Une équation cohomologique liée à la transformation de Pascal

Thierry Bousch*

17 août 2026

Abstract

Let $\mathcal{P}$ be the Pascal transformation on the space $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, endowed with the Bernoulli measure of parameters $(p_0, 1-p_0)$, where $0 < p_0 < 1$. A special cohomological equation associated to $\mathcal{P}$ is considered, and in particular the following result is proved: $\exp(2\pi it)$ is an eigenvalue of $\mathcal{P}$ if and only if

$$\sum_{n \geqslant 0} \left\| t \cdot C_n^{w_0+\cdots+w_{n-1}} \right\|^2 < \infty$$

for almost all $(w_0, w_1, \ldots)$ in Ω, where the C_n^p are the binomial coefficients and $\|\cdot\|$ the distance to the nearest integer.

Résumé

Soit $\mathcal{P}$ la transformation de Pascal sur l'espace $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la mesure de Bernoulli de paramètres $(p_0, 1-p_0)$, où $0 < p_0 < 1$. On considère une certaine équation cohomologique associée à $\mathcal{P}$, et on établit en particulier le résultat suivant: $\exp(2\pi it)$ est valeur propre de $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$\sum_{n \geqslant 0} \left\| t \cdot C_n^{w_0+\cdots+w_{n-1}} \right\|^2 < \infty$$

pour presque tout $(w_0, w_1, \ldots)$ dans Ω, où les C_n^p sont les coefficients du binôme et $\|\cdot\|$ la distance à l'entier le plus proche.

Titre anglais: A cohomological equation related to the Pascal transformation

Mots-clés (anglais): Pascal automorphism, adic transformation, weak mixing, cohomological equation

Classification AMS (2010): 37A05 (measure-preserving transformations), 37A20 (orbit equivalence, cocycles, ergodic equivalence relations), 37A25 (ergodicity, mixing, rates of mixing), 37B10 (symbolic dynamics)

*Laboratoire de Mathématique d'Orsay (UMR 8628 du CNRS), bât. 307, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

Table des matières

1 Introduction

La *transformation de Pascal* $\mathcal{P}$ est une certaine transformation partielle remarquable de l'ensemble de Cantor $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (un homéomorphisme entre deux ouverts de Ω). Elle a été introduite par Hajian et Kakutani dans les années 1970 [HIK, Kak] pour traiter certaines questions de théorie ergodique en mesure infinie. Mais c'est sa redécouverte par Vershik [V81], comme exemple typique de système "adique", qui a révélé son importance.

Sa propriété essentielle est que sa relation d'équivalence orbitale est la même que celle du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$ par son action naturelle sur Ω : deux éléments de Ω sont dans la même orbite de $\mathcal{P}$ si et seulement si ils diffèrent par permutation d'un nombre fini de symboles.

Pour toute mesure de Bernoulli $\mathcal{B}(p_0, 1-p_0)$, où p_0 est un nombre réel tel que $0 < p_0 < 1$, la transformation de Pascal est définie presque partout, ainsi que son inverse, et préserve cette mesure. Elle est en outre *ergodique*, car elle a les mêmes orbites que le groupe $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$, et on sait bien que l'action de $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$ sur Ω est ergodique, pour toute mesure de Bernoulli [HS].

Ceci conduit naturellement à la question du mélange faible: on sait que $\mathcal{P}$ n'a pas de fonction invariante $\Omega \to \mathbb{C}$ non triviale, peut-être pourrait-on prouver similairement qu'elle n'a pas de fonction propre non triviale?

Le problème de l'existence de fonctions propres pour les transformations adiques a été beaucoup étudié, voir par exemple [Hos, Liv, Sol, VL], mais les résultats existants nécessitent des hypothèses dynamiques (stationnarité, degré borné, etc.) que la transformation de Pascal ne satisfait pas.

Vershik a conjecturé que la transformation de Pascal est faiblement mélangeante, et ce problème a donné lieu à de nombreux travaux [PS, AP, BBK]. Dans [V11], Vershik affirme avoir une démonstration du mélange faible, mais sa preuve est incomplète (communication privée avec Thierry De La Rue, voir aussi les commentaires de Vershik dans [V15], page 89 et la note de bas de page).

Le problème de savoir si la transformation de Pascal est faiblement mélangeante, pour une valeur donnée de p_0 dans $]0,1[$, est donc toujours un problème ouvert.

On a cependant des résultats partiels: en particulier, on connaît une condition *nécessaire*, de nature diophantienne, pour que $\exp(2\pi it)$ soit valeur propre de $\mathcal{P}$. Elle permet notamment de démontrer que les racines de l'unité (autres que 1) ne peuvent pas être valeurs propres de $\mathcal{P}$, autrement dit, que toutes les puissances de $\mathcal{P}$ sont ergodiques.

L'objet du présent article est de donner une condition *nécessaire et suffisante*, de nature diophantienne, pour que $\exp(2\pi it)$ soit valeur propre de $\mathcal{P}$, condition donnée dans l'Abstract. A defaut de résoudre le problème du mélange faible, elle le transforme en un problème équivalent d'approximation diophantienne, où la dynamique a totalement disparu.

2 Notations et définitions

On note comme d'habitude $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels. L'ensemble de Cantor $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la distance ultramétrique usuelle: $d(x_0x_1x_2\ldots, y_0y_1y_2\ldots) = 2^{-n}$, où n est le plus petit entier tel que $x_n \neq y_n$. Le monoïde libre sur $\{0,1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots finis sur cet alphabet (muni de l'opération de concaténation) sera noté $\{0,1\}^\star$. Il agit naturellement sur Ω par concaténation: $w_0\ldots w_{\ell-1} \cdot x_0x_1x_2\ldots = w_0\ldots w_{\ell-1}x_0x_1x_2\ldots$ On notera $|w|$ la longueur du mot w, et $\square$ le mot vide. Le morphisme d'abélianisation $\mathrm{ab} : \{0,1\}^\star \to \mathbb{N}^2$ est donné par $\mathrm{ab}(w_0\ldots w_{\ell-1}) = (m,n)$, où m et n sont les nombres de 0 et de 1 dans le mot, c'est-à-dire que $n = w_0 + \cdots + w_{\ell-1}$ et $m = \ell - n$.

Les *cylindres* de Ω sont les parties de Ω de la forme $w\Omega$, où w est un mot fini; l'*ordre* du cylindre est la longueur de ce mot. Entre deux cylindres quelconques on a un *homéomorphisme canonique* $w\Omega \to w'\Omega$, défini de la manière évidente, et qui est une isométrie si (et seulement si) les cylindres sont de même ordre.

Pour tous m, n entiers naturels, soient Ω'_{mn} et Ω''_{mn} les ensembles cylindriques (d'ordre $m+n+2$)

$$\Omega'_{mn} = 0^m1^n10\,\Omega\ , \qquad \Omega''_{mn} = 1^n0^m01\,\Omega\ , \tag{2.1}$$

et $P_{mn} : \Omega'_{mn} \to \Omega''_{mn}$ l'isométrie canonique. On définit alors les ouverts

$$\Omega' = \bigsqcup_{m,n\geqslant 0} \Omega'_{mn}\ , \qquad \Omega'' = \bigsqcup_{m,n\geqslant 0} \Omega''_{mn}\ , \tag{2.2}$$

et la *transformation de Pascal* est l'homéomorphisme $\mathcal{P} : \Omega' \to \Omega''$ dont le graphe est l'union des graphes des P_{mn}. (Attention: un petit nombre d'articles, notamment [AP], choisissent une autre convention et définissent la transformation de Pascal comme l'inverse de celle ci-dessus.)

