour sa bienveillance et pour son soutien.

Je remercie également la direction et le personnel de l'Institut de Physique Théorique pour m'avoir accueilli au sein de leur établissement malgré les conditions sanitaires dégradées et pour m'avoir accompagné pour la réalisation des démarches administratives.

J'adresse mes remerciements aux équipes pédagogique et administrative de l'Institut de Mathématiques d'Orsay, et plus particulièrement à Nicolas Curien qui a diffusé l'offre de stage. Ils ont toujours été à mon écoute et ont su m'apporter leur soutien, notamment en ce qui concerne les démarches administratives.

Enfin, je tiens à remercier les enseignants de l'Institut de Mathématiques d'Orsay qui m'ont permis d'acquérir le bagage nécessaire pour la réalisation de ce stage.

Présentation du stage

Dans le cadre du Master 2 Mathématiques de l'aléatoire à l'Université Paris-Saclay, j'ai eu la chance d'effectuer un stage de recherche à l'Institut de Physique Théorique (IPhT) sous la tutelle de Sanjay Ramassamy, chargé de recherche pour le CNRS en mathématiques à l'IPhT.

Le stage consistait principalement en l'étude d'articles de recherche sur le taux de croissance linéaire de la longueur du plus long chemin pour les graphes de Barak-Erdős qui sont une version orientée acyclique des graphes d'Erdős-Rényi. L'objectif était d'abord de synthétiser en un rapport les résultats des deux articles [1] et [2], et de chercher de nouveaux résultats en rapport avec le sujet.

Dans les sections 1 et 2 de ce rapport, on résume principalement les articles [1] et [2] et on y détaille également certaines preuves qui ne sont pas explicitement rédigés dans les articles. Par exemple, dans la section 2.1, on détaille la construction alternative pour les ε_X du développement perturbatif exact citée en remarque dans l'article [1], et dans la section 2.2, on donne une preuve de la formule pour calculer $\mathbb{P}(\xi_{T_1} \geq K)$. Dans la section 3, on présente des résultats partiels obtenus à l'issue du stage.

Résumé

On dit que $G_n(p)$ est un graphe de Barak-Erdős si $G_n(p) = ([1, n], E)$ est un graphe orienté aléatoire tel que seules les arêtes (i, j) pour $i < j \in \{1, \dots, n\}$ sont dans E avec probabilité p et de manière indépendante. On s'intéresse à la longueur d'un plus long chemin $L_n(p)$, et en particulier à la fonction C définie comme le taux de croissance linéaire du plus long chemin dans ces graphes : $C(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(p)/n$. Dans [1] et [2], B. Mallein and S. Ramassamy donnent deux méthodes différentes pour calculer C et en étudier l'analyticité. Dans les deux cas, on commence par introduire le système de particules en interaction IBM(μ) (Infinite Bin Model) que l'on va pouvoir coupler avec le graphe de Barak-Erdős dans le cas où μ_p est une loi géométrique de paramètre p . On observe alors que la vitesse de déplacement du front v_{μ_p} dans l'IBM(μ_p) correspond au taux d'accroissement linéaire du plus long chemin dans le graphe $G_n(p)$. On définit ensuite une action des entiers dans \mathbb{N}^* , puis des mots à lettres dans \mathbb{N}^* sur les configurations d'urnes du modèle IBM. Dans [1], on utilise une méthode de type "perturbation" où l'on part d'une configuration d'urnes quelconque et on étudie comment un mot α fait avancer le front dans l'IBM(μ) par sous-mots α pour calculer v_μ . Dans [2], on définit une classe de mot (les bons mots) qui font avancer le front au dernier coup pour toute configuration d'urnes initiale et on construit un processus IBM(μ) stationnaire pour calculer v_μ . Par la première méthode, on en déduit que C est analytique sur $] \frac{1}{2}, 1]$, et par la seconde on en déduit que C est analytique sur $]0, 1]$. De plus, on obtient plusieurs moyens pour calculer les coefficients du développement en série entière de C en 1. Pour étudier C au voisinage de 0, on utilise dans [1] des résultats sur les marches aléatoires branchantes avec sélection pour lui trouver un développement asymptotique. On présente plus en détails tous ces résultats dans les sections 1 et 2.

Dans la section 3, on présente de nouveaux résultats obtenus durant le stage. On commence par présenter différentes méthodes pour calculer numériquement les coefficients du développement en série entière de C au voisinage de 1. Pour l'instant, on en obtient 24 coefficients en utilisant une méthode qui consiste à encadrer $C(p)$ entre $v_{\underline{\mu}_p}$ et $v_{\bar{\mu}_p}$, les vitesses du front dans deux processus IBM, où pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\underline{\mu}_p([k, \infty]) \leq \mu_p([k, \infty]) \leq \bar{\mu}_p([k, \infty])$. On présente ensuite une méthode de calcul de ces coefficients qui ne fait plus intervenir le couplage entre le graphe de Barak-Erdős et l'IBM. L'idée est que lorsque p est proche de 1, il ne manque que peu d'arêtes au graphe $G_n(p)$, et donc on peut se ramener à étudier les petits paquets d'arêtes manquantes pour calculer les premiers coefficients du développement en série entière de C au voisinage de 1. On utilise alors une méthode du type développement perturbatif exact sur les graphes similaire à ce qui est fait dans l'article [1].

1

Présentation des modèles et premières propriétés

On présente dans cette section les deux modèles étudiés durant le stage : les graphes de Barak-Erdős et l'Infinite-Bin Model (IBM). On montre également quelques propriétés de monotonie sur le modèle IBM qui nous servira pour comparer les vitesses pour des IBM de lois différentes. On introduit ensuite le couplage de Foss-Konstantopoulos qui fait le lien entre les graphes de Barak-Erdős et l'IBM géométrique. On montre enfin l'existence de la vitesse de l'IBM pour une loi quelconque et on en déduit l'existence du taux de croissance linéaire du plus long chemin pour les graphes de Barak-Erdős.

Notation 1.0.1. On notera dans ce qui suit $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Pour $p \in [0, 1]$, $\mathcal{B}(p)$ désigne la loi de Bernoulli de paramètre p , et si $p \neq 0$, $\mathcal{G}(p)$ désigne la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p . On notera également $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble d'entiers $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$.

1.1 Graphes aléatoires de Barak-Erdős

On définit le modèle de graphes aléatoires orientés acycliques introduit pour la première fois par Barak et Erdős dans [3]. Les **graphes de Barak-Erdős** sont des graphes orientés acycliques où les arêtes (i, j) pour $i < j$ sont dans le graphe avec probabilité $p \in [0, 1]$ et ce de manière indépendante. Plus précisément :

Définition 1.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Si $G_n(p) = (V, E)$ où $V = \{1, \dots, n\}$ et $E = \{(i, j) \in V^2 \mid i < j, E_{i,j} = 1\}$ où les $(E_{i,j})_{i < j}$ sont des variables iid de loi $\mathcal{B}(p)$ et (i, j) est l'arête orientée de i vers j , alors $G_n(p)$ est un **graphe de Barak-Erdős** à n sommets.

Notation 1.1.2. On note $L_n(p)$ la **longueur d'un plus long chemin orienté** dans le graphe $G_n(p)$.

On donne un exemple de graphe de Barak-Erdős en 1.1. On s'intéresse ici à la valeur du taux de croissance linéaire $C(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(p)}{n}$. L'existence de cette limite est montrée pour la première fois par Newman dans [4] dont l'objectif était notamment d'étudier des modèles aléatoires pour les chaînes alimentaires. Cette quantité est

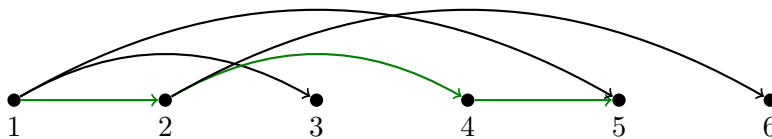


FIGURE 1.1 – Exemple de réalisation de $G_6(p)$ vérifiant $L_6(p) = 3$. Le plus long chemin est en vert.

également utile pour étudier la stabilité des files d'attente [5] et le temps d'exécution de tâches lorsqu'il y a des contraintes sur l'ordre de réalisation de celles-ci [6, 7]. Il montre également que C est continue sur $[0, 1]$. Dans [1] et [2], B. Mallein et S. Ramassamy montrent que C est analytique, d'abord sur $] \frac{1}{2}, 1]$ dans [1], puis sur $]0, 1]$, et donnent une formule pour calculer tous les coefficients du développement en série entière de C au voisinage de 1. Ces résultats sont détaillés dans la section 2. Grâce à ce résultat, ils parviennent à calculer numériquement le développement de C au voisinage de 1 jusqu'à son 17-ème terme. Précédemment, S. Foss et T. Konstantopoulos avaient obtenu les 5 premiers termes de ce développement en série entière dans [5]. Par la formule donnée dans [2], on verra dans la section 3 que l'on arrive à calculer numériquement les 24 premiers termes. Au voisinage de 0, B. Mallein et S. Ramassamy montrent le développement analytique suivant pour C dans [1] en utilisant un résultat sur les marches aléatoires branchantes avec sélection (voir la Section 2.4) :

$$C(p) = pe \left(1 - \frac{\pi^2(1 + o(1))}{2(\log(p))^2} \right) \text{ lorsque } p \text{ tend vers } 0. \quad (1.1)$$

1.2 Le modèle IBM

1.2.1 Définition du modèle

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Le modèle IBM(μ) est un système de particules en interaction défini de la manière suivante :

- On considère une infinité d'urnes indexées par \mathbb{Z} contenant chacune un certain nombre de particules.
- Pour passer de l'état à l'instant n à l'état à l'instant $n + 1$, on tire une variable aléatoire ξ_{n+1} de loi μ indépendamment de l'état des urnes à l'instant n et on ajoute une particule dans l'urne à droite de la ξ_{n+1} -ème particule la plus à droite dans les urnes à l'instant n .

Pour le définir plus rigoureusement, on se restreint à certaines configurations d'urnes qui nous suffisent pour le couplage :

Définition 1.2.1 (Configurations d'urnes et position).

- Une **configuration d'urnes** est un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. La quantité $X(i)$ représente le **nombre de particules** dans l'urne i .
- Une configuration X est dite **admissible** s'il existe $f \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$k > f \Leftrightarrow X(k) = 0,$$

$$k \leq i \Leftrightarrow X(k) = \infty.$$

- Pour $X \in S$, on définit $F(X) := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \forall j > k, X(j) = 0\}$ est le **front** de X (avec la notation précédente, $F(X) = f$).

Pour un exemple de configuration, voir la figure 1.2.

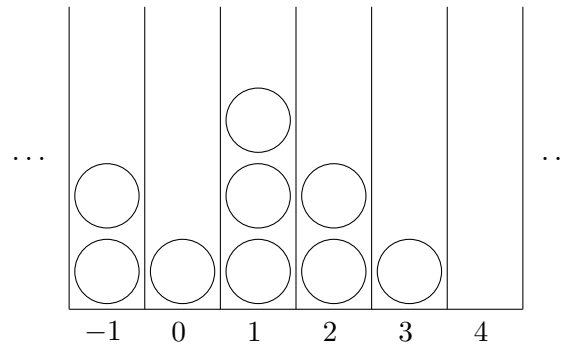


FIGURE 1.2 – Représentation d’une configuration d’urnes X telle que $F(X) = 3$ et telle que les nombres de particules dans les 5 dernières urnes non vides sont $(2, 1, 3, 2, 1)$.

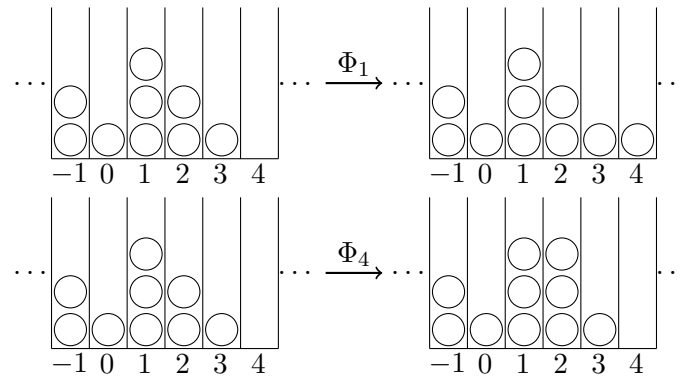


FIGURE 1.3 – Illustration de l’action de Φ_1 et Φ_4 sur des configurations d’urnes.

Notation 1.2.2. *On note :*

- $S = \{X \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^{\mathbb{Z}}, X \text{ est admissible}\}$,
- $B(X, i) = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \sum_{j=k}^{\infty} X(j) < i\}$ la position de l’urne immédiatement à droite de celle contenant la i -ème particule la plus à droite,

Définition 1.2.3 (Action des lettres sur S). *Soit $a \in \mathbb{N}^*$. L’action de a sur les configurations est donnée par l’application $\Phi_a : S \rightarrow S$ définie de la manière suivante :*

$$(\Phi_a(X))_i = \begin{cases} X(i) + 1 & \text{si } i = B(X, a) \\ X(i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose également $\Phi_{+\infty}(X) = X$ pour tout $X \in S$.

En d’autres termes, Φ_a est l’application qui à une configuration X associe une copie de X où l’on ajoute une particule dans l’urne immédiatement à droite de celle contenant la a -ème particule la plus à droite. En particulier, Φ_1 ajoute toujours une particule dans l’urne vide la plus à gauche. On illustre l’action de Φ_1 et Φ_4 sur une configuration d’urnes en figure 1.3.

Définition 1.2.4 (Infinite-Bin Model (IBM(μ))). *Soient $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires iid de loi μ et $X_0 \in S$. On définit le modèle **IBM**(μ) comme le processus de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans S vérifiant $X_{n+1} = \Phi_{\xi_{n+1}}(X_n)$ pour tout $n \geq 0$.*

1.2.2 Ordre partiel sur les configurations et monotonie de Φ

On peut définir un ordre partiel \leq sur l'ensemble S des configurations de la manière suivante :

Définition 1.2.5. Soient $X, Y \in S$. On pose que $X \leq Y$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(X, n) \leq B(Y, n)$. Autrement dit, $X \leq Y$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'indice de l'urne de la n -ème particule la plus à droite est plus à gauche dans X que dans Y .

Remarque 1.2.6. On peut ré-interpréter cet ordre de la manière suivante : $X \leq Y$ si et seulement si il y a toujours moins de particules à droite de toute position de départ dans X que dans Y , c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{j=k}^{\infty} X(j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} Y(j).$$

Définition 1.2.7. Soient μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que μ est dominée stochastiquement par ν et on note $\mu \leq \nu$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu(\llbracket 1, k \rrbracket) \leq \mu(\llbracket 1, k \rrbracket)$. De manière équivalente, μ est dominée stochastiquement par ν si et seulement s'il existe un couplage (ξ, ζ) tel que $X \leq Y$, et où $\xi \sim \mu$ et $\zeta \sim \nu$.

Proposition 1.2.8. On a les propriétés de croissance suivantes :

- $(X, a) \in S \times \mathbb{N}^* \mapsto \Phi_a(X)$ est croissante en X et décroissante en a pour l'ordre partiel \leq sur S et l'ordre naturel sur \mathbb{N}^* .
- Si μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ telles que $\nu \leq \mu$, alors il existe un couplage (X, Y) tel que $X_n \leq Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $X \sim IBM(\mu)$ et $Y \sim IBM(\nu)$.

Démonstration. Le premier point est immédiat en utilisant la définition de Φ et en remarquant que $B(X, n)$ est l'indice de l'urne de $X \in S$ dans laquelle on ajoute une particule par application de Φ_n à X .