Pour $p_0, p_1 > 0$ tels que $p_0 + p_1 = 1$, soit μ la mesure de probabilité sur $\{0,1\}$ qui donne aux symboles 0 et 1 les masses p_0 et p_1; la mesure produit $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$ sur Ω est appelée *mesure de Bernoulli* et sera notée $\mathcal{B}(p_0,p_1)$. Pour une telle mesure, les ouverts Ω' et Ω'' sont de masse totale, et la mesure est invariante par chacune des transformations partielles P_{mn}, donc aussi par $\mathcal{P}$.

Soit $\mathfrak{S}_\mathrm{f}\mathbb{N}$ le groupe des permutations de $\mathbb{N}$ de support fini. Ce groupe agit naturellement (par homéomorphismes) sur $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$: pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (même sans hypothèse de support fini) et tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Omega$, on peut définir

$$\sigma_*(\mathbf{x}) = \big(x_{(\sigma^{-1}(0))}, x_{(\sigma^{-1}(1))}, x_{(\sigma^{-1}(2))}, \ldots\big)\ . \tag{2.3}$$

Cette action de $\mathfrak{S}_\mathrm{f}\mathbb{N}$ préserve les mesures de Bernoulli $\mathcal{B}(p_0,p_1)$ sur Ω, et il est bien connu qu'elle est ergodique pour ces mesures [HS].

Notons $\simeq_{\mathrm{FP}}$ la relation d'équivalence sur Ω définie par cette action, c'est-à-dire dont les classes sont les orbites de l'action: $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{y}$ signifie que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ diffèrent par permutation d'un nombre fini de coordonnées. Si $\mathbf{x} = x_0x_1x_2\ldots$ et $\mathbf{y} = y_0y_1y_2\ldots$, cela revient à dire que $x_0+\cdots+x_{\ell-1} = y_0+\cdots+y_{\ell-1}$ pour tout ℓ assez grand.

Il est évident, sur la définition de la transformation de Pascal, que l'image par $\mathcal{P}$ d'un point de Ω, si elle existe, est dans la même classe. La relation d'équivalence orbitale de $\mathcal{P}$ est donc plus fine que $\simeq_{\mathrm{FP}}$. Mais elle est aussi moins fine: si $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Omega$ sont tels que $\mathbf{y} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{z}$, on peut trouver un entier $n \geqslant 0$ et des points $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n$ dans Ω tels que

$$\mathbf{x}_0 \overset{\mathcal{P}}{\longmapsto} \mathbf{x}_1 \overset{\mathcal{P}}{\longmapsto} \cdots \overset{\mathcal{P}}{\longmapsto} \mathbf{x}_{n-1} \overset{\mathcal{P}}{\longmapsto} \mathbf{x}_n \tag{2.4}$$

avec $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ou $(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. En conclusion: $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ ont les mêmes orbites sur Ω.

Coefficients binomiaux. Pour tous m, n entiers relatifs, on notera

$$\beta(m,n) = \begin{cases} \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} & \text{si } m,n \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.5}$$

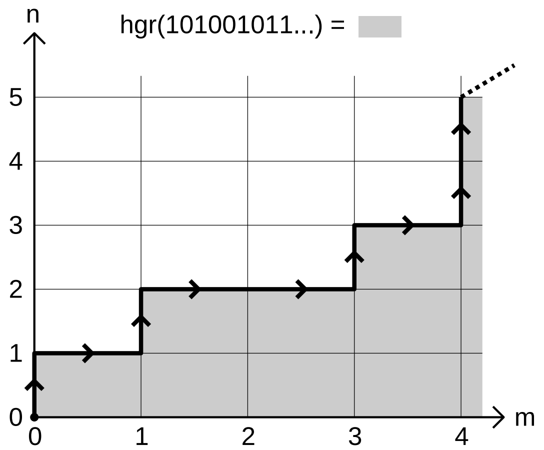
et $C_n^m = \beta(m, n-m)$. La fonction $\beta : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ ainsi définie satisfait

$$\beta(m,n) - \beta(m-1,n) - \beta(m,n-1) = \delta_{0,m}\delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.6}$$

pour tous m, n entiers relatifs.

3 Un cocycle abstrait pour la relation d'équivalence orbitale

A tout élément $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de Ω, on peut associer un chemin infini $P_0P_1P_2\ldots$ dans le quadrant positif de $\mathbb{R}^2$, en posant $P_0 = 0$, et $P_{n+1} - P_n = \binom{1}{0}$ si $x_n = 0$, et $\binom{0}{1}$ sinon. On voit facilement que $P_n = \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})$.



On peut ensuite considérer la "surface" (partie de $\mathbb{R}^2$) comprise entre l'axe des abscisses et cette courbe. Cette surface est une union (dénombrable) de carrés de la forme $[m, m+1] \times [n, n+1]$; un tel carré est au-dessous du chemin $P_0P_1P_2\ldots$ si et seulement si

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{m+n} > n. \tag{3.1}$$

On peut donc représenter la surface ci-dessus de manière algébrique, comme une fonction $\mathrm{hgr}(\mathbf{x}) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ ("hypographe de $\mathbf{x}$") définie par

$$(\mathrm{hgr}(\mathbf{x}))(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 + x_1 + \cdots + x_{m+n} > n, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \tag{3.2}$$

(fonction croissante en m et décroissante en n).

Par exemple, on a

$$(\mathrm{hgr}(101010\ldots))(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \geqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $\Omega \times_{\mathrm{FP}} \Omega = \mathrm{gr}(\simeq_{\mathrm{FP}}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{x}') \in \Omega^2 : \mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{x}'\}$ et soit $(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ un élément de cet ensemble, i.e. tel que $x_0+\cdots+x_{\ell-1} = x'_0+\cdots+x'_{\ell-1}$ pour tout ℓ assez grand. Alors les chemins associés $P_0P_1P_2\ldots$ et $P'_0P'_1P'_2\ldots$ coïncident au bout d'un certain temps ($P_\ell = P'_\ell$ pour tout ℓ assez grand), et la surface (signée) comprise entre ces deux courbes est une somme (signée) d'un nombre *fini* de carrés élémentaires $[m,m+1] \times [n,n+1]$.

Cette surface peut être représentée par la fonction $\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}') : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \mathrm{hgr}(\mathbf{x}') - \mathrm{hgr}(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Cette fonction est de support fini, donc $\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ est un élément de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)}$, le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\mathbb{N}^2$. Et de la définition ci-dessus, il découle immédiatement que la fonction

$$\mathrm{cc} : \Omega \times_{\mathrm{FP}} \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \tag{3.4}$$

est un cocycle: on a $\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}'') = \mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + \mathrm{cc}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$ pour tous $\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}''$ dans la même classe.

On note $(\mathbf{e}_{mn})_{m,n\geqslant 0}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)}$, c'est-à-dire que $\mathbf{e}_{mn}$ est la fonction $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ qui vaut 1 en (m,n) et zéro ailleurs. D'autre part, pour tous $m,n \geqslant 0$, définissons

$$\mathbf{e}'_{mn} = \mathbf{e}_{mn} - \sum_{\substack{0\leqslant m'<m \\ 0\leqslant n'<n}} \mathbf{e}_{m'n'} \tag{3.5}$$

c'est-à-dire que $\mathbf{e}'_{mn}$ est la fonction $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\mathbf{e}'_{mn}(m',n') = \begin{cases} +1 & \text{si } m' = m \text{ et } n' = n, \\ -1 & \text{si } m' < m \text{ et } n' < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Il est facile de voir que les $(\mathbf{e}'_{mn})_{m,n\geqslant 0}$ constituent également une base de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)}$, et que pour tous $m,n \geqslant 0$,

$$\mathbf{e}_{mn} = \mathbf{e}'_{mn} + \sum_{\substack{0\leqslant m'<m \\ 0\leqslant n'<n}} \beta(m-m'-1, n-n'-1)\, \mathbf{e}'_{m'n'} \tag{3.7}$$

et on a d'autre part l'identité

$$\mathbf{e}'_{m+1,n+1} - \mathbf{e}'_{m+1,n} - \mathbf{e}'_{m,n+1} + \mathbf{e}'_{m,n} = \mathbf{e}_{m+1,n+1} - \mathbf{e}_{m+1,n} - \mathbf{e}_{m,n+1}\,. \tag{3.8}$$

Soient w,w' deux éléments de $\{0,1\}^\star$ tels que $\mathrm{ab}(w) = \mathrm{ab}(w')$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, on a $w\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} w'\mathbf{x}$ donc l'expression $\mathrm{cc}(w\mathbf{x},w'\mathbf{x})$ est bien définie et, comme on le voit facilement, ne dépend pas de $\mathbf{x}$. On peut donc noter

$$\mathrm{cc}(w,w') = \mathrm{cc}(w\mathbf{x},w'\mathbf{x}) \tag{3.9}$$

leur valeur commune. On vérifie facilement que

$$\mathrm{cc}(w,w') = \mathrm{hgr}(w') - \mathrm{hgr}(w) \tag{3.10}$$

où pour tout mot $w \in \{0,1\}^\star$, la fonction $\mathrm{hgr}(w) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ est définie par

$$(\mathrm{hgr}(w))(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m+n < |w| \text{ et } w_0 + \cdots + w_{m+n} > n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.11}$$

et bien sûr cette nouvelle fonction

$$\mathrm{cc} : \{0,1\}^\star \times_{\mathrm{ab}} \{0,1\}^\star \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \tag{3.12}$$

est un cocycle (sur les mots finis), c'est-à-dire que $\mathrm{cc}(w,w'') = \mathrm{cc}(w,w') + \mathrm{cc}(w',w'')$ pour tous $w,w',w'' \in \{0,1\}^\star$ tels que $\mathrm{ab}(w) = \mathrm{ab}(w') = \mathrm{ab}(w'')$.

4 Formes équivalentes de l'équation cohomologique

Pour tout homomorphisme (de $\mathbb{Z}$-modules) $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{T}$, l'application composée

$$h \circ \mathrm{cc} : \ \Omega \times_{\mathrm{FP}} \Omega \longrightarrow \mathbb{T}$$

est un cocycle pour $\simeq_{\mathrm{FP}}$, et on peut se demander si ce cocycle est un *cobord mesurable*, c'est-à-dire s'il existe une fonction mesurable $H : \Omega \to \mathbb{T}$ et une partie E de Ω de mesure nulle, telles que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega - E \qquad \mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{x}' \implies h(\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}')) = H(\mathbf{x}') - H(\mathbf{x})\,. \tag{4.1}$$

C'est l'*équation cohomologique* (sur h). Dans cette définition, il n'est pas restrictif de demander que E soit invariant par $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$, autrement dit, que E soit saturé pour la relation $\simeq_{\mathrm{FP}}$: on peut toujours remplacer E par $(\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N})(E)$, qui est encore de mesure nulle. Comme il est très commode de supposer E invariant, je ferai toujours cette hypothèse par la suite.

On peut la récrire en une équation cohomologique sur la transformation de Pascal $\mathcal{P}$, ou sur l'action de $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$, ou relativement à certaines transformations partielles de Ω, comme suit. On notera σ_ℓ l'élément de $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$ qui échange les entiers ℓ et $\ell+1$.

Proposition 4.1. *Soit $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{T}$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules, $H : \Omega \to \mathbb{T}$ une fonction mesurable, et E une partie mesurable de Ω, de mesure nulle et invariante par $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega$ tels que $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{x}'$ et $\mathbf{x} \notin E$,

$$H(\mathbf{x}') - H(\mathbf{x}) = h(\mathrm{cc}(\mathbf{x},\mathbf{x}')). \tag{4.2}$$

(2) Pour tous $w \in \{0,1\}^\star$ et $\mathbf{x} \in \Omega$ vérifiant $w01\mathbf{x} \notin E$,

$$H(w\,10\,\mathbf{x}) - H(w\,01\,\mathbf{x}) = h(\mathbf{e}_{mn}) \tag{4.3}$$

où $(m,n) = \mathrm{ab}(w)$.

(3) Pour tout $\ell \geqslant 0$ et $\mathbf{x} = (x_0x_1x_2\ldots) \in \Omega - E$,

$$H((\sigma_\ell)_*\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}) = (x_{\ell+1} - x_\ell)\, h(\mathbf{e}_{mn}) \tag{4.4}$$

où $(m,n) = \mathrm{ab}(x_0x_1\ldots x_{\ell-1})$.

(4) Pour tous $m,n \geqslant 0$ et $\mathbf{x} \in \Omega'_{mn} - E$,

$$H(\mathbf{x}) - H(\mathcal{P}\mathbf{x}) = h(\mathbf{e}'_{mn}). \tag{4.5}$$

Démonstration. Les assertions (2) et (3) sont manifestement équivalentes.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : le point $\mathbf{y} = w01\mathbf{x}$ est hors de E, dans la même classe de $\simeq_{\mathrm{FP}}$ que $\mathbf{y}' = w10\mathbf{x}$, et $\mathrm{cc}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \mathrm{cc}(w01, w10) = \mathbf{e}_{mn}$, donc $H(\mathbf{y}') - H(\mathbf{y}) = h(\mathbf{e}_{mn})$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) : si $\mathbf{x} \in \Omega'_{mn}$, on peut écrire $\mathbf{x} = 0^m1^n10\mathbf{y}$ pour un certain $\mathbf{y} \in \Omega$, et $\mathcal{P}\mathbf{x} = 1^n0^m01\mathbf{y}$. Un calcul simple (ou un dessin) montre que $\mathrm{cc}(\mathcal{P}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathrm{cc}(1^n0^m01, 0^m1^n10) = \mathbf{e}'_{mn}$, et donc $H(\mathbf{x}) - H(\mathcal{P}\mathbf{x}) = h(\mathbf{e}'_{mn})$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Pour tout $n \geqslant 0$, soit $\simeq_{\mathrm{FP}(n)}$ la relation d'équivalence ainsi définie: deux éléments de Ω sont dans la même classe ssi ils diffèrent par une permutation des n premiers symboles. Autres définitions équivalentes:

$$\begin{aligned} x_0x_1x_2\ldots \simeq_{\mathrm{FP}(n)} x'_0x'_1x'_2\ldots &\iff \forall s \geqslant n \quad x_0 + \cdots + x_{s-1} = x'_0 + \cdots + x'_{s-1} \\ &\iff \forall s \geqslant n \quad \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{s-1}) = \mathrm{ab}(x'_0 \ldots x'_{s-1})\,. \end{aligned}$$

Notons (E_n) l'assertion selon laquelle

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega - E \qquad \mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(n)} \mathbf{x}' \implies H(\mathbf{x}') - H(\mathbf{x}) = h(\mathrm{cc}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')).$$

Les assertions (E_0) et (E_1) sont trivialement satisfaites.