Le deuxième point est une conséquence du premier et du fait que l'on peut construire $((\xi_n, \zeta_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. avec $\xi_n \sim \mu$ et $\zeta_n \sim \nu$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta_n \leq \xi_n$. \square

1.3 Le couplage de Foss-Konstantopoulos

Dans le cas où μ_p est la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p pour $p \in]0, 1]$, on a un couplage entre $G_n(p)$ et un $IBM(\mu_p)$ partant de la configuration initiale admissible X_0 vérifiant $X_0(1) = 0$ et $X_0(0) = \infty$. Pour ce couplage,

$$L_n(p) = F(X_n), \tag{1.2}$$

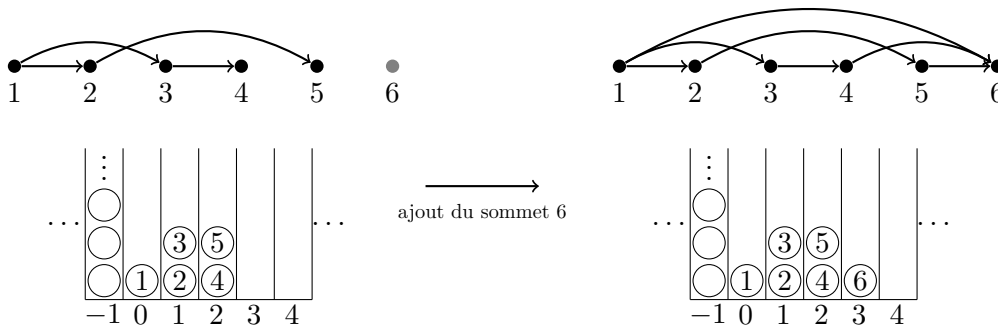
ce qui le rend utile pour étudier $L_n(p)$ par un point de vue Markovien. On construit ce couplage de la manière suivante :

- On construit $G_n(p)$ sommet par sommet.
- À chaque fois que l'on rajoute un sommet au graphe, on ajoute une particule dans l'urne d'indice la longueur du plus long chemin finissant en ce nouveau sommet dans $G_n(p)$.

Il reste à vérifier que ce processus suit bien la loi attendue :

Lemme 1.3.1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit la loi d'un $IBM(\mu_p)$, où μ_p est la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p .

Démonstration. Soit $n \geq 0$. Pour construire X_{n+1} à partir X_n , on considère $(i_1, \dots, i_k, n+1)$ un chemin de longueur maximale finissant en $n+1$ dans $G_{n+1}(p)$, puis on ajoute la particule numérotée par $n+1$ dans l'urne d'indice

FIGURE 1.4 – Illustration de la construction du couplage avec l'IBM(μ_p).

$k + 1$. L'idée est d'utiliser l'indépendance des variables $E_{i,j}$ de la définition 1.1.1 pour voir que l'on ajoute bien la particule $n + 1$ à droite de la ξ_{n+1} -ème particule la plus à droite pour une variable ξ_{n+1} de loi μ_p indépendante de X_n .

On note l_i la longueur d'un plus long chemin finissant en i dans $G_n(p)$. Il existe alors σ_n une permutation de $\llbracket 1, \dots, n \rrbracket$ telle que $l_{\sigma_n(1)} \geq l_{\sigma_n(2)} \geq \dots \geq l_{\sigma_n(n)}$ et telle que σ_n est $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ -mesurable. On pose alors

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \begin{cases} \inf \{i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket \mid E_{\sigma_n(i), n+1} = 1\} & \text{si cet inf est fini} \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition du modèle, $X_{n+1} = \Phi_{\tilde{\xi}_{n+1}}(X_n)$. On remarque que $\tilde{\xi}_{n+1}$ et $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ sont indépendants et que $\tilde{\xi}_{n+1}$ à la même loi que $\min(\xi, n + 1)$ si ξ est de loi μ_p (par indépendance de σ_n et $(E_{i,n+1})_{1 \leq i \leq n}$). On peut alors construire une variable ξ_{n+1} de loi μ_p indépendante de $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ telle que $\min(\xi_{n+1}, n + 1) = \tilde{\xi}_{n+1}$. Il reste à observer que $\Phi_{\tilde{\xi}_{n+1}}(X_n) = \Phi_{\xi_{n+1}}(X_n)$, ce qui est dû au fait que $X_n(0) = \infty$ et $\sum_{i \geq 1} X_n(i) = n$. Les (ξ_n) sont indépendantes par construction. \square

1.4 Existence de la vitesse pour l'IBM

Soit X de loi IBM(μ_p) et de configuration initiale $X_0 \in S$. Par le couplage précédent et si on admet que la limite p.s. suivante existe,

$$C(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(X_n)}{n}.$$

On montre dans cette section que cette limite existe en fait pour toute mesure μ sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Dans un premier temps, on montre le résultat pour μ à support fini puis on étend ce résultat à toute mesure de probabilité μ .

1.4.1 Cas à support fini

On suppose ici que $K := \sup(\text{supp}(\mu)) < \infty$ et que X a la loi d'un IBM(μ) avec pour configuration initiale X_0 . Dans ce cas, suffit d'étudier le contenu des urnes contenant les K particules les plus à droite, étant donné que ce sont les seules sur lesquelles nos Φ_{ξ_n} vont agir. Cela réduit le problème à l'étude d'une chaîne de Markov à espace d'états fini.

Notation 1.4.1. $S_K = \left\{x \in \mathbb{N}^{K-1} \mid \sum_{i=1}^{K-1} x_i < K \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, K-2\}, x_i = 0 \Rightarrow x_{i+1} = 0\right\}$ est l'ensemble des configurations admissibles à K particules. On pose Π_K la projection de S sur S_K par :

$$\Pi_K : \begin{array}{l} S \longrightarrow S_K \\ X \longmapsto (X(B(X, K) + j - 1))_{1 \leq j \leq K-1} \end{array}$$

Les éléments de S_K correspondent bien à des configurations à K particules. En effet, lorsque l'on applique Π_K à une configuration X , alors on obtient une configuration $x \in S_K$ composée de strictement moins de K particules. On en déduit alors par définition de Π_K que les $K - \sum x_i$ particules restantes sont dans l'urne dans X de position $B(X, K) - 1$ et on connaît donc bien les positions relatives des K dernières particules dans X . On pose alors le processus $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ défini par $Y_n = \Pi_K(X_n)$, qui ne garde donc en information que les positions des K particules les plus à droite dans le processus $(X_n)_{n \geq 0}$. On montre alors que Y est toujours une chaîne de Markov.

Lemme 1.4.2. *Y est une chaîne de Markov à espace d'états fini qui ne possède qu'une classe d'états récurrents. En particulier, il existe une unique probabilité stationnaire sur S_K pour cette chaîne de Markov.*

Idée de preuve. On peut construire facilement l'analogie naturel $\tilde{\Phi}$ de Φ pour Y vérifiant pour tout $n \geq 0$, $Y_{n+1} = \tilde{\Phi}_{\xi_{n+1}}(Y_n)$. Pour montrer qu'il n'existe qu'une seule classe d'états récurrents pour Y , il suffit de remarquer que lorsque l'on applique assez de fois $\tilde{\Phi}_K$ à une configuration de départ quelconque, on tombe toujours sur la configuration x dans S_K telle que $x_1 = K - 1$ après un certain nombre d'itérations. L'existence et l'unicité de la probabilité stationnaire viennent respectivement du fait que l'espace d'états est fini et qu'il n'y a qu'une classe d'éléments récurrents. \square

Notation 1.4.3. *Pour donner une formule pour la vitesse du front, on doit introduire quelques notations sur Y :*

- Pour $Y_0 \in \Pi_K$, on note $|Y| = \sum_{i=1}^{K-1} Y_0(i)$ le **nombre de particules dans la configuration Y** .
- $T_0 := 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $T_{k+1} := \inf\{n > T_k \mid |Y_{n-1}| = K - 1\}$ les **instants de gel d'une urne de X à gauche**, c'est à dire les instants auxquels on va perdre l'information de l'urne la plus à gauche dans le processus $(Y_n)_{n \geq 0}$.
- $Z_k = K - |Y_{T_k}|$ est le **nombre de particules dans l'urne gelée à l'instant k** .
- N_n est le **nombre d'urnes gelées avant l'instant n** , c'est à dire l'entier tel que $T_{N_n} \leq n < T_{N_n+1}$.

On peut à présent énoncer le résultat principal dans le cas où μ est à support fini :

Proposition 1.4.4. *Pour μ à support fini, il existe $v_\mu \in [0, 1]$ telle que pour toute configuration initiale X_0 ,*

$$\frac{F(X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\mu. \quad (1.3)$$

De plus, en posant π la probabilité stationnaire pour Y , on a une formule exacte pour v_μ :

$$v_\mu = \mathbb{P}_\pi(|Y_0| = K - 1) = \frac{1}{\mathbb{E}_\pi(T_2 - T_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}_\pi(Z_1)}. \quad (1.4)$$

Démonstration. On commence par remarquer que $F(X_n) = N_n + F(Y_n)$, où $F(Y_n)$ est l'indice de la dernière urne non vide dans Y_n (nulle s'il n'y a aucune urne non vide dans Y_n). Comme $Y_n \in \llbracket 0, K \rrbracket$, il suffit de montrer la convergence de $\frac{N_n}{n}$ vers v_μ .

On remarque ensuite que les moments où l'on gèle les urnes correspondent aux temps où la configuration contient $K - 1$ particules par définition, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{N_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{|Y_j|=K-1}.$$

Étant donné que notre chaîne de Markov ne possède qu'une seule classe d'éléments irréductibles, on sait qu'il existe une unique probabilité stationnaire π pour cette chaîne. De plus, pour tout état transient $Y_0 \in \Pi_K$, un résultat classique sur les chaînes de Markov fait que $\pi(Y_0) = 0$. Par théorème ergodique pour les chaînes de

Markov irréductibles récurrentes positives, on obtient lorsque la configuration initiale Y_0 est un état récurrent que :

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_\pi(|Y_0| = K - 1).$$

On remarque que la limite ne dépend pas de la configuration initiale. Pour se ramener à une configuration Y_0 quelconque, il suffit de noter que presque sûrement, à partir d'un certain rang, Y_n est dans la classe d'états récurrents puis on applique la propriété de Markov forte pour se ramener au cas où Y_0 est récurrent. On obtient alors la première égalité. Il reste à montrer les deux autres.

Il est facile de vérifier par définition de N_n que

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_n} Z_j}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1. \quad (1.5)$$

Comme $\frac{N_n}{n}$ converge vers une limite que l'on note $v_\mu > 0$, on déduit de la convergence précédente que

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_n} Z_j}{N_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{v_\mu}.$$

En observant que la suite (N_n) passe presque sûrement par tous les entiers, on a

$$\frac{\sum_{j=1}^p Z_j}{p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{v_\mu}.$$

En remplaçant n par T_p dans (1.5), on obtient

$$\frac{\sum_{j=1}^p Z_j}{T_p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} 1$$

et donc

$$\frac{T_p}{p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{v_\mu}.$$

On en déduit le résultat en appliquant le théorème de convergence dominée en observant que ces variables sont bornées presque sûrement par K . \square

1.4.2 Cas général

Pour montrer l'existence de la vitesse du front v_μ , on va procéder par approximations en modifiant la mesure μ pour se ramener au cas où la mesure est à support compact et en utilisant la monotonie de Φ vue en sous-section 1.2.2. On commence par se ramener au cas où μ est à support dans \mathbb{N}^* :

Proposition 1.4.5. *Soit μ une probabilité à support dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $p = \mu(\{+\infty\})$. Soit ν la probabilité définie par $\nu(A) = \frac{\mu(A)}{1-p}$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Soient $(X_n) \sim IBM(\nu)$ et $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1-p)$ indépendante de (X_n) , alors si on pose $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$,*

$$(X_{S_n})_{n \in \mathbb{N}} \sim IBM(\mu).$$

De plus, si on suppose que la vitesse du front v_ν pour l'IBM(ν) existe et si on pose $v_\mu := (1-p)v_\nu$, alors

$$\frac{F(X_{S_n})}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\mu.$$

Démonstration. Soit $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ telle que $X_{n+1} = \Phi_{\zeta_{n+1}}(X_n)$. Pour montrer que $(X_{S_n}) \sim \text{IBM}(\mu)$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\xi_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } Z_n = 0 \\ \zeta_{S_n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{S_{n+1}} = \Phi_{\xi_{n+1}}(X_{S_n})$ et que les ξ_n sont i.i.d. de loi μ . Le premier point est immédiat. Pour le second, on montre également par récurrence sur n que les $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ sont i.i.d. de loi μ . Il ne reste donc qu'à montrer la convergence vers v_μ .

Par hypothèse, $\frac{F(X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\nu$, et donc comme $S_n \rightarrow \infty$,

$$\frac{F(X_{S_n})}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\nu. \quad (1.6)$$

Par la loi forte des grands nombres, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1 - p$, et donc par la formule (1.6) :

$$\frac{F(X_{S_n})}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} (1 - p)v_\nu.$$

□

Il ne nous reste donc qu'à montrer le résultat pour les mesures à support dans \mathbb{N}^* .

Proposition 1.4.6. *Soit μ une probabilité à support dans \mathbb{N}^* . Soit $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{IBM}(\mu)$ de configuration initiale X_0 . Alors il existe $v_\mu \in]0, 1]$ tel que*

$$\frac{F(X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\mu.$$

Démonstration. L'idée est d'encadrer X_n par deux processus à valeurs dans S pour lesquels on peut calculer la vitesse du front. Fixons $K \in \mathbb{N}^*$. Si $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est telle que $X_{n+1} = \Phi_{\xi_{n+1}}(X_n)$, on pose

$$\xi_n^K = \begin{cases} +\infty & \text{si } \xi_n > K \\ \xi_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose également $\tau^{(d)}$ le shift vers la droite sur les configurations qui à $X \in S$ associe $(X(i-1))_{i \in \mathbb{Z}}$. Pour K un entier fixé dans \mathbb{N}^* , on construit alors deux processus \underline{X}^K et \overline{X}^K sur S de la manière suivante :

$$\begin{cases} \underline{X}_0^K = \overline{X}_0^K = X_0 \\ \underline{X}_{n+1}^K = \Phi_{\xi_{n+1}^K}(\underline{X}_n^K) \\ \overline{X}_{n+1}^K = \Phi_{\xi_{n+1}(\overline{X}_n^K)} \mathbb{1}_{\xi_{n+1} \leq K} + \tau^{(d)}(\overline{X}_n^K) \mathbb{1}_{\xi_{n+1} > K} \end{cases}$$

En d'autres termes, si $\xi_n \leq K$, on passe de l'instant $n-1$ à l'instant n pour ces deux processus de la même manière que pour (X_n) . Lorsque $\xi_n > K$, pour le processus \underline{X} , on pose $\underline{X}_n = \underline{X}_{n-1}$, et pour le processus \overline{X} , on décale toutes les particules d'un indice vers la droite pour passer de l'instant $n-1$ à l'instant n . On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{X}_n^K \leq X_n \leq \overline{X}_n^K$, et donc que $F(\underline{X}_n^K) \leq F(X_n) \leq F(\overline{X}_n^K)$. On remarque alors que \underline{X}^K a la loi d'un $\text{IBM}(\mu^K)$, où μ^K est la loi de ξ_1^K . Par la proposition 1.4.4 et la proposition 1.4.5, il existe v_K indépendante de X_0 telle que

$$\frac{F(\underline{X}_n^K)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_K.$$

En utilisant l'existence de cette limite, la loi forte des grands nombres, et le fait que

$$F(\overline{X}_n^K) = F(\underline{X}_n^K) + \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{K < \xi_j < +\infty\}},$$

on obtient

$$\frac{F(\overline{X}_n^K)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_K + \mu([K + 1, +\infty[).$$

On a donc pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, presque sûrement,

$$v_K \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F(X_n)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F(X_n)}{n} \leq v_K + \mu([K + 1, +\infty[).$$

Il reste donc à voir que v_K converge lorsque K tend vers l'infini. Or, $v_K \leq 1$ et par la proposition 1.2.8, la suite (v_K) est croissante. On en déduit qu'elle converge vers une limite $v_\mu \in [0, 1]$ et on a le résultat. \square

Une conséquence de ce résultat et du couplage de Foss-Konstantopoulos est l'existence de C :

Corollaire 1.4.7. *Si μ_p est la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre $p \in]0, 1]$, alors*

$$\frac{L_n(p)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_{\mu_p}. \quad (1.7)$$

En particulier, on a redémontré l'existence de C et de plus, $C(p) = v_{\mu_p}$.