Démontrons l'assertion (E_ℓ) pour un $\ell \geqslant 2$ donné, en supposant que $(E_{\ell-1})$ est vraie. Soient $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ et $\mathbf{x}' = (x'_0, x'_1, \ldots)$ deux éléments de $\Omega - E$ tels que $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(\ell)} \mathbf{x}'$. Quitte à les échanger, on peut supposer $x_{\ell-1} \geqslant x'_{\ell-1}$.

Si $x_{\ell-1} = x'_{\ell-1}$, alors $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(\ell-1)} \mathbf{x}'$, et par l'hypothèse de récurrence $(E_{\ell-1})$, on a l'égalité (4.2). Il reste à traiter le cas où $x_{\ell-1} = 1$ et $x'_{\ell-1} = 0$. Puisque le mot $x_0 \ldots x_{\ell-1}$ contient au moins un 0 et un 1, on peut trouver un mot w de longueur $\ell - 2$ tel que $\mathrm{ab}(w01) = \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{\ell-1})$. Considérons maintenant les éléments $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ de Ω définis par $\mathbf{y} = w01\mathbf{z}$ et $\mathbf{y}' = w10\mathbf{z}$, où $\mathbf{z} = x_\ell x_{\ell+1} \ldots$ Par l'hypothèse (2), on a

$$H(\mathbf{y}') - H(\mathbf{y}) = h(\mathrm{cc}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'))$$

mais d'autre part $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(\ell-1)} \mathbf{y}$ et $\mathbf{x}' \simeq_{\mathrm{FP}(\ell-1)} \mathbf{y}'$, donc par l'hypothèse de récurrence,

$$H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{x}) = h(\mathrm{cc}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad H(\mathbf{x}') - H(\mathbf{y}') = h(\mathrm{cc}(\mathbf{y}', \mathbf{x}')) \tag{4.6}$$

et la somme de ces trois égalités donne (4.2).

Les assertions (E_ℓ) sont donc vraies pour tout ℓ, ce qui termine la preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1).

(4) $\Longrightarrow$ (1) : on procède comme plus haut, en démontrant l'assertion (E_ℓ) pour un $\ell \geqslant 2$ donné, en supposant $(E_{\ell-1})$ vraie. Comme plus haut, on doit prouver (4.2) pour des $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ vérifiant $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(\ell)} \mathbf{x}'$ et $x_{\ell-1} = 1$, $x'_{\ell-1} = 0$. Puisque le mot $x_0 \ldots x_{\ell-1}$ contient au moins un 0 et un 1, il existe des entiers naturels m, n tels que $\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{\ell-1}) = (m + 1, n + 1)$. Considérons maintenant les éléments $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ de Ω définis par $\mathbf{y} = 1^n0^m01\mathbf{z}$ et $\mathbf{y}' = 0^m1^n10\mathbf{z}$, où $\mathbf{z} = x_\ell x_{\ell+1} \ldots$ Par l'hypothèse (4), on a

$$H(\mathbf{y}') - H(\mathbf{y}) = h(\mathrm{cc}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'))$$

mais d'autre part $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}(\ell-1)} \mathbf{y}$ et $\mathbf{x}' \simeq_{\mathrm{FP}(\ell-1)} \mathbf{y}'$, ce qui entraîne (4.6) par l'hypothèse de récurrence, et on en déduit l'égalité (4.2) comme précédemment. Les assertions (E_ℓ) sont donc toutes vraies, et ceci termine la preuve de (4) $\Longrightarrow$ (1). $\square$

5 Sommabilité forte et faible sur $\mathbb{N}^2$

Comme plus haut, on peut voir un élément $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de Ω comme un chemin dirigé $P_0P_1P_2 \ldots$ dans $\mathbb{N}^2$, en posant $P_n = P_n(\mathbf{x}) = \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})$. Si $\mathbf{x}$ est tiré au hasard dans Ω

selon la mesure de Bernoulli $\mathcal{B} = \mathcal{B}(p_0, p_1)$, la probabilité de visite d'un point (m, n) de $\mathbb{N}^2$ par cette marche aléatoire est donnée par

$$\gamma(m,n) = p_0^m p_1^n \beta(m,n). \tag{5.1}$$

Notons $\mathcal{V} = \mathcal{V}(p_0, p_1)$ la mesure (infinie) sur $\mathbb{N}^2$ qui donne à chaque point la masse ci-dessus.

Il sera commode d'étendre cette définition à tous les m, n entiers relatifs, conformément à la formule (2.5), et d'après (2.6) la fonction $\gamma : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie satisfait

$$\gamma(m,n) - p_0\gamma(m-1,n) - p_1\gamma(m,n-1) = \delta_{0,m}\delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.2}$$

pour tous m, n entiers relatifs.

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$, on aimerait savoir sous quelles hypothèses on peut donner un sens à la somme $f(P_0) + f(P_1) + f(P_2) + \cdots$ Bien sûr, pour cela il faut d'abord comprendre ce qui se passe quand f est réelle positive. Dans ce cas, on a l'alternative suivante:

Lemme 5.1. *Pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, l'ensemble des $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Omega$ vérifiant*

$$\sum_{n \geqslant 0} f(\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})) < \infty \tag{5.3}$$

est de probabilité 0 ou bien 1 pour la mesure de Bernoulli.

Démonstration. Notons $S(\mathbf{x})$ la somme ci-dessus, et $F \subseteq \Omega$ l'ensemble des $\mathbf{x}$ pour lesquels elle est finie. Si $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ sont deux éléments de Ω tels que $\mathbf{x} \simeq_{\mathrm{FP}} \mathbf{x}'$, alors $\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1}) = \mathrm{ab}(x'_0 \ldots x'_{n-1})$ pour n assez grand, donc les sommes $S(\mathbf{x})$ et $S(\mathbf{x}')$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, et

$$S(\mathbf{x}) < \infty \iff S(\mathbf{x}') < \infty\,.$$

L'événement F est donc invariant par le groupe symétrique infini $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$. Mais il est bien connu que l'action de $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}\mathbb{N}$ sur Ω est ergodique, pour toute mesure de Bernoulli [HS], et donc F est de probabilité 0 ou 1. $\square$

Ceci suggère la définition suivante. Disons qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *faiblement sommable*, relativement à une certaine mesure de Bernoulli $\mathcal{B} = \mathcal{B}(p_0, p_1)$, si

$$\sum_{n \geqslant 0} \left| f(\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})) \right| < \infty \tag{5.4}$$

pour $\mathcal{B}$-presque tout $(x_0, x_1, \ldots)$ dans Ω.

On note que l'espérance de cette somme est

$$\sum_{m,n \geqslant 0} \gamma(m,n) \left| f(m,n) \right| = \int_{\mathbb{N}^2} |f| \, d\mathcal{V} \tag{5.5}$$

et je dirai que f est *fortement sommable* si cette quantité est finie, c'est-à-dire si f est sommable pour la mesure $\mathcal{V} = \mathcal{V}(p_0, p_1)$. Bien sûr, cette propriété implique la faible sommabilité.

Par extension, je dirai qu'une partie A de $\mathbb{N}^2$ est faiblement ou fortement sommable, si sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ l'est. Dire que A est faiblement sommable signifie donc que, presque sûrement, la marche aléatoire $P_0P_1P_2\ldots$ ne rencontre A qu'un nombre fini de fois. Corollaire: toute fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ dont le support est faiblement sommable, est faiblement sommable.