Une autre conséquence de l'existence de la vitesse du front et de la proposition 1.2.8 est la suivante :

Corollaire 1.4.8. *Si μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ telles que $\nu \leq \mu$, alors $v_\mu \leq v_\nu$.*

Ce corollaire est notamment utile pour le calcul numérique de bornes sur C et des coefficients de son développement en série entière au voisinage de 1. On a également la formule obtenue dans la preuve de la proposition précédente :

$$v_K \leq v_\mu \leq v_K + \mu([K + 1, +\infty[).$$

2

Formules pour v_μ , C , et régularité de C

Dans [1] et [2], Bastien Mallein et Sanjay Ramassamy donnent deux méthodes pour obtenir des formules pour calculer la vitesse du front de l'IBM. Pour ce faire, ils utilisent dans chacun des articles une certaine classe de mots qui vérifient certaines propriétés en lien avec les configurations d'urnes. En sous-section 2.1, on présente la méthode utilisée dans l'article [1]. En sous-section 2.2, on présente la méthode utilisée dans l'article [2] et on étend la formule trouvée à d'autres classes de mots vérifiant certaines conditions. En sous-section 2.3, on détaille la preuve de l'analyticité de C sur $]0, 1]$ comme cela est fait dans l'article [2]. Enfin, on présente en sous-section 2.4 le lien entre un cas particulier de marches aléatoires branchantes avec sélection et le modèle IBM(μ_p) lorsque p est proche de 0. On en déduit alors la formule (1.1).

Pour ce qui va suivre, on a besoin d'introduire quelques notations et définitions.

- Notation 2.0.1.** \circ Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$ l'ensemble des mots à lettres dans \mathbb{N}^* (par convention, $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$ où \emptyset est le mot vide).
- \circ Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}$ et μ une probabilité sur $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note $|\alpha| = n$ la **longueur** de α , $H(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$ la **hauteur** de α et $W_\mu(\alpha) = \prod_{i=1}^n \mu(\alpha_i)$ le **poids** de α .
 - \circ Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, on note $\alpha \cdot \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{|\alpha|}, \beta_1, \dots, \beta_{|\beta|})$ la concaténation de α et de β .
 - \circ On note pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n_1}^{n_2} := \begin{cases} (\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_2}) & \text{si } 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq |\alpha| \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.0.2 (Action des mots sur S). Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}$, on pose $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha_n} \circ \dots \circ \Phi_{\alpha_1}$ l'action du mot α sur les configurations.

Définition 2.0.3 (Bons et mauvais mots relativement à une configuration). Soit $X \in S$ et $\alpha \in \mathcal{A}$. On dit que α est un **bon mot relativement à X** si $F(\Phi_\alpha(X)) = F(\Phi_{\alpha_{|\alpha|-1}}(X)) + 1$. On dit qu'un mot est un **mauvais mot relativement à X** s'il n'est pas bon relativement à X . Par convention, \emptyset est mauvais pour X .

En d'autres termes, α est un bon (respectivement mauvais) mot relativement à X si l'action de α sur X fait (respectivement ne fait pas) avancer le front de 1 au moment où sa dernière lettre agit.

Notation 2.0.4. On note \mathcal{P}_X l'ensemble des bons mots relativement à X .

2.1 Par développement perturbatif exact

Dans [1], la méthode utilisée pour obtenir une formule pour v_μ consiste à écrire l'avancée du front après l'application d'un mot α comme une somme sur tous les sous-mots β de α comptés avec multiplicité de termes correcteurs $\varepsilon(\beta)$. Heuristiquement, lorsque μ est "proche" de δ_1 , la plupart des lettres (ξ_n) vont être des 1, et les autres lettres vont former de petits mots séparés par ces 1. Ainsi, plus les mots sont grands, plus ils sont rares. L'idée est de considérer des mots de plus en plus grands et de quantifier la différence entre l'avancée du front en appliquant un grand mot et l'avancée du front que l'on s'attendrait à avoir en ne considérant que les sous-mots stricts du grand mot.

Définition 2.1.1. Pour $X \in S$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $d_X(\alpha) = F(\Phi_\alpha(X)) - F(X)$ l'*avancée du front* à partir de X par application de α .

Notation 2.1.2. Pour $I = \llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ un intervalle d'entiers, on notera $\alpha_I = \alpha_{n_1}^{n_2}$.

Définition 2.1.3. Pour $X \in S$, on définit la fonction $\varepsilon_X : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$d_X(\alpha) = \sum_{\substack{I \subseteq \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket \\ I \text{ intervalle}}} \varepsilon_X(\alpha_I). \quad (2.1)$$

On peut montrer que la quantité $\varepsilon_X(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ par récurrence sur $|\alpha|$ en remarquant que $\varepsilon_X(\alpha) = d_X(\alpha) - \sum_{\substack{I \subsetneq \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket \\ I \text{ intervalle}}} \varepsilon_X(\alpha_I)$. On peut alors énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 2.1.4. Soit μ une probabilité sur \mathbb{N} et $X_0 \in S$. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ |\alpha| \leq j}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_\mu.$$

De plus, si on se place sous l'hypothèse de convergence suivante,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_{X_0}(\alpha)| W_\mu(\alpha) < \infty, \quad (2.2)$$

alors,

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha).$$

Démonstration. On considère $(X_n)_{n \geq 0}$ un IBM(μ) de configuration initiale X_0 . Par définition de l'IBM(μ), on a $F(X_n) = d_{X_0}(\xi_1, \dots, \xi_n) + F(X_0)$. De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq \frac{F(X_n) - F(X_0)}{n} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{F(X_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} v_\mu,$$

donc par théorème de convergence dominée,

$$\frac{\mathbb{E} [d_{X_0}(\xi_1, \dots, \xi_n)]}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_\mu.$$

Or, par définition des ε_{X_0} ,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[d_{X_0}(\xi_1, \dots, \xi_n)]}{n} &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-i} \varepsilon_{X_0}(\xi_i, \dots, \xi_{i+k}) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-i} \mathbb{E}[\varepsilon_{X_0}(\xi_i, \dots, \xi_{i+k})] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ |\alpha|=k+1}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ |\alpha| \leq j}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha) \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient du changement de variable $j = n - i + 1$. Donc par ce qui précède,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ |\alpha| \leq j}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_\mu.$$

Si de plus on se place sous l'hypothèse de convergence (2.2), la série converge et donc comme la suite des moyennes de Cesàro d'une suite convergente a même limite que la suite de départ, on en déduit la formule

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varepsilon_{X_0}(\alpha) W_\mu(\alpha).$$

□

Remarque 2.1.5. *On remarque que la limite ne dépend pas de la configuration initiale X_0 . On a généralement une infinité de façon d'approximer v_μ de cette manière.*

On a donc déjà deux formules pour approximer v_μ dans le cas général. Néanmoins, pour utiliser ce résultat, il est nécessaire de pouvoir calculer en pratique les $\varepsilon_X(\alpha)$. C'est l'objet de la propriété suivante :

Proposition 2.1.6 (formule pour ε_X). *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,*

$$\varepsilon_X(\alpha) = d_X(\alpha) - d_X(\alpha_2^{|\alpha|}) - d_X(\alpha_1^{|\alpha|-1}) + d_X(\alpha_2^{|\alpha|-1}).$$

On en déduit que

$$\varepsilon_X(\alpha) = \mathbb{1}_{\{\alpha \in \mathcal{P}_X\}} - \mathbb{1}_{\{\alpha_2^{|\alpha|} \in \mathcal{P}_X\}}.$$

Démonstration. Le deuxième point est une conséquence directe du premier en notant que pour tout mot $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{1}_{\{\alpha \in \mathcal{P}_X\}} = d_X(\alpha) - d_X(\alpha_1^{|\alpha|-1}).$$

Pour montrer le premier point, on applique la formule d'inversion de Möbius sur l'ensemble des intervalles d'entiers (muni de l'inclusion comme ordre partiel) pour écrire

$$\varepsilon_X(\alpha) = \sum_{\substack{I \subseteq \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket \\ I \text{ intervalle}}} d_X(\alpha_I) \varphi(I, \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket),$$

où φ est la fonction de Möbius définie telle que pour tous I, J intervalles d'entiers finis,

$$\varphi(I, J) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ -\sum_{I \subseteq \tilde{J} \subsetneq J} \varphi(I, \tilde{J}) & \text{si } I \subsetneq J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, on notera ici pour $i \leq j \in \mathbb{N}^*$,

$$\pi(\llbracket i, j \rrbracket) = \begin{cases} \llbracket i, j-1 \rrbracket & \text{si } i < j \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varpi(\llbracket i, j \rrbracket) = \begin{cases} \llbracket i+1, j \rrbracket & \text{si } i < j \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat est alors une conséquence directe du lemme suivant sur la fonction de Möbius. \square

Lemme 2.1.7. *Si J_0 est un intervalle d'entiers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\varphi(I, J_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J_0, \\ -1 & \text{si } I = \pi(J_0) \text{ et } n \geq 2, \\ -1 & \text{si } I = \varpi(J_0) \text{ et } n \geq 2, \\ 1 & \text{si } I = \pi\varpi(J_0) \text{ et } n \geq 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve du lemme. On procède par récurrence sur n . Pour les cas $n = 1$ ou 2 , les résultats se montrent au cas par cas. On suppose à présent le résultat vrai jusqu'à un certain rang $n \geq 2$.

○ Si $I = \pi(J_0)$, alors

$$\varphi(I, J_0) = -\varphi(I, I) = -1.$$

○ Si $I = \varpi(J_0)$, on a le résultat de la même manière que pour le premier cas.

○ Si $I = \pi\varpi(J_0)$, alors par définition de φ et hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi(I, J_0) &= \varphi(\pi\varpi(J_0), J_0) \\ &= -\underbrace{\varphi(\pi\varpi(J_0), \pi\varpi(J_0))}_{=1} - \underbrace{\varphi(\pi\varpi(J_0), \varpi(J_0))}_{=-1} - \underbrace{\varphi(\pi\varpi(J_0), \pi(J_0))}_{=-1} = 1. \end{aligned}$$

○ Si $I = \pi^k(J_0)$ pour un certain $k \in \llbracket 2, |J_0| \rrbracket$, alors par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \varphi(\pi^k(J_0), J_0) &= -\underbrace{\varphi(\pi^k(J_0), \pi^k(J_0))}_1 - \underbrace{\varphi(\pi^k(J_0), \pi^{k-1}(J_0))}_{-1} - \sum_{l=1}^{k-2} \underbrace{\varphi(\pi^k(J_0), \pi^l(J_0))}_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

○ Si $I = \varpi^k(J_0)$ pour un certain $k \in \llbracket 2, |J_0| \rrbracket$, alors le résultat se montre de la même manière que pour le cas précédent.

○ Si $I \subseteq J_0$ ne correspond à aucun des cas précédents, si \tilde{I} est l'intervalle d'entiers tel que $\pi\varpi(\tilde{I}) = I$, alors $\tilde{I} \subsetneq J_0$ et donc par définition de φ et hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \varphi(I, J_0) &= -\underbrace{\varphi(I, \tilde{I})}_{=1} - \underbrace{\varphi(I, \varpi(\tilde{I}))}_{=-1} - \underbrace{\varphi(I, \pi(\tilde{I}))}_{=-1} - \underbrace{\varphi(I, \pi\varpi(\tilde{I}))}_{=1} - \sum_{\substack{J \subsetneq J_0 \text{ intervalle} \\ J \neq I, \varpi(\tilde{I}), \pi(\tilde{I}), \pi\varpi(\tilde{I})}} \underbrace{\varphi(I, J)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

2.2 Par construction de l'IBM stationnaire

Une autre méthode pour approximer v_μ décrite dans [2] et développée postérieurement à celle proposée dans la section 2.1 donne cette fois ci v_μ comme une somme infinie de termes positifs de la forme $W_\mu(\alpha)$ où les α parcourent une certaine classe de mots. L'idée est de construire une version stationnaire du processus IBM pour obtenir par stationnarité la vitesse du front comme la probabilité que le front avance à un instant fixé quelconque, puis de calculer cette probabilité en utilisant les propriétés de notre processus stationnaire.

2.2.1 Construction de l'IBM stationnaire

Définition 2.2.1. On dit qu'une probabilité μ sur \mathbb{N}^* est dégénérée s'il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu = \delta_a$.

On détaille dans cette sous-section la preuve la construction d'un processus IBM stationnaire, qui sera défini sur l'espace de temps \mathbb{Z} et plus sur \mathbb{N} comme précédemment. Dans cette sous-section, μ sera toujours une mesure de probabilité non dégénérée.

Notation 2.2.2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note τ_n l'application de S dans S qui à une configuration X associe la configuration $(X(i+n))_{i \in \mathbb{Z}}$. Appliquer τ_n à une configuration X revient à shifter ses urnes de n positions vers la gauche.

Théorème 2.2.3. Soient $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des variables i.i.d. de loi μ non dégénérée. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_n = \sigma((\xi_k)_{k \leq n})$. Alors il existe un unique (au sens presque sûr) processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur S tel que $F(Y_0) = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$Y_{n+1} = \Phi_{\xi_{n+1}}(Y_n) \quad \text{et} \quad \tau_{F(Y_n)}(Y_n) \in \mathcal{F}_n.$$

Remarque 2.2.4. Ce processus est stationnaire car $(\xi_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ont même loi. On parlera alors de processus IBM(μ) stationnaire.

Pour construire le processus Y , on commence par construire Y_0 . Pour ce faire, l'idée est de trouver des événements de rénovation dans le passé, c'est à dire de montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que quelle que soit la configuration X à laquelle on applique ξ_{-n}^0 , on obtient toujours le même placement pour les particules dans les K urnes non vides les plus à droite dans la configuration obtenue. Pour donner une idée de la preuve, on a besoin de définir la notion de mot K -coupleur, de K -configuration et de nombre de couplage d'un mot :

Définition 2.2.5. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $\tilde{\Pi}_K$ qui à une configuration X associe sa K -configuration définie par le contenu de ses K dernières urnes non vides :

$$\tilde{\Pi}_K : \begin{array}{l} S \longrightarrow (\mathbb{N}^*)^K \\ X \longmapsto (X(F(X) + j - K))_{1 \leq j \leq K} \end{array} .$$

On dit qu'un mot $\alpha \in \mathcal{A}$ est K -coupleur si l'image de $\tilde{\Pi}_K \circ \Phi_\alpha$ est un singleton. Le **nombre de couplage d'un mot** α est la quantité $c(\alpha) = \max\{K \in \mathbb{N}^* \mid \alpha \text{ est } K\text{-coupleur}\}$.

Remarque 2.2.6. En d'autres termes, un mot est K -coupleur s'il caractérise le contenu des K dernières urnes non vides partant d'une configuration quelconque. Le nombre de couplage d'un mot correspond alors au nombre d'urnes non vides à droite de contenu identique quelle que soit la configuration à laquelle on applique ce mot.

On peut alors facilement vérifier le lemme suivant, l'idée étant qu'en ajoutant une particule en plus après un mot, on ne perd de l'information que sur au plus une urne :

Lemme 2.2.7. *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $d \in \mathbb{N}^*$, $c(\alpha \cdot d) \geq c(\alpha) - \mathbb{1}_{\{d > c(\alpha)\}}$.*

Le point clef de la démonstration du théorème 2.2.3 est de montrer que, presque sûrement, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, lorsque l'on retourne dans le “passé de Y_0 ”, il existe un moment où l'on tombe sur un mot K -coupleur :

Proposition 2.2.8. *Si pour $K \in \mathbb{N}^*$, $N_K := \inf\{n \geq 0 \mid \xi_{-n}^0 \text{ est } K\text{-coupleur}\}$ alors $N_K < \infty$ p.s.*

Démonstration. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Soient $a < b$ les deux plus petits éléments dans le support de μ . On commence par remarquer que pour m assez grand ($m = \frac{a(a+1)}{2}$ convient), le mot $a^m = (a, \dots, a)$ (où a apparaît m fois) fait avancer le front de 1 au moins. On va catégoriser ici nos lettres en trois catégories :

- **Petites**, la lettre a
- **Moyennes**, les lettres de $\llbracket a + 1, K - 1 \rrbracket$
- **Grandes**, les lettres plus grandes ou égales à K .

Par le lemme 2.2.7, si on a un mot α qui est $(K + 1)$ -coupleur et si d est une moyenne ou petite lettre, alors le mot $\alpha \cdot d$ est toujours $(K + 1)$ -coupleur. Dans le cas où l'on a une grande lettre, au pire, on perd l'information sur l'urne la plus à gauche ; et dans le cas où le mot a^m apparaît, par ce qu'on vient de voir, on caractérise une urne en plus à droite. L'idée est alors de considérer les instants où l'on a des grandes lettres et des occurrences du mot a^m , puis de chercher parmi ces instants ceux où l'on a un mot $(K + 1)$ -coupleur qui apparaît juste avant dans le passé et tel que l'on ait toujours plus d'occurrences de a^m que de grandes lettres dans le futur.

On pose alors $(T_k)_{k \geq 0}$ la suite décroissante de ces instants définie par $T_0 = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$T_{k+1} = \sup \{n < T_k \mid (\xi_n \geq K) \text{ ou } (\xi_n^{n+m-1} = a^m \text{ et } n + m - 1 < T_k)\}.$$

On procède maintenant en trois étapes pour montrer que N_K est fini presque sûrement. La première étape consiste à se ramener au cas où la probabilité qu'une grande lettre apparaisse à un instant T_k est faible. La deuxième étape consiste à construire un mot $(K + 1)$ -coupleur à lettres dans le support de μ . La dernière étape consiste à montrer que presque sûrement, ce mot va apparaître juste avant un instant T_k tel qu'il y aura assez peu de grandes lettres après le mot pour que le mot ξ_{-n}^0 reste K -coupleur.

Étape 1 : On montre le lemme suivant.

Lemme 2.2.9. *Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathbb{P}(\xi_{T_1 \geq K}) = \frac{\mu(\llbracket K, +\infty \rrbracket)(1 - \mu(a)^m)}{\mu(a)^m(1 - \mu(a)) + \mu(\llbracket K, +\infty \rrbracket)(1 - \mu(a)^m)}.$$

En particulier, cette quantité tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini.

Preuve du lemme. On commence par décomposer en fonction de la valeur t de T_1 :

$$\mathbb{P}(\xi_{T_1} \geq K) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{-t} \geq K; T_1 = -t)$$

On remarque alors que l'événement $(\xi_{-t} \geq K) \cap (T_1 = -t)$ correspond au fait d'avoir $\xi_{-t} \geq K$ et qu'il n'y a aucune grande lettre et aucune occurrence du mot a^m dans ξ_{-t+1}^{-1} . En décomposant en fonction de d le nombre de fois où la lettre a apparaît dans ξ_{-t+1}^{-1} , puis en décomposant en fonction des possibilités pour placer les a dans ξ_{-t+1}^{-1} sans avoir de mot a^m , on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_{T_1} \geq K) &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{t-1} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^{t-1}, \sum x_i = d \\ 1^m \text{ n'apparaît pas} \\ \text{dans } x}} \mathbb{P}((\xi_{-t} \geq K) \cap (\forall i \in \llbracket 1, t-1 \rrbracket, \xi_{-i} = a \Leftrightarrow x_i = 1)) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{t-1} \# \left\{ x \in \{0,1\}^{t-1}, \sum_{i=1}^{t-1} x_i = d \text{ et } 1^m \text{ n'apparaît pas dans } x \right\} \mu([K, \infty[) \mu(a)^d \mu(\llbracket a+1, K-1 \rrbracket)^{t-1-d}
\end{aligned}$$

Or, dénombrer les possibilités pour les positions des d petites lettres sans avoir de a^m revient à compter le nombre de possibilités pour remplir $t-d$ urnes par d boules en ayant strictement moins de m boules dans chaque urne (voir les lettres moyennes comme les séparations entre les urnes et les petites lettres comme les boules). Si on a n urnes et d boules, alors le nombre de combinaisons possible est

$$F_{n,d}^m = [z^d](1 + z + \dots + z^{m-1})^n.$$

On obtient en injectant cette formule dans le calcul précédent et par le changement de variable $n = t - d$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_{T_1} \geq K) &= \mu([K, \infty[) \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{t-1} F_{t-d+1,d}^m \cdot \mu(a)^d \mu(\llbracket a+1, K-1 \rrbracket)^{t-1-d} \\
&= \mu([K, \infty[) \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n,d}^m \cdot \mu(a)^d \mu(\llbracket a+1, K-1 \rrbracket)^{n-1} \\
&= \mu([K, \infty[) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \mu(a) + \dots + \mu(a)^{m-1})^n \mu(\llbracket a+1, K-1 \rrbracket)^{n-1} \\
&= \mu([K, \infty[) \cdot \frac{1 + \mu(a) + \dots + \mu(a)^{m-1}}{1 - (1 + \mu(a) + \dots + \mu(a)^{m-1}) \mu(\llbracket a+1, K-1 \rrbracket)} \\
&= \frac{\mu([K, +\infty[)(1 - \mu(a)^m)}{\mu(a)^m(1 - \mu(a)) + \mu([K, +\infty[)(1 - \mu(a)^m)}
\end{aligned}$$

Par la formule, on a bien la limite attendue quand K tend vers l'infini. □

Dans l'article d'origine, la formule énoncée n'était pas la bonne, mais cela ne changeait rien au reste de la preuve étant donné que l'on n'utilise que le fait que cette quantité tend vers 0 pour montrer le résultat. On considère à présent que K est assez grand tel que $\mathbb{P}(\xi_{T_1} \geq K) < \frac{1}{3}$.

Étape 2 : La deuxième étape consiste à construire un mot $(K+1)$ -coupleur avec seulement deux lettres :

Lemme 2.2.10. *Pour toutes lettres $1 \leq d_1 < d_2$, il existe un mot $(K+1)$ -coupleur γ composé des lettres d_1 et d_2 .*

On considérera dans ce qui va suivre le mot γ construit dans le lemme pour $d_1 = a$ et $d_2 = b$.

Remarque 2.2.11. *Si $d_1 = 1$, le lemme est facile à montrer en remarquant que le mot 1^{K+1} convient. Dans le cas où la loi μ est géométrique, comme $a = 1$, on a bien un mot $(K+1)$ -coupleur γ composé seulement de lettres dans le support de la loi.*

Idée de preuve du lemme 2.2.10. La preuve de ce résultat est détaillée dans [8]. □

Étape 3 : Pour trouver un instant $-n$ où l'on a toujours moins de grandes lettres que de mots a^m entre $-n$ et i pour tout i entre $-n$ et 0, on introduit une marche aléatoire pour traduire cette propriété en terme de temps records.

On pose la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$S_{n+1} - S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_{T_n} \geq K \\ -1 & \text{si } \xi_{T_n} = a. \end{cases}$$

On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $R_k = \inf\{n \geq 0 \mid S_n \leq -k\}$ les temps de record négatifs. Ces temps sont tous finis presque sûrement car par l'étape 1, $\mathbb{E}[S_{n+1} - S_n] = 2\mathbb{P}(\xi_{T_n} \geq K) - 1 < -\frac{1}{3}$, et donc la marche (S_n) dérive vers $-\infty$. On pose alors $L = \inf\left\{k \in \mathbb{N}^*, \xi_{T_{R_k} - |\gamma|}^{T_{R_k} - 1} = \gamma\right\}$. On peut montrer que L est fini presque sûrement car le mot γ à une probabilité non nulle d'apparaître et que l'on a indépendance entre ce qui se passe après et avant T_{R_k} .

En posant $N = -T_{R_L} + |\gamma|$, on peut montrer en parcourant la marche (S_n) dans le sens inverse que ξ_{-N}^{-1} est $(K+1)$ -coupleur. L'idée est que comme on se trouve en un temps record pour S juste après le mot γ qui est $(K+1)$ -coupleur, on conserve la propriété de $(K+1)$ -couplage par le lemme 2.2.7 car par définition des temps de record, on aura toujours parcouru plus de a^m que de grandes lettres lorsque l'on parcourt la marche dans le sens inverse. Toujours par le lemme 2.2.7, on en déduit que ξ_{-N}^0 est K -coupleur, et donc que N_K est fini presque sûrement.

On a donc montré le résultat pour K assez grand. On en déduit le résultat pour tout K en remarquant que la suite $(N_K)_K$ est croissante. \square

On peut maintenant montrer l'existence et l'unicité de l'IBM stationnaire :

Preuve du théorème 2.2.3. On commence par construire Y_0 . Par la proposition précédente, presque sûrement et pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $N_K < \infty$, donc par définition de N_K , on a caractérisé pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ les K dernières urnes non vides $(Y_0(-K+1), \dots, Y_0(0))$ de Y_0 . On pose $Y_0(i) = 0$ pour $i > 0$ pour que l'hypothèse $F(Y_0) = 0$ soit vérifiée. Pour voir que cette construction est cohérente, on remarque que pour $K_1 \leq K_2$, si α est K_2 -coupleur, alors il est K_1 -coupleur. En particulier, la suite (N_K) est croissante. On en déduit par définition de N_{K_1} que $\tilde{\Pi}_{K_1 \circ \Phi_{\xi_{-N_{K_1}}^0}} = \tilde{\Pi}_{K_1 \circ \Phi_{\xi_{-N_{K_2}}^0}}$ et donc que la construction de Y_0 est bien cohérente. On a donc montré l'existence et l'unicité pour Y_0 vérifiant les hypothèses du théorème.

Pour $n \geq 0$, il suffit de poser $Y_n = \Phi_{\xi_1^n}(Y_0)$ pour construire Y_n . Pour construire Y_{-n} , on procède exactement de la même manière que pour construire Y_0 mais en partant de $-n$. Il faut alors vérifier que l'on a bien cohérence, c'est à dire que les Y_{-i} pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ construits au début de la preuve et les Y_{-i} obtenus à partir de Y_{-n} sont les mêmes. Cela vient du fait que l'on a montré l'unicité de Y_0 vérifiant les hypothèses de l'énoncé. \square

2.2.2 Formules pour v_μ

Maintenant que l'on a montré l'existence d'un processus IBM stationnaire, on peut faire le lien entre ce processus stationnaire et le processus IBM de départ :

Proposition 2.2.12 (Propriété de couplage). *Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. de loi μ non dégénérée et $X_0 \in S$. Soient X l'IBM(μ) de configuration initiale X_0 construit à partir des $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et Y l'IBM(μ) stationnaire construit à partir des $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Alors presque sûrement, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel pour tout $n \geq N$,*

$$\tilde{\Pi}_K(X_n) = \tilde{\Pi}_K(Y_n).$$

Idée de preuve. On procède de manière similaire à ce que l'on a vu dans la preuve de la proposition 2.2.8. L'idée est de trouver une occurrence du mot γ dans $(\xi_i)_{i \geq 0}$ à un instant N où $\sup_{k \geq N} S_k \leq S_N$. En effet, comme la marche (S_n) dérive vers $-\infty$, il existe une infinité de tels instants, et le mot γ a toujours une probabilité positive d'apparaître. On peut alors montrer qu'un tel instant existe bien. Comme γ est $(K+1)$ -coupleur, on obtient que $\tilde{\Pi}_K(X_{N+|\gamma|}) = \tilde{\Pi}_K(Y_{N+|\gamma|})$. Pour $i \geq N + |\gamma|$, on peut voir que la propriété de K -couplage se conserve pour ξ_N^i grâce au fait que $S_n \leq S_N$ pour tout $n \geq N$, et donc on a bien le résultat. \square

Corollaire 2.2.13. *Soit μ une probabilité non dégénérée sur \mathbb{N}^* , alors*

$$v_\mu = \mathbb{P}(F(Y_1) = 1).$$

Démonstration. Par la proposition précédente, presque sûrement, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $F(X_n) = F(Y_n)$. Donc presque sûrement, $\frac{F(Y_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_\mu$. Comme de plus $\frac{F(Y_n)}{n} \in [0, 1]$, par théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{E} \left[\frac{F(Y_n)}{n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_\mu.$$

Par stationnarité de (Y_n) , pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[F(Y_{k+1}) - F(Y_k)] = \mathbb{E}[F(Y_1) - F(Y_0)] = \mathbb{E}[F(Y_1)]$. En remarquant que $F(Y_1) \in \{0, 1\}$, on a

$$v_\mu = \mathbb{P}(F(Y_1) = 1).$$

\square

Par cette propriété, on peut en déduire plusieurs formules pour v_μ en écrivant cette probabilité comme une somme de poids de mots parcourant une certaine classe de mots. Dans [2], la classe de mots utilisée est celle des bons mots minimaux. On adapte ici la preuve à des classes de mots plus générales.

Définition 2.2.14 (Bons et mauvais mots, minimalité). *Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. On dit que α est un **bon (respectivement mauvais) mot** si pour toute configuration $X \in S$, α est bon (respectivement mauvais) relativement à X . De plus, on dit qu'un bon (respectivement mauvais) mot est **minimal** s'il ne contient aucun suffixe strict bon (respectivement mauvais).*

Notation 2.2.15. *On notera \mathcal{B} l'ensemble des bons mots et \mathcal{M} l'ensemble des mauvais mots.*

De même, on notera \mathcal{B}_m l'ensemble des bons mots minimaux et \mathcal{M}_m l'ensemble des mauvais mots minimaux.

Remarque 2.2.16. *Avec les notations précédentes, on a par définition :*

$$\mathcal{B} = \bigcap_{X \in S} \mathcal{P}_X \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \bigcap_{X \in S} (\mathcal{P}_X)^c$$

Définition 2.2.17. *Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ une classe de mots, on dit qu'un élément α de \mathcal{C} est **minimal pour \mathcal{C}** si α n'a aucun suffixe strict dans \mathcal{C} . On notera \mathcal{C}_m l'ensemble des éléments minimaux de \mathcal{C} .*

Théorème 2.2.18. *Soit \mathcal{C} une classe de mots telle que $\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{M}$. Soit $T = \inf\{n \geq 0 \mid \xi_{-n}^1 \in \mathcal{C}\}$, alors si $T < \infty$ p.s.,*

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{B}} W_\mu(\alpha) = 1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{M}} W_\mu(\alpha).$$

Démonstration. Par le corollaire 2.2.13, $v_\mu = \mathbb{P}(F(Y_1) = 1)$. En utilisant le fait que T est fini presque sûrement et que $\xi_{-T}^1 \in \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{M}$, on obtient :

$$v_\mu = \mathbb{P}(\xi_{-T}^1 \in \mathcal{B}) = 1 - \mathbb{P}(\xi_{-T}^1 \in \mathcal{M}).$$

En décomposant ces probabilités en fonction de la valeur de ξ_{-T}^1 ,

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{B}} \mathbb{P}(\xi_{-T}^1 = \alpha) = 1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{M}} \mathbb{P}(\xi_{-T}^1 = \alpha).$$

Enfin, pour $\alpha \in \mathcal{C}_m$, par minimalité de α ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{-T}^1 = \alpha) &= \mathbb{P}(T + 2 = |\alpha|; \xi_{-|\alpha|+2}^1 = \alpha) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{-|\alpha|+2}^1 = \alpha) \\ &= W_\mu(\alpha), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 2.2.19 (par les bons mots minimaux). *Pour μ une probabilité sur \mathbb{N} non dégénérée,*

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} W_\mu(\alpha) = 1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_m} W_\mu(\alpha).$$

Par conséquent, pour tout $p \in [0, 1]$,

$$C(p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \mathcal{M}$. Pour voir que $T = \inf\{n \geq 0 \mid \xi_{-n}^1 \in \mathcal{B} \cup \mathcal{M}\}$ est fini presque sûrement, on utilise la propriété 2.2.8 pour $K = 1$ et le fait que $T \leq N_1$. En effet, si ξ_{-T}^0 est 1-coupleur, alors ξ_{-T}^1 est un bon ou un mauvais mot en fonction de si ξ_1 est plus grand ou plus petit que le nombre de particules dans l'urne non vide la plus à droite déterminée par ξ_{-T}^0 . La deuxième égalité vient du corollaire 1.4.7. □

On peut également donner une formule pour v_μ en utilisant une autre classe de mots : les mots triangulaires.

Définition 2.2.20 (Mots triangulaires). *On dit qu'un mot α est **triangulaire** si*

$$\forall i \in [1, |\alpha|], \alpha_i \leq i.$$

*On notera \mathcal{T} l'ensemble des mots triangulaires. Si $\alpha \in \mathcal{T}_m$, on dit que α est **triangulaire minimal**.*

Exemple 2.2.21. *Les mots 12 et 1134 sont triangulaires minimaux. Le mot 21 n'est pas triangulaire. Les mots 121 et 12212 ne sont pas triangulaires minimaux car les suffixes 1 et 12 sont triangulaires.*

Corollaire 2.2.22 (par les mots triangulaires minimaux). *Pour μ une probabilité sur \mathbb{N} non dégénérée telle que μ est d'espérance finie, alors*

$$v_\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}} W_\mu(\alpha).$$

et donc pour tout $p \in]0, 1]$,

$$C(p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}} p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}.$$

Remarque 2.2.23. On peut montrer que l'hypothèse (plus faible) suivante peut remplacer l'hypothèse que μ est d'espérance finie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \mu(\llbracket 1, k \rrbracket) = \infty. \quad (2.3)$$

Ce résultat se montre de la même manière que dans l'article de Comets et al. [9], section 5, avec (en reprenant les notations de cet article) $a_k = \mu(\llbracket 1, k + 1 \rrbracket)$.