De la loi du zero-un ci-dessus on déduit facilement que la sommabilité faible est une propriété invariante par translation, dans le sens suivant:

Lemme 5.2. *Soit* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ *une fonction, et* $f_0, f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ *les fonctions "translatées" de* f *définies par* $f_0(m,n) = f(m+1,n)$ *et* $f_1(m,n) = f(m,n+1)$*. Si une des trois fonctions* f, f_0, f_1 *est faiblement sommable, alors les deux autres le sont aussi.*

Lemme 5.3. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable pour la mesure de Bernoulli* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(p_0, p_1)$*, et pour tout* $n \geqslant 0$*, soit* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *la fonction localement constante définie par*

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathcal{B}(C_n(x))} \int_{C_n(x)} f \, d\mathcal{B} \tag{5.6}$$

où $C_n(x)$ *est le cylindre d'ordre* n *contenant* x *(i.e.* f_n *est l'espérance conditionnelle de* f *relativement à la tribu engendrée par les cylindres d'ordre* n*). Alors, la fonction maximale* $Mf : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$(Mf)(x) = \operatorname*{Sup}_{n \geqslant 0} |f_n(x)| \tag{5.7}$$

satisfait, pour tout réel $\lambda > 0$*,*

$$\mathcal{B}\big\{x \in \Omega : (Mf)(x) > \lambda\big\} \leqslant \lambda^{-1} \int_\Omega |f| \, d\mathcal{B}\,. \tag{5.8}$$

Démonstration. Fixons $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, définissons

$$(M_n f)(x) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant k \leqslant n} |f_k(x)| \tag{5.9}$$

et $E_n = \big\{x \in \Omega : (M_n f)(x) > \lambda\big\}$. Il suffira de montrer l'inégalité

$$\int_{E_n} \big(|f| - \lambda\big) d\mathcal{B} \geqslant 0. \tag{5.10}$$

Pour $n = 0$, c'est évident. Supposons maintenant que $n \geqslant 1$, et que l'inégalité est satisfaite à l'ordre $n-1$. Il suffit de prouver que

$$\int_{E_n - E_{n-1}} \big(|f| - \lambda\big) d\mathcal{B} \geqslant 0, \tag{5.11}$$

mais ceci résulte du fait que $E_n - E_{n-1}$ est une union de cylindres d'ordre n, et si C est l'un de ces cylindres, on a $|f_n(C)| > \lambda$ et donc $\int_C |f| \, d\mathcal{B} \geqslant \big|\int_C f \, d\mathcal{B}\big| > \lambda \, \mathcal{B}(C)$. □

Proposition 5.4. *Pour toute fonction* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ *faiblement sommable, il existe une partie faiblement sommable* A *de* $\mathbb{N}^2$ *telle que*

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 - A} \gamma(m,n) \, |f(m,n)| < \infty\,. \tag{5.12}$$

Autrement dit, toute fonction faiblement sommable peut s'écrire comme somme d'une fonction fortement sommable et d'une fonction dont le support est faiblement sommable.

Démonstration. On peut sans perte de généralité supposer f réelle positive.

Définissons, pour tous $m, n \geqslant 0$ et $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Omega$,

$$S(m,n,\mathbf{x}) = \sum_{\ell \geqslant 0} f((m,n) + \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{\ell-1})) \tag{5.13}$$

et
$$g(m,n) = \int_\Omega e^{-S(m,n,\mathbf{x})}\, d\mathcal{B}(\mathbf{x})\,. \tag{5.14}$$
Comme f est faiblement sommable, $S(0,0,\mathbf{x}) < \infty$ presque partout et donc $0 < g(0,0) \leqslant 1$.
De plus, les relations de récurrence
$$S(m,n,0\mathbf{x}) = f(m,n) + S(m+1,n,\mathbf{x})$$
$$S(m,n,1\mathbf{x}) = f(m,n) + S(m,n+1,\mathbf{x})$$
entraînent
$$g(m,n) = e^{-f(m,n)}\big[p_0\, g(m+1,n) + p_1\, g(m,n+1)\big] \tag{5.15}$$
et d'autre part, pour tout mot w dans $\{0,1\}^\star$,
$$S(0,0,w\mathbf{x}) \geqslant S(\mathrm{ab}(w),\mathbf{x}). \tag{5.16}$$
L'inégalité maximale (Lemme 5.3) appliquée à la fonction
$$h(\mathbf{x}) = 1 - e^{-S(0,0,\mathbf{x})} \tag{5.17}$$
s'écrit $\mathcal{B}\{Mh > \lambda\} \leqslant \lambda^{-1}\int h\, d\mathcal{B}$, pour tout $\lambda > 0$. Comme $\int h\, d\mathcal{B} = 1 - g(0,0) < 1$, on peut choisir λ tel que $\int h\, d\mathcal{B} < \lambda < 1$, et pour un tel λ, l'événement $E = \{Mh \leqslant \lambda\}$ est de probabilité strictement positive.
J'affirme que l'ensemble
$$A = \big\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : g(m,n) < 1-\lambda\big\} \tag{5.18}$$
est faiblement sommable.
En effet, pour tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Omega$ et $n \geqslant 0$, on a
$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mathcal{B}(x_0 \ldots x_{n-1}\Omega)} \int_{x_0\ldots x_{n-1}\Omega} \big[1 - e^{-S(0,0,\mathbf{x})}\big]\, d\mathcal{B}(\mathbf{x}) \\ &= \int_\Omega \big[1 - e^{-S(0,0,x_0\ldots x_{n-1}\mathbf{y})}\big]\, d\mathcal{B}(\mathbf{y}) \\ &\geqslant \int_\Omega \big[1 - e^{-S(\mathrm{ab}(x_0\ldots x_{n-1}),\mathbf{y})}\big]\, d\mathcal{B}(\mathbf{y}) = 1 - g(\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})) \end{aligned}$$
et donc, si $\mathbf{x}$ est dans E, on a $h_n(x) \leqslant \lambda$ et donc $g(\mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})) \geqslant 1-\lambda$ pour tout n, c'est-à-dire que tous les points du chemin aléatoire $P_n = \mathrm{ab}(x_0 \ldots x_{n-1})$ sont hors de A. Ainsi l'événement $\sum \mathbf{1}_A(P_n) < \infty$ est de probabilité non nulle puisqu'il contient E, et donc de probabilité un d'après le Lemme 5.1, c'est-à-dire que $\mathbf{1}_A$ est faiblement sommable.
Les nombres $g(m,n)$ sont dans l'intervalle $[0,1]$, et donc leurs moyennes
$$I(\ell) = \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, g(m,n) \tag{5.19}$$
($\ell \geqslant 0$) aussi. Pour tout $\ell \geqslant 0$, on a
$$\begin{aligned} I(\ell+1) &= \sum_{m+n=\ell+1} \gamma(m,n)\, g(m,n) \\ &= \sum_{m+n=\ell+1} \big[p_0\,\gamma(m-1,n) + p_1\,\gamma(m,n-1)\big]\, g(m,n) \\ &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\big[p_0\, g(m+1,n) + p_1\, g(m,n+1)\big] \\ &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, e^{f(m,n)} g(m,n) \end{aligned}$$

et donc
$$I(\ell+1) - I(\ell) = \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\left[e^{f(m,n)} - 1\right] g(m,n)\,.$$
Il en résulte que pour tout $\ell \geqslant 0$,
$$1 \geqslant I(\ell+1) - I(0) = \sum_{m+n\leqslant \ell} \gamma(m,n)\left[e^{f(m,n)} - 1\right] g(m,n)$$
et on obtient finalement l'inégalité
$$\sum_{m,n\geqslant 0} \gamma(m,n)\left[e^{f(m,n)} - 1\right] g(m,n) \;\leqslant\; 1. \tag{5.20}$$
Mais $e^{f(m,n)} - 1 \geqslant f(m,n)$, et $g(m,n) \geqslant 1-\lambda$ si $(m,n) \notin A$, donc
$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2 - A} \gamma(m,n)\, f(m,n) \;\leqslant\; \frac{1}{1-\lambda}$$
avec A faiblement sommable, ce qu'il fallait démontrer. □