Démonstration. On veut appliquer le théorème 2.2.18 pour $\mathcal{C} = \mathcal{T}$. Il suffit donc de vérifier les deux hypothèses du théorème.

Le fait que $\mathcal{T}_m \in \mathcal{B} \cup \mathcal{M}$ vient du fait pour un mot triangulaire α , pour tout $X \in \mathcal{S}$, $((\Phi_\alpha(X))_i)_{i > F(X)}$ ne dépend pas de X . En d'autres termes, quelle que soit la configuration initiale, les particules vont toujours s'agencer de la même manière à droite du front. En particulier, en regardant quelle particule se reproduit au dernier coup, on en déduit si le mot est bon ou mauvais.

Le fait que l'on obtient un mot triangulaire dans le passé vient du fait que μ est d'espérance finie. On commence par noter par un simple calcul que si p_0 est la probabilité que ξ_0^∞ est un triangulaire (infini), alors $p_0 > 0$ si et seulement si μ est d'espérance finie. En effet,

$$p_0 = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_i \leq i + 1) = \prod_{i=0}^{\infty} \mu(\llbracket 1, i + 1 \rrbracket).$$

On a alors le résultat en passant au log dans l'égalité précédente.

Une manière de montrer que T est finie presque sûrement est de le majorer par une somme d'un nombre aléatoire (de loi dominée stochastiquement par la loi géométrique de paramètre p_0) de variables aléatoires finies presque sûrement. Pour ce faire, si $\xi_1 = k$, on commence par vérifier si ξ_{-k+1}^0 est triangulaire. S'il l'est, on a trouvé un suffixe triangulaire, donc T est bien fini. Dans le cas contraire, on calcule $m = \max\{\xi_i - i - k, i \in \llbracket -k + 1, 0 \rrbracket\} > 0$ et on réitère le processus en partant de $-k + 1 - m$. On réitère alors le processus jusqu'à ce que l'on obtienne un mot triangulaire. Par indépendance de $(\xi_i)_{i \geq 0}$, le nombre N de fois que l'on doit itérer le processus pour avoir un mot triangulaire est dominé par une variable de loi géométrique de paramètre p_0 . En notant Z_i le nombre de sommets entre les temps de départ des $(i - 1)$ -ème et i -ème itérations, on a $T \leq \sum_{i=1}^N Z_i$ et donc on en déduit que T est fini presque sûrement. □

2.3 Analyticité de C et développement en série entière au voisinage de 1

Notation 2.3.1. Pour $p, q \geq 0$, on note

$$D(p, q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} p^{|\alpha|} q^{H(\alpha)}.$$

En particulier, par le corollaire 2.2.19, pour $p \in [0, 1]$,

$$C(p) = D(p, 1 - p).$$

Théorème 2.3.2. C est analytique sur $]0, 1[$.

Démonstration. Soit $p_0 \in]0, 1[$. On veut montrer que C est analytique au voisinage de ce point. On commence par se ramener à montrer qu'il existe $p', q' \in]0, 1[$ tels que $1 - q' < p_0 < p'$ et $D(p', q') < \infty$.

Si un tel couple (p', q') existe, on considère la fonction à valeurs complexes

$$f : z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} z^{|\alpha|} (1-z)^{H(\alpha)}.$$

Pour $z \in B\left(\frac{1-q'+p'}{2}, \frac{p'-(1-q')}{2}\right) =: B_0$, on remarque que $|z| < p'$ et $|1-z| < q'$, donc f est bien définie sur cette boule ouverte. De plus

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} |z|^{|\alpha|} |1-z|^{H(\alpha)} \leq D(p', q') < \infty.$$

On en déduit que f est holomorphe sur B_0 comme limite uniforme de fonctions holomorphes sur tout compact inclus dans cette boule ouverte. En remarquant que $C = f|_{[0,1]}$ et que B_0 est un voisinage ouvert de p_0 , on en déduit que C est bien analytique au voisinage de p_0 .

Il nous reste donc à montrer qu'il existe bien $p', q' \in]0, 1[$ tels que $1 - q' < p_0 < p'$ et $D(p', q') < \infty$. En posant $T = \inf \{n \geq 0; \xi_{-n}^1 \in \mathcal{B} \cup \mathcal{M}\}$ et si \mathbb{E}_μ et \mathbb{P}_μ sont respectivement l'espérance et la probabilité sous laquelle les ξ_i ont pour loi μ , on a pour tout $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_p} [r^{T+2}] &\geq \mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{T+2} \mathbf{1}_{\xi_{-T}^1 \in \mathcal{B}} \right] \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} r^{(|\alpha|-2)+2} \mathbb{P}_{\mu_p} (\xi_{-T}^1 = \alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} (rp)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &= D(rp, 1-p). \end{aligned}$$

On cherche alors r et p tels que $\mathbb{E}_{\mu_p} [r^T] < \infty$ et $1 - (1-p) = p < p_0 < rp$. Cela revient donc à chercher $r > 1$ et $p \in]\frac{p_0}{r}, p_0[$ tels que $\mathbb{E}_{\mu_p} [r^T] < \infty$. D'après le lemme qui suit, en prenant $s = \frac{p_0}{2}$ et $p \in]\max(\frac{p_0}{2}, \frac{p_0}{r_s}), p_0[$, on aura le résultat.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $s \in]0, 1[$, il existe $r_s > 1$ tel que pour tout $p \in [s, 1]$, $\mathbb{E}_{\mu_p} [r_s^T] < \infty$.*

Preuve du lemme. Soient $s \in]0, 1[$, $p \in [s, 1]$ et $r > 1$. On a vu dans la preuve du corollaire 2.2.19 que $T \leq N_1$, puis que la suite (N_K) était croissante. Il nous suffit donc de montrer que N_K a des moments exponentiels fini pour un certain K . On reprend ici les notations de la preuve de la proposition 2.2.8 pour $\mu = \mu_p$. Ici $a = 1$, donc on pose $T_0 = 0$ et $T_k = \sup \{n < T_{k-1}; \xi_n = 1 \text{ ou } \xi_n \geq K\}$. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire partant de 0 de pas $S_n - S_{n-1} = \mathbf{1}_{\{\xi_{T_n} \geq K\}} - \mathbf{1}_{\{\xi_{T_n} = 1\}}$. En utilisant la formule du lemme 2.2.9 et après calculs, la moyenne des pas de la marche $(S_n)_{n \geq 0}$ est inférieure à $-1/3$ si et seulement si

$$2(1-p)^{K-1} \leq p. \tag{2.4}$$

On considère à présent K assez grand tel que cette condition est vérifiée. Comme dans la preuve de la proposition 2.2.8, on pose $R_0 = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, R_k le k -ème temps de record négatif, qui sont bien définis car la condition (2.4) est vérifiée. Comme 1 est dans le support de μ_p , on pose $\gamma = 1^{K+1} = 1 \dots 1$ le mot où la lettre 1 apparaît $K+1$ fois et

$$L := \inf \left\{ k \in \mathbb{N}^*; \xi_{T_{R_k(K+1)}^{R_k(K+1)-1}} = \gamma \right\}.$$

Étant donné que les $\xi_{T_{R_k(K+1)}^{R_k(K+1)-1}}$ pour $k \geq 0$ sont indépendants de même loi, et que le mot γ a probabilité non nulle d'apparaître, L est finie presque sûrement. Comme le mot $\xi_{T_{R_L(K+1)}^{R_L(K+1)-1}}^0$ est $(K+1)$ -coupleur par le même

raisonnement que dans la preuve de la proposition 2.2.8, $T < N_1 \leq N_K \leq K + 1 - T_{R_{L(K+1)}}$. Il suffit donc de trouver $r_s > 1$ tel que pour tout $p \in [s, 1]$,

$$\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r_s^{K+1-T_{R_{L(K+1)}}} \right] < \infty.$$

Étant donné que la marche $(S_n)_{n \geq 0}$ est dominée stochastiquement par la marche aléatoire simple $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{N} partant de 0 et telle que $\mathbb{P}(\tilde{S}_1 = -1) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(\tilde{S}_1 = 1) = \frac{1}{3}$, on va utiliser cette marche pour montrer le résultat. Pour $i \geq 0$, soit $U^{(i)}$ le i -ème temps de record négatif pour la marche (\tilde{S}_n) , c'est à dire le temps d'atteinte de $-i$ pour cette marche. Par la domination stochastique de ces marches, on en déduit que R_k est stochastiquement dominé par $U^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$. On utilise alors le résultat suivant sur la marche (\tilde{S}_n) , dont la preuve est fournie après la preuve du lemme 2.3.3 :

Lemme 2.3.4. *Pour tout $r \in \left[1, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$, $\mathbb{E}[r^{U^{(1)}}] < \infty$ et on a $\mathbb{E}[r^{U^{(1)}}] = \frac{3-\sqrt{9-8r^2}}{2r}$.*

En utilisant ce lemme et le fait que $U^{(k)}$ a la même loi qu'une somme de variables iid U_j de même loi que $U^{(1)}$, on obtient pour tout $r \in \left[1, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$ et pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{E}_{\mu_p} [r^{R_k}] \leq \left(\frac{3-\sqrt{9-8r^2}}{2r}\right)^k$. L'idée est à présent de passer à l'espérance conditionnelle sachant L puis sachant R_k pour $r^{-T_{R_{L(K+1)}}$ afin de montrer le résultat.

On commence par observer que $(R_k)_{k \geq 1}$ et $(T_k)_{k \geq 1}$ sont indépendants en remarquant que les R_k sont fonctions des $(\xi_{T_k})_{k \geq 0}$ puis en remarquant que $(T_k)_{k \geq 1}$ et $(\xi_{T_k})_{k \geq 0}$ sont indépendants. On obtient donc pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_{R_k}}] &= \mathbb{E}_{\mu_p} \left[\mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_{R_k}} | R_k] \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_p} \left[\mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_1}]^{R_k} \right] \end{aligned}$$

On sait que $-T_1$ suit une loi géométrique de paramètre $p + \mu_p([K, \infty[)$, donc $-T_1$ est dominée stochastiquement par une loi géométrique de paramètre s (car $s \leq p$). Donc $\mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_1}] \leq \frac{sr}{1-r(1-s)}$. On en déduit par ce qui précède que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_{R_k}}] &\leq \mathbb{E}_{\mu_p} \left[\left(\frac{sr}{1-r(1-s)} \right)^{R_k} \right] \\ &\leq \left(\frac{3 - \sqrt{9 - 8 \left(\frac{sr}{1-r(1-s)} \right)^2}}{2 \frac{sr}{1-r(1-s)}} \right)^k \end{aligned}$$

On aimerait à présent conditionner selon L pour montrer que l'espérance $\mathbb{E}_{\mu_p} [r^{-T_{R_{L(K+1)}}}]$ est finie, mais on a un problème étant donné que $(T_{R_{k(K+1)}})_{k \geq 0}$ et L ne sont pas indépendants. En effet, on peut notamment montrer que

$$\left(T_{R_{(k-1)(K+1)}} - T_{R_{k(K+1)}} = K + 1 \right) \Leftrightarrow \left(\xi_{T_{R_{k(K+1)}-K-1}}^{T_{R_{k(K+1)}-1}} = \gamma \right).$$

On peut néanmoins contourner le problème de la manière suivante. L'idée est de calculer la loi de $T_{R_{k(K+1)}}$ conditionnellement à L . On pose pour $j \geq 1$,

$$\tilde{\xi}_j = \xi_{T_{R_{(j-1)(K+1)}-K-1}}^{T_{R_{(j-1)(K+1)}-1}}.$$

Pour $l \in \mathbb{N}$, on peut écrire l'événement $L = l$ de la manière suivante :

$$(L = l) \Leftrightarrow \left(\tilde{\xi}_1 \neq \gamma, \dots, \tilde{\xi}_l \neq \gamma, \tilde{\xi}_{l+1} = \gamma \right).$$

De plus, pour $\delta_1, \dots, \delta_l$, on peut montrer par indépendance des ξ_i que

$$\mathbb{P}_{\mu_p} \left(-T_{R_{(K+1)}} = \delta_1, \dots, T_{R_{(l-1)(K+1)}} - T_{R_{l(K+1)}} = \delta_l; L = l \right) = \left(\prod_{i=1}^l \mathbb{P}_{\mu_p} \left(-T_{R_{(K+1)}} = \delta_i; \tilde{\xi}_1 \neq \gamma \right) \right) \mathbb{P}_{\mu_p} \left(\tilde{\xi}_1 = \gamma \right).$$

Donc

$$\mathbb{P}_{\mu_p} \left(-T_{R_{(K+1)}} = \delta_1, \dots, T_{R_{(l-1)(K+1)}} - T_{R_{l(K+1)}} = \delta_l \mid L = l \right) = \prod_{i=1}^l \mathbb{P}_{\mu_p} \left(-T_{R_{(K+1)}} = \delta_i \mid \tilde{\xi}_1 \neq \gamma \right).$$

Par ce qui précède, on peut donc calculer l'espérance de $r^{-T_{R_{(K+1)}}}$ sachant $\tilde{\xi}_1 \neq \gamma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{(K+1)}}} \mid \xi_{-(K+1)}^{-1} \neq \gamma \right] &= \frac{\mathbb{E}_{\mu_p} \left[\mathbb{1}_{\xi_{-(K+1)}^{-1} \neq \gamma} r^{-T_{R_{(K+1)}}} \right]}{\mathbb{P}_{\mu_p} \left(\xi_{-(K+1)}^{-1} \neq \gamma \right)} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{(K+1)}}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{(K+1)}}} \mathbb{1}_{\xi_{-(K+1)}^{-1} = \gamma} \right]}{1 - p^{K+1}} \end{aligned}$$

Or, $(\xi_{-(K+1)}^{-1} = \gamma) \Rightarrow (T_{R_{(K+1)}} = -(K+1))$, d'où :

$$\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{(K+1)}}} \mid \xi_{-(K+1)}^{-1} \neq \gamma \right] \leq \frac{1}{1 - p^{K+1}} \cdot \left(\left(\frac{3 - \sqrt{9 - 8 \left(\frac{sr}{1-r(1-s)} \right)^2}}{2 \frac{sr}{1-r(1-s)}} \right)^{K+1} - (rp)^{K+1} \right) := \frac{c_{r,s,p}}{1 - p^{K+1}}.$$

On en déduit la majoration suivante :

$$\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{L(K+1)}}} \right] \leq \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\mu_p}(L = l) \left(\frac{c_{r,s,p}}{1 - p^{K+1}} \right)^l$$

Comme L suit une loi géométrique de paramètre p^{K+1} sous la loi μ_p , on a

$$\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r^{-T_{R_{L(K+1)}}} \right] \leq p^{K+1} \sum_{l=0}^{\infty} (c_{r,s,p})^l.$$

Il suffit enfin de remarquer que $c_{r,s,p} \leq c_{r,s,s}$ et que $c_{r,s,s}$ tend vers $1 - s^{K+1}$ quand r tend vers 1. Pour un certain r_s assez proche de 1, $c_{r_s,s,s} \in [0, 1 - \frac{s^{K+1}}{2}]$ et donc pour $p \in [s, 1]$, on a bien

$$\mathbb{E}_{\mu_p} \left[r_s^{-T_{R_{L(K+1)}}} \right] < \infty.$$

□

Preuve du lemme 2.3.4. On peut montrer que $\mathbb{P}(U^{(1)} = 2n + 1) = \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} \right)^n$ en dénombrant les possibilités pour (S_0, \dots, S_{2n+1}) telles que $U^{(1)} = 2n + 1$. Cette quantité est un $\mathcal{O} \left(\left(\frac{8}{9} \right)^n \frac{1}{n^{3/2}} \right)$ par équivalent de Stirling, donc l'espérance est finie dès que $\frac{8}{9}r^2 < 1 \Leftrightarrow r \in \left[0, \frac{3}{2\sqrt{2}} \right]$. Pour trouver la formule exacte, on peut montrer en conditionnant par rapport au premier pas que $\mathbb{E}[r^{U^{(1)}}]$ est racine du polynôme $rX^2 - 3X + 2r$. On en déduit que $\mathbb{E}[r^{U^{(1)}}] = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8r^2}}{2r}$. Pour $r = 1$, la bonne valeur est 1. On en déduit par continuité en r sur $\left[1, \frac{3}{2\sqrt{2}} \right]$ et par théorème de convergence dominée que $\mathbb{E}[r^{U^{(1)}}] = \frac{3 - \sqrt{9 - 8r^2}}{2r}$. □

□

Au voisinage de 1, on peut étudier les coefficients du développement en série entière de C .