6 Une caractérisation des cobords

Pour z_0, z_1 nombres complexes quelconques, on a
$$p_0\,|z_0|^2 + p_1\,|z_1|^2 - |p_0 z_0 + p_1 z_1|^2 = p_0 p_1\,|z_0 - z_1|^2 \geqslant 0. \tag{6.1}$$
Lemme 6.1. *Soient z_0, z_1 des nombres complexes de valeur absolue $\leqslant 1$, tels que $z = p_0 z_0 + p_1 z_1$ soit de valeur absolue $\geqslant 1 - \min(p_0,p_1)/2$. Alors z_0, z, z_1 sont non nuls, et*
$$\left|\frac{z}{|z|} - p_0\frac{z_0}{|z_0|} - p_1\frac{z_1}{|z_1|}\right| \leqslant 4p_0p_1\,|z_0 - z_1|^2\,. \tag{6.2}$$

Démonstration. Quitte à appliquer une rotation, on peut supposer z réel positif. Alors
$$1 - \min(p_0,p_1)/2 \leqslant |z| = \Re\mathrm{e}(z) = p_0\,\Re\mathrm{e}(z_0) + p_1\,\Re\mathrm{e}(z_1)$$
ce qui implique que z_0, z_1 sont de partie réelle $\geqslant 1/2$. Et donc, tout le segment $[z_0, z_1]$ est contenu dans le demi-plan $\Re\mathrm{e}(w) \geqslant 1/2$.
Notons $\mathrm{dir}(w) = w/\,|w|$ pour $w \neq 0$. Pour tout réel $R > 0$, on a le développement limité
$$\mathrm{dir}(R + x + iy) = 1 + \frac{iy}{R} - \frac{y^2 + 2ixy}{2R^2} + o(x^2 + y^2) \tag{6.3}$$
pour x, y proches de 0. En particulier, pour tout θ réel fixé, on a
$$\mathrm{dir}(R + re^{i\theta}) = 1 + r\,\frac{i\sin\theta}{R} - \frac{r^2}{2}\,\frac{\sin^2\theta + i\sin 2\theta}{R^2} + o(r^2)$$
pour $r \to 0$. Ceci montre que pour tout $R_0 > 0$, la dérivée seconde de la fonction dir est de valeur absolue $\leqslant 2/R_0^2$ en restriction à tout segment de droite contenu dans la région $|w| \geqslant R_0$.
Le segment $[z_0, z_1]$ est contenu dans la région $|w| \geqslant 1/2$ et donc
$$\left|\,\mathrm{dir}(p_0 z_0 + p_1 z_1) - p_0\,\mathrm{dir}(z_0) - p_1\,\mathrm{dir}(z_1)\right| \leqslant 4p_0p_1\,|z_0 - z_1|^2$$
comme annoncé. □

Proposition 6.2. *Soit $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ un homomorphisme de groupes, où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) Le cocycle $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord mesurable, au sens du chapitre précédent, c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable $H : \Omega \to \mathbb{S}^1$ telle que

$$\frac{H(w'\mathbf{x})}{H(w\mathbf{x})} = h(\mathrm{cc}(w, w')) \tag{6.4}$$

pour tous $w, w' \in \{0,1\}^\star$ tels que $\mathrm{ab}(w) = \mathrm{ab}(w')$ et presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$;
(2) Il existe des fonctions $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telles que

$$\frac{U_1(m,n)\,U_0(m,n+1)}{U_0(m,n)\,U_1(m+1,n)} = h(\mathbf{e}_{mn}) \tag{6.5}$$

pour tous $m, n \geqslant 0$, et la fonction $1 - p_0U_0 - p_1U_1$ est faiblement sommable.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Soit H vérifiant la condition de cobord (6.4). Définissons $F : \{0,1\}^\star \to \mathbb{C}$ la fonction donnant la moyenne de H sur les cylindres

$$F(w) = \frac{1}{\mathcal{B}(w\Omega)} \int_{w\Omega} H \, d\mathcal{B} = \int_{\Omega} H(w\mathbf{x}) \, d\mathcal{B}(\mathbf{x}) \tag{6.6}$$

et $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction

$$f(m,n) = F(0^m 1^n)\,. \tag{6.7}$$

La condition de cobord entraîne

$$F(w') = F(w)\,h(\mathrm{cc}(w,w'))$$

pour tous $w, w' \in \{0,1\}^\star$ tels que $\mathrm{ab}(w) = \mathrm{ab}(w')$. En particulier, pour tout mot w,

$$|F(w)| = |f(\mathrm{ab}\, w)|\ .$$

On a d'autre part

$$F(w) = p_0F(w0) + p_1F(w1)$$

et donc, pour tous $m, n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f(m,n) = F(0^m1^n) &= p_0F(0^m1^n0) + p_1F(0^m1^{n+1}) \\ &= p_0F(0^{m+1}1^n)\,h(\mathrm{cc}(0^{m+1}1^n, 0^m1^n0)) + p_1F(0^m1^{n+1}) \\ &= p_0\,\alpha(m,n)\,f(m+1,n) + p_1\,f(m,n+1) \end{aligned} \tag{6.8}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \alpha(m,n) = h(\mathrm{cc}(0^{m+1}1^n, 0^m1^n0)) &= h(\mathbf{e}_{m,0} + \cdots + \mathbf{e}_{m,n-1}) \\ &= g(m,0)\cdots g(m,n-1) \end{aligned} \tag{6.9}$$

avec $g(m,n) = h(\mathbf{e}_{mn})$.
Soit $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ une fonction telle que la fonction quotient f/f_1 soit réelle positive, ce qui implique bien sûr $f/f_1 = |f|$. De la relation (6.8) sur f on déduit que $|f|$ satisfait la relation analogue

$$|f(m,n)| = p_0\,U_0(m,n)\ |f(m+1,n)| + p_1\,U_1(m,n)\ |f(m,n+1)| \tag{6.10}$$

où on a posé

$$U_0(m,n) = \alpha(m,n)\,\frac{f_1(m+1,n)}{f_1(m,n)}\,, \qquad U_1(m,n) = \frac{f_1(m,n+1)}{f_1(m,n)}\,, \tag{6.11}$$

et on observe que ces fonctions $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ satisfont

$$\frac{U_1(m,n)\, U_0(m,n+1)}{U_0(m,n)\, U_1(m+1,n)} = \frac{\alpha(m,n+1)}{\alpha(m,n)} = g(m,n)$$

comme demandé.

Il reste à montrer que la fonction $\Phi = 1 - p_0 U_0 - p_1 U_1$ est faiblement sommable. Pour cela, posons $\lambda = \min(p_0, p_1)/2$. On peut trouver une fonction $H' : \Omega \to \mathbb{S}^1$ localement constante, disons d'ordre N, telle que $\|H - H'\|_1 < \lambda$. Alors, par l'inégalité maximale (Lemme 5.3), l'événement $E = \{M(H - H') \leqslant \lambda\}$ est de probabilité strictement positive.

J'affirme que l'ensemble

$$A = \big\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |f(m,n)| < 1 - \lambda\big\} \tag{6.12}$$

est faiblement sommable.

Pour le voir, définissons (comme dans le Lemme 5.3)

$$H_n(\mathbf{x}) = F(x_0 \dots x_{n-1}) = \frac{1}{\mathcal{B}(C_n(\mathbf{x}))} \int_{C_n(\mathbf{x})} H \, d\mathcal{B}$$

et les H'_n similairement, et notons que

$$|H_n(\mathbf{x})| = \big|f(\mathrm{ab}(x_0 \dots x_{n-1}))\big| \,.$$

Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ un élément aléatoire de Ω, et $P_n = \mathrm{ab}(x_0 \cdots x_{n-1})$ le chemin aléatoire associé sur $\mathbb{N}^2$. Si $\mathbf{x}$ est dans E, alors pour tout $n \geqslant N$ on a $|H'_n(\mathbf{x})| = 1$ et donc $|H_n(\mathbf{x})| \geqslant 1 - \lambda$, c'est-à-dire $P_n \notin A$. Le chemin aléatoire $P_0 P_1 P_2 \dots$ passe donc au plus N fois dans l'ensemble A. Ainsi, l'événement $\sum \mathbf{1}_A(P_n) < \infty$ est de probabilité non nulle puisqu'il contient E, ce qui montre que A est faiblement sommable.

Pour tout $\ell \geqslant 0$, posons

$$I(\ell) = \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |f(m,n)|^2 \tag{6.13}$$

Ce sont des éléments de l'intervalle $[0,1]$, et

$$\begin{aligned} I(\ell+1) &= \sum_{m+n=\ell+1} \gamma(m,n)\, |f(m,n)|^2 \\ &= \sum_{m+n=\ell+1} \big[p_0 \gamma(m-1,n) + p_1 \gamma(m,n-1)\big]\, |f(m,n)|^2 \\ &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n) \Big[p_0\, |f(m+1,n)|^2 + p_1\, |f(m,n+1)|^2\Big] \end{aligned}$$

et donc

$$I(\ell+1) - I(\ell) = \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, \Psi(m,n)$$

où Ψ est la fonction positive définie par

$$\begin{aligned} \Psi(m,n) &= p_0\, |f(m+1,n)|^2 + p_1\, |f(m,n+1)|^2 - |f(m,n)|^2 \\ &= p_0 p_1 \Big| U_0(m,n)\, |f(m+1,n)| - U_1(m,n)\, |f(m,n+1)| \Big|^2 \end{aligned} \tag{6.14}$$

en vertu des identités (6.1) et (6.10), avec

$$z_0 = U_0(m,n)\, |f(m+1,n)| \,, \; z_1 = U_1(m,n)\, |f(m,n+1)| \,, \; p_0 z_0 + p_1 z_1 = |f(m,n)| \,. \tag{6.15}$$

Il en résulte que pour tout $\ell \geqslant 0$,

$$1 \geqslant I(\ell+1) - I(0) = \sum_{m+n \leqslant \ell} \gamma(m,n)\, \Psi(m,n)$$

et finalement

$$\sum_{m,n \geqslant 0} \gamma(m,n)\, \Psi(m,n) \;\leqslant\; 1. \tag{6.16}$$

D'autre part, pour tout couple $(m,n) \notin A$, c'est-à-dire tel que $|f(m,n)| \geqslant 1-\lambda$, on peut appliquer le Lemme 6.1 aux nombres (6.15), ce qui donne $|\Phi(m,n)| \leqslant 4\Psi(m,n)$. On a donc

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 - A} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \;\leqslant\; 4$$

avec A faiblement sommable, ce qui montre que Φ est faiblement sommable, et termine la preuve de l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1) : On se donne deux fonctions $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telles que $\Phi = 1 - p_0 U_0 - p_1 U_1$ est faiblement sommable, et on doit montrer que le morphisme $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ défini par la relation (6.5) est tel que $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord. Pour cela, examinons d'abord deux cas particuliers.

Premier cas particulier: le support de Φ, qu'on notera S, est faiblement sommable. On observe que $U_0(m,n) = U_1(m,n) = 1$ pour tout $(m,n) \notin S$. Par conséquent, pour presque tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Omega$, l'expression

$$H(\mathbf{x}) = \prod_{n \geqslant 0} U_{x_n}(\mathrm{ab}\, x_0 \cdots x_{n-1}) \tag{6.17}$$

est bien définie (et de valeur absolue 1), car le produit ne contient qu'un nombre fini de termes $\neq 1$. En outre, pour tout mot $w = w_0 \cdots w_{\ell-1}$ et presque tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} H(w01\mathbf{x}) &= F(w) U_{01}(\mathrm{ab}\, w) G(w,\mathbf{x}) \\ H(w10\mathbf{x}) &= F(w) U_{10}(\mathrm{ab}\, w) G(w,\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où on a posé

$$F(w) = \prod_{0 \leqslant n < \ell} U_{w_n}(\mathrm{ab}(w_0 \cdots w_{n-1})), \quad G(w,x) = \prod_{n \geqslant 0} U_{x_n}(\mathrm{ab}(w\, 01\, x_0 \cdots x_{n-1})),$$
$$U_{01}(m,n) = U_0(m,n) U_1(m+1,n), \quad U_{10}(m,n) = U_1(m,n) U_0(m,n+1),$$

et donc la fonction (presque partout définie) $H : \Omega \to \mathbb{S}^1$ satisfait

$$\frac{H(w10\mathbf{x})}{H(w01\mathbf{x})} = (U_{10}/U_{01})(\mathrm{ab}\, w) = g(\mathrm{ab}\, w) \tag{6.18}$$

où la fonction $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ est définie comme plus haut, et d'après la Proposition 4.1, ceci montre que H est solution de l'équation cohomologique, ce qui prouve le résultat dans ce premier cas particulier.

Second cas particulier: la fonction Φ est fortement sommable. Pour tout $\ell \geqslant 0$, on peut définir la fonction localement constante $H_\ell : \Omega \to \mathbb{S}^1$ par

$$H_\ell(\mathbf{x}) = \prod_{0 \leqslant n < \ell} U_{x_n}(\mathrm{ab}\, x_0 \cdots x_{n-1}) \tag{6.19}$$

et comme plus haut, on montre que ces fonctions H_ℓ satisfont

$$|w| + 2 \leqslant \ell \implies \frac{H_\ell(w10\mathbf{x})}{H_\ell(w01\mathbf{x})} = g(\mathrm{ab}\, w) \tag{6.20}$$

pour tous ℓ, w et presque tout $\mathbf{x}$.
Pour tous m, n, ℓ entiers naturels, définissons

$$S(m,n,\ell) = \sum_{|w|=\ell} p_w \, U_w(m,n) \tag{6.21}$$

où on a posé

$$p_w = \mathcal{B}(w\Omega) = \prod_{0\leqslant j<\ell} p_{w_j}\,, \quad U_w(m,n) = \prod_{0\leqslant j<\ell} U_{w_j}\big((m,n) + \mathrm{ab}(w_0 \cdots w_{j-1})\big)\,. \tag{6.22}$$