Théorème 2.3.5. *Le rayon de convergence de C au voisinage de 1 est plus grand que $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et si*

$$C(1-q) = \sum_{k \geq 0} a_k (-1)^k q^k,$$

alors

$$a_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)} \varepsilon_X(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)}. \quad (2.5)$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on va utiliser la méthode de la section 2.1. Pour pouvoir calculer explicitement tous les $\varepsilon_X(\alpha)$ pour α à hauteur fixe, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.6. *Soit $X \in S$, $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $|\alpha| > H(\alpha) + 1$, alors $\varepsilon_X(\alpha) = 0$.*

Démonstration. L'idée est que si la longueur du mot est trop grande, il aura un suffixe strict qui sera triangulaire. En particulier, α et $\varpi\alpha$ seront soit tous les deux bons, soit tous les deux mauvais, et donc on aura bien $\varepsilon_X(\alpha) = 0$ par la proposition 2.1.6. Plus précisément, en posant $S(k) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - 2)$ pour tout $k \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket$ et

$$n = \min \left\{ k \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket; \max_{k \leq t \leq |\alpha|} S(t) < -1 \right\},$$

on peut voir que $\alpha_n^{|\alpha|}$ est triangulaire et que $n > 1$, d'où le résultat. \square

On peut alors donner une condition suffisante pour avoir l'hypothèse de convergence de la somme dans le théorème 2.1.4.

Proposition 2.3.7. *Pour $p \in]1/2, 1]$ et pour tout $X \in S$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_X(\alpha)| p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} < \infty$.*

Démonstration. Pour montrer cette formule, on utilise le lemme 2.3.6 et le fait que $|\varepsilon_X(\alpha)| \leq 1$ pour majorer

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_X(\alpha)| p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} &\leq \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h \#\{\alpha \in \mathcal{A}, H(\alpha) = h \text{ et } |\alpha| = l\} p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &\leq \sum_{h \geq 0} \sum_{l=1}^{h+1} \binom{h+l-1}{l-1} p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}. \end{aligned}$$

Par changement de variable,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_X(\alpha)| W_p(\alpha) \leq \sum_{h \geq 0} \sum_{l=0}^h \binom{h+l}{l} p^{l+1} (1-p)^h.$$

Il suffit alors de remarquer que cette quantité correspond à $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \leq 0)$ où (S_n) est la marche aléatoire sur \mathbb{Z} partant de 0 de pas +1 avec probabilité p et -1 avec probabilité $1-p$. On peut ensuite montrer que cette quantité est finie par l'inégalité de Chernoff. \square

On revient à présent à la preuve du théorème. Par la proposition précédente, on a par le théorème 2.1.4 :

$$C(p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varepsilon_X(\alpha) p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}.$$

Par binôme de Newton et changement de variable,

$$\begin{aligned} C(p) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varepsilon_X(\alpha) \sum_{k=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{k} (-1)^k (1-p)^{H(\alpha)+k} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varepsilon_X(\alpha) \sum_{k=H(\alpha)}^{|\alpha|+H(\alpha)} \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} (-1)^{k-H(\alpha)} (1-p)^k. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer par théorème de Fubini et par le lemme précédent que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_X(\alpha)| \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} (1-p)^k < \infty$$

pour p dans un voisinage ouvert de 1. Or, par théorème de Fubini et la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} |\varepsilon_X(\alpha)| (1-p)^k &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\varepsilon_X(\alpha)| (2-p)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &\leq \sum_{h \geq 0} \sum_{l \geq 0} \binom{l+h}{l} (2-p)^{l+1} (1-p)^h. \end{aligned}$$

On peut alors montrer que cela revient à étudier la marche $(S_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ partant de 0 telle que la probabilité de faire un pas de 1 est $\frac{2-p}{3-2p}$ et celle de faire un pas de -1 est $\frac{1-p}{3-2p}$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} |\varepsilon_X(\alpha)| (1-p)^k \leq \sum_{n \geq 0} (3-2p)^n \mathbb{P}(S_n^p \leq 0).$$

Par inégalité de Chernoff, on peut alors montrer que cette quantité converge pour $p > \frac{3-\sqrt{2}}{2}$. On a donc montré la première égalité dans (2.5).

La deuxième formule se montre de la même manière en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2.3.8. *Si α est un bon mot minimal, alors $|\alpha| \leq H(\alpha) + 1$.*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence du lemme 2.3.6 et de la formule de la proposition 2.1.6 en remarquant que si α est bon minimal, alors $\varepsilon_X(\alpha) = 1$ pour une configuration $X \in S$ quelconque. \square

Par le corollaire 2.2.19, il suffit d'avoir comme précédemment

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} (1-p)^k < \infty.$$

On obtient alors par le lemme 2.3.8 en majorant $\mathbb{1}_{\alpha \in \mathcal{B}_m}$ par $\mathbb{1}_{|\alpha| \leq H(\alpha)+1}$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} \binom{|\alpha|}{k-H(\alpha)} (1-p)^k &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} (2-p)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &\leq \sum_{h \geq 0} \sum_{l \geq 0} \binom{l+h}{l} (2-p)^l (1-p)^h, \end{aligned}$$

et on a vu que cette quantité était finie pour $p > \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ précédemment, donc on a bien la deuxième formule. \square

Remarque 2.3.9. *On peut remplacer \mathcal{B}_m par \mathcal{T}_m dans l'énoncé du théorème et la preuve reste la même. Il suffit juste d'observer que si un mot est triangulaire minimal bon, alors $|\alpha| \leq H(\alpha) + 1$.*

2.4 Un développement asymptotique pour C autour de 0

Dans cette section, on étudie le comportement asymptotique de $C(p)$ dans le cas où p est proche de 0. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.4.1.

$$C(p) = pe \left(1 - \frac{\pi^2(1 + o(1))}{2(\log(p))^2} \right) \text{ lorsque } p \text{ tend vers } 0. \quad (2.6)$$

L'heuristique pour montrer ce théorème est la suivante : pour p proche de 0, la loi géométrique de paramètre $1/k$ est assez proche de la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$. On va donc approximer $C(1/k)$ par la vitesse w_k de l'IBM(ν_k), où ν_k est la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$. On utilise ensuite un couplage entre les marches aléatoires branchantes avec sélection et l'IBM(ν_k) pour montrer le résultat. On admet dans un premier temps le lemme suivant :

Lemme 2.4.2. Si $w_k = v_{\nu_k}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$ où ν_k est la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$, alors

$$kw_k = e - \frac{\pi^2 e}{2 \log(k)^2} + o_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log(k)^2} \right).$$

Le lemme d'approximation suivant nous permettra alors d'obtenir (2.6).

Lemme 2.4.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- pour tout $p \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $C(p) \leq w_k$
- pour tout $p \in [0, 1]$, $C(p) \geq kp(1-p)^k w_k$

Démonstration. La première inégalité vient du fait que pour $p \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, la loi ν_k est stochastiquement dominée par μ_p et par le corollaire 1.4.8.

La seconde inégalité se montre de la manière suivante. Pour $p \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $x = kp(1-p)^{k-1}$. Un simple calcul donne que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mu_p(\llbracket 1, j \rrbracket) \geq x\nu_k(\llbracket 1, j \rrbracket)$. Cela revient exactement à dire que μ_p est stochastiquement dominée par $\nu_k^x = x\nu_k + (1-x)\delta_\infty$. En conséquence, par le corollaire 1.4.8 et la proposition 1.4.5, $v_{\mu_p} \geq xw_k$, donc on a le résultat. \square

La preuve du théorème 2.4.1 est alors immédiate en admettant le lemme 2.4.2.

Preuve du théorème. Par la première inégalité du lemme 2.4.3, on obtient $C(p) \leq p(k+1)w_k$ et par la seconde $C(p) \geq (1-p)^k w_k$. En utilisant la première inégalité, on obtient que $\limsup_{p \rightarrow 0} \log(p)^2 \left(\frac{C(p)}{p} - e \right) \leq -\frac{\pi^2 e}{2}$. Par la seconde inégalité avec $k = \left\lfloor \frac{1}{p^{1-\delta}} \right\rfloor$, on obtient la borne inférieure. \square

Pour prouver le lemme 2.4.2, on doit introduire les marches aléatoires branchantes avec sélection. La définition suivante introduit seulement un cas particulier de marche aléatoires branchantes avec sélection (pour lesquelles la loi de reproduction des particules est une loi très spécifique).

Définition 2.4.4. Une *marche aléatoire branchante avec sélection* est un processus à k particules sur \mathbb{Z} qui évoluent de la manière suivante. À $t = 0$, on pose $Y_0^k(1) \geq \dots \geq Y_0^k(k)$ les positions des k particules dans \mathbb{Z} . À chaque particule, on associe une horloge exponentielle de paramètre 1, les horloges étant indépendantes. À chaque fois qu'une horloge sonne, la particule associée à cette horloge (de position $Y(i)$) se multiplie et donc on ajoute une particule en position $Y(i) + 1$. Étant donné qu'il y a à présent $k + 1$ particules, on supprime alors l'une des particules de position minimale. $Y_t^j(1) \geq \dots \geq Y_t^j(k)$ correspond alors aux positions des particules dans le système à l'instant t .

On admet le résultat suivant sur les marches aléatoires branchantes (dont une preuve est détaillée dans [1]).

Lemme 2.4.5. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t^k(1)}{t} = c_k \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad c_k - e \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\pi^2 e}{2 \log(k)^2}.$$

On déduit alors la preuve du lemme 2.4.2 à partir du lemme 2.4.5.

Preuve du lemme 2.4.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $(N_t)_{t \geq 0}$ processus de Poisson de paramètre k et $(X_n)_{n \geq 0}$ un IBM(ν_k) indépendant de $(N_t)_{t \geq 0}$. On considère de plus un processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ où $Y_t = (Y_t(j))_{j=1, \dots, k}$ sont les positions des k particules les plus à droites dans $(X_{N_t})_{t \geq 0}$ rangées dans l'ordre décroissant. L'idée est de voir que ce processus Y a même loi que les positions des particules dans une marche aléatoire branchante.

On pose $T_0 = 0$ et $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ les temps de saut du processus N_t . Sur l'intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, $(Y_t)_{t \geq 0}$ est constant, et donne les positions des k dernières particules dans X_i . Pour passer de $[T_i, T_{i+1}[$ à $[T_{i+1}, T_{i+2}[$, on choisit uniformément et indépendamment de $(N_t)_{t \geq 0}$ l'une des k dernières particules dans X_i et elle se reproduit. On considère ensuite les nouvelles positions des k particules les plus à droite dans la nouvelle configuration.

On montre que c'est bien la loi qui correspond au processus des positions pour une marche aléatoire branchante avec sélection. En effet, si E_1, \dots, E_k sont des variables aléatoires de lois exponentielles indépendantes de paramètre 1, et si U est l'indice défini presque sûrement tel que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $E_U \leq E_j$, alors pour $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}\left(U = l, \min_{1 \leq i \leq k} E_i \geq t\right) = \frac{1}{k} \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq k} E_i \geq t\right) = \frac{e^{-tk}}{k}.$$

On en déduit que pour le choix du premier indice, cela revient à attendre un temps $T_1 = \min_{1 \leq i \leq k} E_i$ de loi $\mathcal{E}(k)$ et on choisit indépendamment de T_1 et uniformément un indice dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ pour que la particule correspondant à cet indice se multiplie.

Pour le deuxième indice et les suivants, on réitère le processus en remarquant que sachant T_1 , on peut remettre les horloges à 0 par le caractère sans mémoire de la loi exponentielle. On obtient donc bien la même loi pour la marche aléatoire branchante avec sélection et les k dernières particules de l'IBM(ν_k).

Par le lemme 2.4.5, on en déduit que

$$\frac{F(X_{N_t})}{t} \underset{t \rightarrow \infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} c_k$$

Par une propriété des processus de Poisson, $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} k$ et en écrivant $\frac{F(X_{N_t})}{t} = \frac{F(X_{N_t})}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t}$, on obtient

$$c_k = kw_k,$$

d'où le résultat. □

3

Nouveaux résultats

Dans cette section, on présente les nouveaux résultats obtenus durant le stage de recherche. Dans la section 3.1, on présente les méthodes déjà utilisées par B. Mallein et S. Ramassamy pour calculer les coefficients du développement en série entière de C autour de 1 grâce à l'article [1], puis on présente de nouvelles méthodes inspirées de l'article [2], dont une qui nous a permis de calculer les 24 premiers coefficients de ce développement en série entière. Dans la section 3.2, on introduit une nouvelle méthode du type développement perturbatif exact sur les graphes pour calculer les coefficients sans passer par le couplage de Foss-Konstantopoulos.

3.1 Calcul des coefficients du développement en série entière de C autour de 1

Dans [1], B. Mallein et S. Ramassamy obtiennent les 17 premiers coefficients du développement en série entière de C au voisinage de 1. On présente ici différentes méthodes pour calculer numériquement ces coefficients. Les deux premières méthodes présentées ci-dessous sont celles déjà utilisées par B. Mallein et S. Ramassamy pour trouver les 17 premiers coefficients. Les méthodes suivantes utilisent la construction de l'IBM stationnaire de [2] pour calculer plus rapidement ces coefficients. On obtient alors les 24 premiers coefficients (voir table 3.1).

3.1.1 Par la méthode du développement perturbatif exact

Une première méthode vient de la formule (2.5) qui donne une formule pour les coefficients en fonction des $\varepsilon_X(\alpha)$ dans le théorème 2.3.5 :

$$a_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)} \varepsilon_X(\alpha).$$

Pour obtenir les c premiers coefficients, il suffit donc de choisir une configuration initiale $X \in S$ et de calculer $\varepsilon_X(\alpha)$ pour tout α de hauteur inférieure ou égale à c . Par le lemme 2.3.6, on est ramené à calculer $\varepsilon_X(\alpha)$ pour tous les α tels que $|\alpha| \leq H(\alpha) + 1$. On obtient en temps raisonnable une dizaine de coefficients avec cette méthode (voir la table 3.2).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_k	1	1	1	3	7	15	29	54	102	197	375	687
k	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
a_k	1226	2182	3885	6828	11767	19971	33519	55525	90293	143350	221149	329472

TABLE 3.1 – Table des coefficients du développement en série entière de C au voisinage de 1.

Nombre de coefficients obtenus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps de calculs (sec)	$1, 6 \cdot 10^{-4}$	$4, 3 \cdot 10^{-4}$	$1, 3 \cdot 10^{-3}$	$6, 0 \cdot 10^{-3}$	$3, 0 \cdot 10^{-2}$	0, 14	0, 76	5, 6	69, 9	1130

TABLE 3.2 – Temps d'exécutions pour la méthode du développement perturbatif exact en fonction du nombre de coefficients calculés.

K	1	2	3	4	5	6	7
m_K	1	3	5	8	11	14	18

TABLE 3.3 – Nombre de coefficients obtenus par la méthode d'encadrement.

3.1.2 Par encadrement de la vitesse avec des lois à support fini

Une autre méthode (plus rapide) consiste à utiliser le corollaire 1.4.8 pour encadrer $C(p)$ par les vitesses des fronts dans les IBM de lois $\underline{\mu}_p$ et $\bar{\mu}_p$ telles que $\bar{\mu}_p \leq \mu \leq \underline{\mu}_p$. Il s'agit de la méthode grâce à laquelle B. Mallein et S. Ramassamy ont obtenu les 17 premiers coefficients. On choisira alors $\underline{\mu}_p$ et $\bar{\mu}_p$ à support fini, et par les propositions 1.4.4 et 1.4.5, on pourra calculer explicitement les vitesses de front pour ces deux processus. En observant que les développements en série entière de ces deux vitesses coïncident jusqu'à un certain ordre, on en déduit un certain nombre de coefficients pour le développement de C au voisinage de 1. En notant $\underline{C}(p) = v_{\underline{\mu}_p}$ et $\bar{C}(p) = v_{\bar{\mu}_p}$, on a $\underline{C}(p) \leq C(p) \leq \bar{C}(p)$. On appellera **processus zélé** le processus IBM de loi $\bar{\mu}_p$ et **processus paresseux** le processus IBM de loi $\underline{\mu}_p$.

Dans ce qui suit, on fixe $K \in \mathbb{N}^*$ un entier positif et on pose $\underline{\mu}_{p,K}$ et $\bar{\mu}_{p,K}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$:

$$\underline{\mu}_{p,K}(\{k\}) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{si } k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ (1-p)^K & \text{si } k = +\infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_{p,K}(\{k\}) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{si } k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket \\ (1-p)^{K-1} & \text{si } k = K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors $\underline{C}_K(p) = v_{\underline{\mu}_{p,K}}$ et $\bar{C}_K(p) = v_{\bar{\mu}_{p,K}}$ et on va appliquer cette méthode pour les lois $\underline{\mu}_{p,K}$ et $\bar{\mu}_{p,K}$. Heuristiquement, si on considère $(\xi_i)_{i \geq 0}$ de loi μ_p comme dans la définition de l'IBM(μ_p), lorsque $\xi_i \leq K$, les processus zélé et paresseux évoluent de la même manière que dans le processus IBM géométrique. Lorsque $\xi_i > K$, c'est la K -ème particule la plus à droite qui se reproduit dans le cas zélé et aucune particule ne se reproduit dans le cas paresseux. Un simple calcul donne que l'on a bien $\bar{\mu}_p \leq \mu \leq \underline{\mu}_p$.

On note $\underline{a}_{k,K}$ et $\bar{a}_{k,K}$ les coefficients respectifs des développements en série entière de \underline{C}_K et \bar{C}_K au voisinage de 1, c'est à dire que pour p assez proche de 1, on a

$$\begin{cases} \underline{C}_K(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{a}_{k,K} (-1)^k (1-p)^k \\ \bar{C}_K(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_{k,K} (-1)^k (1-p)^k \end{cases} \quad (3.1)$$

En posant $m_K = \max \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \underline{a}_{k,K} = \bar{a}_{k,K}\}$, on observe que les coefficients pour \underline{C}_K , \bar{C}_K et C_K coïncident, et on obtient donc les m_K premiers coefficients du développement en série entière de C . Dans le tableau suivant, on donne le nombre de coefficients pour C obtenus en fonction de la valeur de K (voir la table 3.3).

3.1.3 Par le calcul des bons mots minimaux

Ici, on utilise les résultats de l'article [2] pour calculer numériquement les a_k jusqu'à un certain rang.

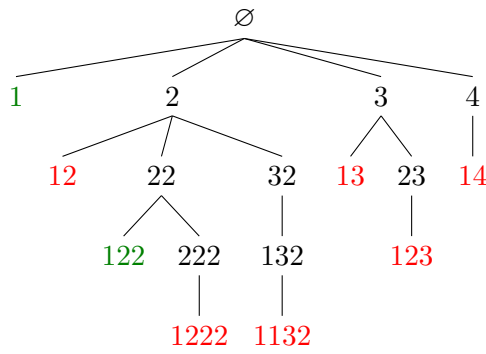


FIGURE 3.1 – Exemple de l'arbre décrit précédemment avec 3 pour hauteur maximale, avec en vert les bons mots et en rouge les mauvais mots.

Sans encadrement

Par la deuxième formule donnée dans le théorème 2.3.5 :

$$a_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)}.$$

Il nous suffit donc de calculer tous les bons mots minimaux jusqu'à une certaine hauteur h_{\max} fixée pour obtenir les coefficients $a_0, \dots, a_{h_{\max}}$. Il nous faut donc une méthode efficace pour calculer l'ensemble des bons mots minimaux de hauteur inférieure ou égale à h_{\max} .

L'idée est la suivante : partant d'un mot, on lui ajoute tous les préfixes possibles jusqu'à ce que la hauteur du nouveau mot dépasse h_{\max} ou jusqu'à ce que le nouveau mot soit bon ou mauvais mot minimal. De cette manière, on construit un arbre enraciné où chaque sommet correspond à un mot et tel que ses feuilles vont correspondre à tous les bons ou mauvais mots minimaux de hauteur inférieure ou égale à h_{\max} . Plus précisément, on part du mot vide \emptyset et on lui ajoute tous les préfixes d'une lettre possibles tels que le mot reste à hauteur inférieure à h_{\max} . À chaque fois que l'on a construit un nouveau mot, on le teste sur toutes les configurations pour vérifier si ce mot est bon ou mauvais. Si le mot est bon ou mauvais, alors il est bon minimal ou mauvais minimal par construction et on conserve les bons mots minimaux dans une liste. Si ce mot n'est ni bon ni mauvais, on réitère le procédé en ajoutant les lettres préfixes possibles à ce mot. On peut alors calculer les coefficients a_k par la formule précédente. On donne une représentation de l'arbre en figure 3.1.

Un premier problème vient du fait que pour tester si un mot est bon ou mauvais, il faut le tester sur toutes les configurations de S . Le lemme suivant nous permet de nous ramener à un nombre fini de calculs :

Lemme 3.1.1. *Soit $\alpha \in \mathcal{A}$ et soit $h = \max_{i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket} (\alpha_i + 1 - i)$, alors α est un bon mot si et seulement si α est un bon mot relativement à toutes les configurations $X \in S$ telles que $X(0) = \infty$ et $\sum_{k \geq 1} X(k) = h$.*

En d'autres termes il suffit de tester le mot α sur les configurations à h particules. Le lemme se prouve facilement en remarquant que pour α et h comme dans l'énoncé du lemme, seules les h particules les plus à droite d'une configuration et leurs descendants se reproduisent sous l'action du mot α . On donne dans le tableau suivant les temps d'exécutions pour différents nombres de coefficients calculés. On obtient par cette méthode les 18 premiers coefficients en moins d'une heure grâce à un programme Python (voir table 3.4).

Nombre de coefficients obtenus	11	12	13	14	15	16	17	18
Temps de calcul (sec)	4.10^{-2}	1.10^{-1}	5.10^{-1}	1,8	6.8	44	328	2248

TABLE 3.4 – Temps d'exécutions pour la méthode des bons mots minimaux sans encadrement en fonction du nombre de coefficients calculés.

Avec encadrement

On peut améliorer la méthode des bons mots minimaux en la combinant avec la méthode d'encadrement avec des lois à support fini (voir la sous-section 3.1.2). L'idée est de comparer comme dans la sous-section 3.1.2 les coefficients des processus zélé et paresseux pour obtenir ceux du processus de l'IBM géométrique. Pour calculer les coefficients des processus zélé et paresseux, on utilise la méthode des bons mots minimaux.

Proposition 3.1.2. *Pour $K \in \mathbb{N}^*$, on note r_K la plus petite racine positive du polynôme $1 - X^K - 4X(X+1)$. Avec les notations de la section 3.1.2, $\overline{C}_K(p)$ et $\underline{C}_K(p)$ sont développables en séries entières au voisinage de 1 et ont un rayon de convergence plus grand ou égal à respectivement $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $r_K \in]0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}]$. En posant $c_\alpha^K = \#\{i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i < K\}$ et $\mathcal{B}_m^{(K)} = \{\alpha \in \mathcal{B}_m \mid \forall i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i \leq K\}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{a}_{k,K} = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \binom{c_\alpha^K}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)} \quad (3.2)$$

et

$$\underline{a}_{k,K} = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha) - (K-1) \sum_{i=1}^{|\alpha|-1} k_i} (-1)^{H(\alpha) - (K-1) \sum_{i=1}^{|\alpha|-1} k_i}. \quad (3.3)$$

Démonstration. Pour \overline{C}_K , par le corollaire 2.2.19, on a pour tout $p \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} \overline{C}_K(p) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} \prod_{i=1}^{|\alpha|} \overline{\mu}_p(\alpha_i) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} p^{\#\{i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i < K\}} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} p^{c_\alpha^K} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{l=0}^{c_\alpha^K} \binom{c_\alpha^K}{l} (-1)^l (1-p)^{H(\alpha)+l} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour avoir la convergence de la série du développement en série entière de \overline{C}_K au voisinage de 1, il suffit donc de montrer que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{l=0}^{c_\alpha^K} \binom{c_\alpha^K}{l} (1-p)^{H(\alpha)+l} < \infty.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{l=0}^{c_\alpha^K} \binom{c_\alpha^K}{l} (1-p)^{H(\alpha)+l} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} (2-p)^{c_\alpha^K} (1-p)^{H(\alpha)} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m} (2-p)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)} \end{aligned}$$

Par la preuve du théorème 2.3.5, cette quantité est finie dès que p est plus grand que $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$, et donc on a bien la formule (3.2) par un changement de variable dans la formule (3.4).

Pour montrer la formule (3.3), par le corollaire 2.2.19 et la proposition 1.4.5 on a pour tout $p \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} \underline{C}_K(p) &= (1 - (1-p)^K) \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \prod_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\bar{\mu}_p(\alpha_i)}{(1 - (1-p)^K)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \frac{p^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}}{(1 - (1-p)^K)^{|\alpha|-1}} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} (1-p)^{K(k_1+\dots+k_{|\alpha|-1})} \right) \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} (-1)^l (1-p)^{H(\alpha)+l} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} (-1)^l (1-p)^{H(\alpha)+l+K(k_1+\dots+k_{|\alpha|-1})} \end{aligned}$$

Pour avoir convergence de la série, il suffit donc de choisir p tel que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} (1-p)^{H(\alpha)+l+K(k_1+\dots+k_{|\alpha|-1})} < \infty.$$

On commence par majorer cette somme en utilisant la formule du binôme de Newton et le lemme 2.3.8,

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{l} (1-p)^{H(\alpha)+l+K(k_1+\dots+k_{|\alpha|-1})} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} (2-p)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)+K(k_1+\dots+k_{|\alpha|-1})} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_m^{(K)}} \frac{(2-p)^{|\alpha|} (1-p)^{H(\alpha)}}{(1 - (1-p)^K)^{|\alpha|-1}} \\ &\leq (2-p) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=0}^h \binom{l+h}{l} \left(\frac{2-p}{1 - (1-p)^K} \right)^l (1-p)^h \end{aligned}$$

En posant $s = 1 - p + \frac{2-p}{1-(1-p)^K}$ et $p' = \frac{2-p}{s(1-(1-p)^K)} = \frac{2-p}{3-2p-(1-p)^{K+1}}$, alors si $S_n^{p,K}$ est la marche aléatoire simple partant de 0 telle que $\mathbb{P}(S_1^{p,K} = 1) = p'$, on a

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=0}^h \binom{l+h}{l} \left(\frac{2-p}{1 - (1-p)^K} \right)^l (1-p)^h = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n^{p,K} \leq 0) s^n.$$

Par inégalité de Hoeffding, on peut majorer cette somme par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{(1-p)(1-(1-p)^K)(2-p)}}{1 - (1-p)^K} \right)^n.$$

Un calcul simple montre que $\frac{2\sqrt{(1-p)(1-(1-p)^K)(2-p)}}{1-(1-p)^K} = 2\sqrt{\frac{(1-p)(2-p)}{1-(1-p)^K}}$ est bien strictement inférieur à 1 si et seulement si $1-p \in [0, r_K[$ et $K \in \mathbb{N}^*$, et donc le rayon de convergence de la série des \underline{a}_k est bien plus grand ou égal à r_K . On obtient la formule pour les coefficients \underline{a}_k de la même manière que pour ceux de \overline{C}_K . \square

Cette méthode est plus rapide que la précédente car elle ne demande de tester que les mots à lettres dans $\llbracket 1, K \rrbracket$. On obtient par cette méthode jusqu'à 24 coefficients pour C (avec $K = 9$).

Valeur de K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de coefficients obtenus	1	3	5	8	11	14	18	22	au moins 24

TABLE 3.5 – Nombre de coefficients obtenus par la méthode des bons mots avec encadrement.

Nombre de coefficients obtenus	12	13	14	15	16	17	18
Temps de calcul (sec)	1.10^{-1}	5.10^{-1}	1	4	12	33	145

TABLE 3.6 – Temps d'exécutions pour la méthode des bons mots triangulaires minimaux sans encadrement en fonction du nombre de coefficients calculés.

3.1.4 Par le calcul des bons mots triangulaires minimaux

On utilise ici le même raisonnement que dans la section 3.1.3 pour calculer les coefficients a_k mais en utilisant cette fois ci les mots triangulaires à la place des bons et des mauvais mots.

Sans encadrement

On peut montrer de la même manière que dans la preuve du théorème 2.5 le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *En notant $C(1 - q) = \sum_{k \geq 0} a_k (-1)^k q^k$, le développement en série entière de C au voisinage de 1, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$a_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)}. \quad (3.5)$$

L'intérêt de cette méthode est que pour calculer les mots triangulaires minimaux bons, on a seulement besoin de tester les mots triangulaires minimaux sur une seule configuration. Néanmoins, cette méthode est moins efficace que celle utilisant les bons mots minimaux étant donné que le nombre de mots minimaux à calculer est exponentiel en le nombre de coefficients à calculer, et qu'il y a plus de mots triangulaires minimaux bons que de bons mots minimaux. Les temps d'exécutions de cette méthode sont donnés dans la table 3.6.

Avec encadrement

De la même manière que dans la section 3.1.3, on peut donner une formule pour les \bar{a}_k et les \underline{a}_k par la méthode des mots triangulaires minimaux.

Proposition 3.1.4. *En posant $\mathcal{B}^{(K)} = \{\alpha \in \mathcal{B} \mid \forall i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i \leq K\}$, $c_\alpha^K = \#\{i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i < K\}$, et en reprenant la notation (3.1), on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\bar{a}_{k,K} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}^{(K)}} \binom{c_\alpha^K}{k - H(\alpha)} (-1)^{H(\alpha)} \quad (3.6)$$

et

$$\underline{a}_{k,K} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}^{(K)}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{|\alpha|-1}=0}^{\infty} \binom{|\alpha|}{k - H(\alpha) - (K-1) \sum_{i=1}^{|\alpha|-1} k_i} (-1)^{H(\alpha) + (K-1) \sum_{i=1}^{|\alpha|-1} k_i}. \quad (3.7)$$

La preuve de la proposition 3.1.4 est identique à celle de la proposition 3.1.2. Les calculs numériques sont néanmoins plus longs avec cette méthode qu'avec celle des bons mots minimaux avec encadrement.



FIGURE 3.2 – Exemple de deux motifs.



FIGURE 3.3 – $L(G_1) = 2$ et $L(G_2) = 2$ pour les graphes de la figure 3.2. Les plus long chemins sont en vert.

3.2 Développement perturbatif exact sur les graphes

On présente dans cette section une autre méthode pour calculer les coefficients a_k . L'idée est d'utiliser une méthode du type développement perturbatif exact sur les graphes et non plus sur les mots. L'intérêt de cette méthode est que l'on n'a plus besoin de faire appel au couplage avec l'IBM étant donné que l'on raisonne directement sur les graphes. Heuristiquement, lorsque p est proche de 1, le graphe de Barak-Erdős $G_n(p)$ est proche du graphe complet à quelques arêtes manquantes près. En négligeant les motifs d'arêtes manquantes ayant une probabilité en $(1 - p)^k$ d'apparaître dans le graphe pour k plus grand qu'un certain h fixé, on obtient les coefficients a_0, \dots, a_h . Plus précisément, si on introduit les motifs sur les graphes comme dans la définition suivante, alors il nous suffira d'étudier les motifs à moins de h arêtes pour calculer les coefficients a_0, \dots, a_h (pour un certain $h \in \mathbb{N}^*$ fixé) :

Définition 3.2.1 (Motifs). *Un motif à s sommets et n arêtes est un graphe orienté $G = (V, E)$ où V est de la forme $\llbracket a + 1, a + s \rrbracket$ pour un certain $a \in \mathbb{N}$ et tel que $|E| = n$ (voir la figure 3.2 pour un exemple). On notera alors $V(G) = \llbracket a, b \rrbracket$ et $E(G) = E$.*

Notation 3.2.2. *Pour $G = (V, E)$ un motif, on note $L(G)$ le nombre maximal de sommets dans un chemin du graphe orienté $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$, où $\tilde{E} = \{(i, j) \in (V^2 \setminus E), i < j\}$.*

Autrement dit, $L(G)$ est le nombre maximal de sommet dans un chemin orienté dans le graphe composé des mêmes sommets que G et où les arêtes relient pour tout $i < j$ le sommet i au sommet j tel que l'arête $\{i, j\}$ n'est pas dans le graphe G (voir figure 3.3).

Pour utiliser un raisonnement du type développement perturbatif exact, on a besoin de définir un ordre partiel sur les motifs.

Définition 3.2.3 (Ordre partiel sur les motifs). *Pour $G = (\llbracket a, b \rrbracket, E)$ et $G' = (\llbracket a', b' \rrbracket, E')$ deux motifs, on dit que G' est inclus dans G et on note $G' \subseteq G$ si $\llbracket a', b' \rrbracket \subseteq \llbracket a, b \rrbracket$ et $E' \subseteq E$.*

On donne un exemple d'inclusion de motifs dans la figure 3.4.



FIGURE 3.4 – Exemple de motifs G et G' tels que $G' \subseteq G$.

Définition 3.2.4. On dit que deux motifs $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont **équivalents** (et on note $G_1 \simeq G_2$) s'il existe une translation φ de V_1 dans V_2 telle que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(i, j) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(i), \varphi(j)) \in E_2.$$

En d'autres termes, deux motifs sont équivalents s'il sont égaux à numérotation près.

Notation 3.2.5. On notera M_k l'ensemble des motifs à k arêtes dont l'ensemble des sommets est $\llbracket 1, c \rrbracket$ pour un certain $c \in \mathbb{N}$. On note également pour un motif $G = (\llbracket a, b \rrbracket, E)$ et pour $a' < b' \in \llbracket a, b \rrbracket$ le motif $G_{a'}^{b'}$ d'ensemble de sommets $\llbracket a', b' \rrbracket$ et d'ensemble d'arêtes $\{(i, j) \in E, a' \leq i < j \leq b'\}$.

Par la notation précédente, chaque classe d'équivalence de motifs admet exactement un représentant dans $\bigcup_{k \geq 0} M_k$. On définit à présent les termes du développement perturbatif exact. Pour G un motif, on définit $\varepsilon(G)$ par récurrence sur le nombre de sommets de G grâce à la formule suivante (en posant $\varepsilon(\emptyset) = 0$) :

$$\varepsilon(G) := L(G) - \sum_{G' \subsetneq G} \varepsilon(G') \quad (3.8)$$

En appliquant la formule (3.8) pour $G = G_{n, 1-p}$ un graphe de Barak-Erdős à n sommets et de probabilité de présence des arêtes $1 - p$, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.6. S'il existe $r \in [0, 1[$ tel que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} |\varepsilon(G_0)| (1-r)^k < \infty, \quad (3.9)$$

alors pour tout $p \in [r, 1]$,

$$C(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} \varepsilon(G_0) (1-p)^k. \quad (3.10)$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \sum_{G_0 \in M_k} \varepsilon(G_0). \quad (3.11)$$

Démonstration. Soit $p \in]0, 1[$. D'après la formule (3.8) appliquée pour $G = G_{n, 1-p}$ un graphe de Barak-Erdős à n sommets et de probabilité de présence des arêtes $1 - p$, on obtient

$$L(G_{n, 1-p}) = \sum_{G' \subseteq G_{n, 1-p}} \varepsilon(G'),$$

d'où

$$\mathbb{E} \left[\frac{L(G_{n, 1-p})}{n} \right] = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{G' \subseteq G_{n, 1-p}} \varepsilon(G') \right]. \quad (3.12)$$

Par théorème de convergence dominée et par définition de L , le terme de gauche dans (3.12) converge vers $C(p)$. Pour le terme de droite,

$$\sum_{G' \subseteq G_{n, 1-p}} \varepsilon(G') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} |\{G \subseteq G_{n, 1-p}, G \simeq G_0\}| \varepsilon(G_0). \quad (3.13)$$

Par les formules (3.12) et (3.13), on obtient

$$\mathbb{E} \left[\frac{L(G_{n,1-p})}{n} \right] = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} |\{G \subseteq G_{n,1-p}, G \simeq G_0\}| \varepsilon(G_0) \right]. \quad (3.14)$$

On va intervertir somme et intégrale pour obtenir le résultat. Par théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} |\{G \subseteq G_{n,1-p}, G \simeq G_0\}| |\varepsilon(G_0)| \right] &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} \mathbb{E} [|\{G \subseteq G_{n,1-p}, G \simeq G_0\}| |\varepsilon(G_0)|] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-|V(G_0)|} \mathbb{1}_{G_0 \subseteq (G_{n,1-p})_{i+1}^{i+|V(G_0)|}} \right] |\varepsilon(G_0)| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} \left(\frac{n - |V(G_0)| + 1}{n} \right) (1-p)^k |\varepsilon(G_0)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} |\varepsilon(G_0)| (1-p)^k. \end{aligned}$$

Par la condition (3.9), cette dernière quantité est finie, donc par théorème de Fubini appliqué à la formule (3.14)

$$\mathbb{E} \left[\frac{L(G_{n,1-p})}{n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{G_0 \in M_k} \left(\frac{n - |V(G_0)| + 1}{n} \right) (1-p)^k \varepsilon(G_0). \quad (3.15)$$

Par théorème de convergence dominée, on obtient la formule (3.10) et donc la formule (3.11). \square

Pour montrer que la condition (3.9) est vérifiée, on cherche plus d'informations sur les coefficients $\varepsilon(G)$. Le résultat suivant ne suffit pas pour montrer que (3.9) est vérifiée pour un certain r mais donne déjà une condition suffisante pour que $\varepsilon(G)$ soit nul. En particulier, si l'hypothèse (3.9) est vérifiée, on est ramené à tester un nombre fini de motifs pour calculer un nombre fini de $(a_k)_{k \geq 0}$.

Lemme 3.2.7. *Si G est un motif tel que $\varepsilon(G) \neq 0$, alors le graphe obtenu à partir de G en oubliant l'orientation de ses arêtes est connexe.*

Démonstration. On commence par remarquer que si G_1 et G_2 sont deux motifs équivalents, alors $\varepsilon(G_1) = \varepsilon(G_2)$ étant donné que la numérotation n'intervient pas dans la formule (3.8). Pour montrer le lemme 3.2.7, on procède par récurrence sur $|V(G)| + |E(G)|$ la somme des nombres d'arêtes et de sommets du motif G .

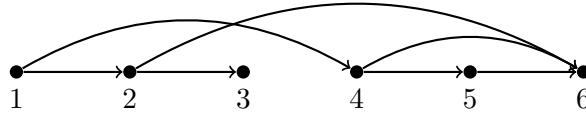
Initialisation : Dans le cas où $|V(G)| + |E(G)| = 1$, les seuls cas possibles sont les graphes à un sommet, qui sont connexes, donc l'initialisation est prouvée.

Récurrence : À présent, on suppose que le résultat est vrai pour tous les motifs G' tels que $|V(G')| + |E(G')| \leq n - 1$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$). On considère à présent un motif $G = ([a, b], E)$ tel que $|V(G)| + |E(G)| = n$.

On commence par traiter le cas où deux arêtes se croisent dans G , c'est à dire lorsqu'il existe $a \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 \leq b$ tels que $(i_1, i_2) \in E$ et $(j_1, j_2) \in E$, et où i_1 et i_2 ne sont pas dans la même composante connexe que j_1 et j_2 . On illustre ce cas en figure 3.5. Dans ce cas, si on pose $\tilde{G} = (V, E \setminus \{(i_1, i_2)\})$ le graphe G dans lequel on a retiré l'arête (i_1, i_2) , alors

$$L(G) = L(\tilde{G}).$$

En effet, on a déjà $L(\tilde{G}) \geq L(G)$ car tout chemin orienté dans le complémentaire de G est un chemin orienté dans le complémentaire de \tilde{G} . Réciproquement, on peut montrer que tout chemin orienté dans le complémentaire de \tilde{G}

FIGURE 3.5 – Illustration du cas croisé, avec $i_1 = 1$, $i_2 = 4$, $j_1 = 2$ et $j_2 = 6$.

passant par l'arête (i_1, i_2) n'est pas un chemin orienté maximal dans le complémentaire de \tilde{G} , car on peut toujours trouver un chemin plus long en remplaçant l'arête (i_1, i_2) par les arêtes (i_1, j_1) et (j_1, i_2) (car i_1 et i_2 ne sont pas dans la même composante connexe que j_1 et j_2). On a donc bien $L(G) = L(\tilde{G})$. Par conséquent, par la formule (3.8), on a

$$\begin{aligned} \sum_{G' \subseteq G} \varepsilon(G') &= \sum_{G' \subseteq \tilde{G}} \varepsilon(G') \\ \implies \varepsilon(G) &= - \sum_{\substack{G' \subsetneq G \\ G' \not\subseteq \tilde{G}}} \varepsilon(G') \end{aligned} \quad (3.16)$$

Or, si $G' \subsetneq G$ et $G' \not\subseteq \tilde{G}$, on a $(i_1, i_2) \in E(G')$, et donc comme $j_1 \in V(G')$, G' n'est pas connexe. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\varepsilon(G') = 0$. Donc par (3.16), $\varepsilon(G) = 0$ dans le cas où l'on a un croisement.

On distingue à présent deux cas sous l'hypothèse que l'on est dans le cas non croisé pour $G = ([a, b], E)$:

- **Cas séparé** : S'il existe $c \in [a, b]$ tel que pour tout $i \in [a, c]$ et pour tout $j \in [c + 1, b]$, $(i, j) \notin E$.
- **Cas non séparé** : Si G n'est pas dans le cas séparé.

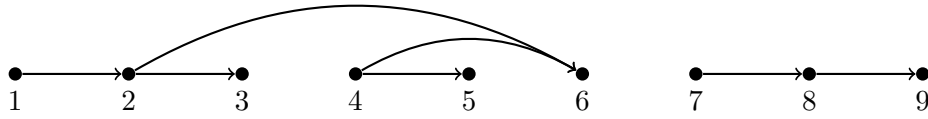
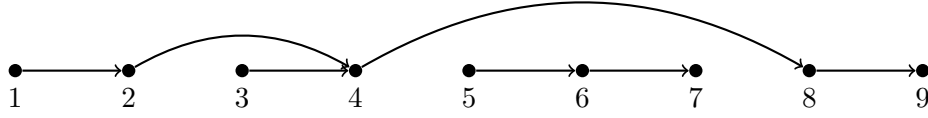
On illustre ces deux cas dans les figures 3.6 et 3.7.

Dans le cas séparé, on pose avec c comme précédemment les motifs $G_1 = (V_1, E \cap V_1^2)$ et $G_2 = (V_2, E \cap V_2^2)$ où $V_1 = [a, c]$ et $V_2 = [c + 1, b]$. Le motif G correspond alors à la juxtaposition des motifs G_1 et G_2 . On commence dans ce cas par montrer que

$$L(G) = L(G_1) + L(G_2). \quad (3.17)$$

Dans un premier temps, on montre que $L(G) \leq L(G_1) + L(G_2)$. Si l'on considère des sommets $m_1 < \dots < m_{L(G)}$ dans $[a, b]$ formant un chemin maximal dans le complémentaire de G , alors si j est tel que $m_1, \dots, m_j \in [a, c]$ et $m_{j+1}, \dots, m_{L(G)} \in [c + 1, b]$, m_1, \dots, m_j forme un chemin dans le complémentaire de G_1 et $m_{j+1}, \dots, m_{L(G)}$ forme un chemin dans le complémentaire de G_2 . On en déduit que $j \leq L(G_1)$ et $L(G) - j \leq L(G_2)$, donc $L(G) \leq L(G_1) + L(G_2)$. Pour montrer que $L(G) \geq L(G_1) + L(G_2)$, on considère $m_1 < \dots < m_{L(G_1)}$ dans $[a, c]$ formant un chemin maximal dans le complémentaire de G_1 et $m_{L(G_1)+1} < \dots < m_{L(G_1)+L(G_2)}$ dans $[c + 1, b]$ formant un chemin maximal dans le complémentaire de G_2 . Par le fait que $[a, c]$ et $[c + 1, b]$ sont déconnectés dans G , on en déduit que $m_1, \dots, m_{L(G_1)+L(G_2)}$ forme un chemin dans le complémentaire de G . En conséquence, on a bien $L(G) \geq L(G_1) + L(G_2)$ et donc par l'autre inégalité, on a montré (3.17). Par (3.8) et (3.17), on obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{G' \subseteq G} \varepsilon(G') &= \sum_{G' \subseteq G_1} \varepsilon(G') + \sum_{G' \subseteq G_2} \varepsilon(G') \\ \implies \varepsilon(G) &= - \sum_{\substack{G' \subsetneq G \\ G' \not\subseteq G_1 \\ G' \not\subseteq G_2}} \varepsilon(G'). \end{aligned} \quad (3.18)$$


 FIGURE 3.6 – Illustration du cas séparé, avec $a = 1, c = 6, b = 9$.

 FIGURE 3.7 – Illustration du cas non séparé, avec $a = 1, c = 6, d = 7$ et $b = 9$.

Le fait que $G' \subsetneq G$, que $G' \not\subseteq G_1$ et que $G' \not\subseteq G_2$ implique qu'au moins un sommet de G_1 et un sommet de G_2 sont dans G' , et donc que G' n'est pas connexe. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\varepsilon(G') = 0$, et par (3.18), on obtient alors $\varepsilon(G) = 0$. On a donc montré le résultat dans le cas séparé.

Dans le cas non séparé, comme on se place sous l'hypothèse non croisée, il existe $c < d \in \llbracket a, b - 1 \rrbracket$ tels qu'en posant $V_g = \llbracket a, c \rrbracket$, $V_d = \llbracket d + 1, b \rrbracket$, $V_1 = V_g \cup V_d$ et $V_2 = \llbracket c + 1, d \rrbracket$, V_1 et V_2 sont déconnectés dans G . On note alors les motifs $G_g = (V_g, E \cap V_g^2)$, $G_2 = (V_2, E \cap V_2^2)$ et $G_d = (V_d, E \cap V_d^2)$. On peut alors montrer de manière analogue à la preuve de la formule (3.17) que

$$L(G) = L(G_g) + L(G_2) + L(G_d). \quad (3.19)$$

Par (3.18) et (3.19), on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{G' \subseteq G} \varepsilon(G') &= \sum_{G' \subseteq G_g} \varepsilon(G') + \sum_{G' \subseteq G_2} \varepsilon(G') + \sum_{G' \subseteq G_d} \varepsilon(G') \\ \implies \varepsilon(G) &= - \sum_{\substack{G' \subsetneq G \\ G' \not\subseteq G_g \\ G' \not\subseteq G_2 \\ G' \not\subseteq G_d}} \varepsilon(G'). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme précédemment, si G' est un motif comme dans la somme (3.20), alors on peut montrer que G' n'est pas connexe, et donc par hypothèse de récurrence, $\varepsilon(G') = 0$. Par (3.20), on obtient donc le résultat $\varepsilon(G) = 0$. \square

Bibliographie

- [1] Bastien Mallein and Sanjay Ramassamy. Barak-Erdős graphs and the infinite-bin model. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 2021. À paraître.
- [2] Bastien Mallein and Sanjay Ramassamy. Two-sided infinite-bin models and analyticity for Barak-Erdős graphs. *Bernoulli*, 25(4B) :3479–3495, 2019.
- [3] Amnon B. Barak and Paul Erdős. On the maximal number of strongly independent vertices in a random acyclic directed graph. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 5(4) :508–514, 1984.
- [4] Charles M. Newman. Chain lengths in certain random directed graphs. *Random Structures Algorithms*, 3(3) :243–253, 1992.
- [5] Sergey Foss and Takis Konstantopoulos. Extended renovation theory and limit theorems for stochastic ordered graphs. *Markov Process. Related Fields*, 9(3) :413–468, 2003.
- [6] E. Gelenbe, R. Nelson, T. Philips, and A. Tantawi. An approximation of the processing time for a random graph model of parallel computation. In *Proceedings of 1986 ACM Fall Joint Computer Conference*, ACM '86, page 691–697, Washington, DC, USA, 1986. IEEE Computer Society Press.
- [7] Marco Isopi and Charles M. Newman. Speed of parallel processing for random task graphs. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(3) :361–376, 1994.
- [8] Ksenia Chernysh and Sanjay Ramassamy. Coupling any number of balls in the infinite-bin model. *J. Appl. Probab.*, 54(2) :540–549, 2017.
- [9] Francis Comets, Roberto Fernández, and Pablo A. Ferrari. Processes with long memory : regenerative construction and perfect simulation. *Ann. Appl. Probab.*, 12(3) :921–943, 2002.