On a donc les relations de récurrence

$$\begin{aligned} S(m,n,0) &= 1 \\ S(m,n,\ell+1) &= p_0 U_0(m,n)\, S(m+1,n,\ell) + p_1 U_1(m,n)\, S(m,n+1,\ell) \end{aligned}$$

pour tous m, n, ℓ entiers naturels, d'où

$$\begin{aligned} 1 - S(m,n,\ell+1) = \Phi(m,n) &+ p_0 U_0(m,n)\big[1 - S(m+1,n,\ell)\big] \\ &+ p_1 U_1(m,n)\big[1 - S(m,n+1,\ell)\big] \end{aligned}$$

et

$$\big|1 - S(m,n,\ell+1)\big| \;\leqslant\; \big|\Phi(m,n)\big| + p_0 \big|1 - S(m+1,n,\ell)\big| + p_1 \big|1 - S(m,n+1,\ell)\big| \;.$$

Pour tous ℓ, q entiers naturels, notons $T(\ell,q)$ la valeur moyenne de $|1 - S(\mathrm{ab}\, w, q)|$ sur les mots w de longueur ℓ, c'est-à-dire

$$T(\ell,q) = \sum_{|w|=\ell} p_w \, |1 - S(\mathrm{ab}\, w, q)| = \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |1 - S(m,n,q)| \tag{6.23}$$

Alors, pour tous ℓ, q entiers naturels,

$$\begin{aligned} T(\ell,q+1) &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |1 - S(m,n,q+1)| \\ &\leqslant \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n) \Big[|\Phi(m,n)| + p_0\, |1 - S(m+1,n,q)| + p_1\, |1 - S(m,n+1,q)|\Big] \\ &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \\ &\qquad\qquad + \sum_{m+n=\ell+1} \Big[p_0 \gamma(m-1,n) + p_1 \gamma(m,n-1)\Big]\, |1 - S(m,n,q)| \\ &= \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \;+\; \sum_{m+n=\ell+1} \gamma(m,n)\, |1 - S(m,n,q)| \\ &= T(\ell+1,q) \;+\; \sum_{m+n=\ell} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$T(\ell,q) \leqslant \sum_{\ell\leqslant m+n<\ell+q} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \;. \tag{6.24}$$

Les produits scalaires des fonctions H_ℓ sont donnés par

$$\begin{aligned}\langle H_\ell | H_{\ell+q}\rangle &= \int_\Omega H_\ell^*(\mathbf{x}) H_{\ell+q}(\mathbf{x})\, d\mathcal{B}(\mathbf{x}) \\ &= \int_\Omega U_{x_\ell \cdots x_{\ell+q-1}}(\mathrm{ab}\, x_0 \cdots x_{\ell-1})\, d\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \sum_{|w|=\ell} p_w S(\mathrm{ab}\, w, q)\end{aligned}$$

d'où

$$1 - \langle H_\ell | H_{\ell+q}\rangle = \sum_{|w|=\ell} p_w (1 - S(\mathrm{ab}\, w, q))$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |H_\ell - H_{\ell+q}|^2 \, d\mathcal{B} = 1 - \Re\mathrm{e}\langle H_\ell|H_{\ell+q}\rangle &\leqslant |1 - \langle H_\ell|H_{\ell+q}\rangle| \\ &\leqslant \sum_{|w|=\ell} p_w\, |1 - S(\mathrm{ab}\, w, q)| = T(\ell, q) \\ &\leqslant \sum_{m+n\geqslant \ell} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| \ .\end{aligned}$$

Cette dernière expression est finie, et tend vers 0 quand $\ell \to \infty$, ce qui montre que les fonctions H_ℓ forment une suite de Cauchy en norme L^2. Elles ont donc une certaine limite $H : \Omega \to \mathbb{S}^1$ en norme L^2, et en faisant tendre $\ell \to \infty$ dans (6.20), on voit que cette fonction H satisfait l'équation cohomologique (6.18), et ceci termine la preuve du second cas particulier.

Le cas général: la fonction Φ est faiblement sommable, donc il existe une partie A de $\mathbb{N}^2$, faiblement sommable, telle que

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2 - A} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)| < \infty\, .$$

On peut alors écrire $U_0 = U_0' U_0''$ et $U_1 = U_1' U_1''$ pour certaines fonctions $U_0', U_0'', U_1', U_1'' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telles que $U_0'(m,n) = U_1'(m,n) = 1$ si $(m,n) \notin A$, et $U_0''(m,n) = U_1''(m,n) = 1$ si $(m,n) \in A$. Les fonctions U_0', U_1' sont telles que $\Phi' = 1 - p_0 U_0' - p_1 U_1'$ est de support faiblement sommable (inclus dans A), et donc, par le premier cas particulier examiné ci-dessus, il existe une fonction mesurable $H' : \Omega \to \mathbb{S}^1$ vérifiant l'identité

$$\frac{H'(w10\mathbf{x})}{H'(w01\mathbf{x})} = (U_{10}'/U_{01}')(\mathrm{ab}\, w).$$

D'autre part, les fonctions U_0'', U_1'' sont telles que $\Phi'' = 1 - p_0 U_0'' - p_1 U_1''$ est fortement sommable, car

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \gamma(m,n)\, \left|\Phi''(m,n)\right| \;=\; \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2 - A} \gamma(m,n)\, |\Phi(m,n)|$$

et donc, par le second cas particulier examiné ci-dessus, il existe une fonction mesurable $H'' : \Omega \to \mathbb{S}^1$ vérifiant l'identité

$$\frac{H''(w10\mathbf{x})}{H''(w01\mathbf{x})} = (U_{10}''/U_{01}'')(\mathrm{ab}\, w),$$

et en multipliant cette identité avec celle analogue pour H', on voit que la fonction produit $H = H'H''$ est solution de l'équation cohomologique (6.18).

Ceci termine la preuve de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1). $\square$

7 Deux résultats partiels

Proposition 7.1. *Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ une fonction, et $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ l'homomorphisme canoniquement associé. On suppose que le cocycle $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord. Alors la fonction $1 - \Re(g)$ est faiblement sommable (ou, ce qui revient au même, la fonction $1 - g$ est de carré faiblement sommable), c'est-à-dire que pour $\mathcal{B}$-presque tout $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ dans Ω, on a*

$$\sum_{n \geqslant 0} (1 - \Re\mathrm{e}\, g)(\mathrm{ab}\, x_0 \cdots x_{n-1}) \;<\; \infty \tag{7.1}$$

ce qui entraîne en particulier

$$\lim_{n \to \infty} g(\mathrm{ab}\, x_0 \cdots x_{n-1}) \;=\; 1. \tag{7.2}$$

Démonstration. Par la Proposition 6.2, il existe des fonctions $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telles que $1 - p_0 U_0 - p_1 U_1$ est faiblement sommable, et

$$\frac{U_1(m,n)\, U_0(m,n+1)}{U_0(m,n)\, U_1(m+1,n)} = g(m,n)$$

pour tous $m, n \geqslant 0$. Soient $\theta_0, \theta_1 : \mathbb{N}^2 \to [-\pi, \pi]$ des fonctions telles que $U_0 = \exp(i\theta_0)$ et $U_1 = \exp(i\theta_1)$, et soit $\theta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\theta(m,n) = \theta_1(m,n) + \theta_0(m,n+1) - \theta_0(m,n) - \theta_1(m+1,n) \tag{7.3}$$

si bien que $g = \exp(i\theta)$. De l'identité

$$\Re\mathrm{e}(1 - p_0 U_0 - p_1 U_1) = p_0(1 - \Re\mathrm{e}\, U_0) + p_1(1 - \Re\mathrm{e}\, U_1)$$

on déduit que les fonctions $1 - \Re\mathrm{e}\, U_0$ et $1 - \Re\mathrm{e}\, U_1$ sont faiblement sommables, ce qui équivaut à dire que les fonctions θ_0 et θ_1 sont de carré faiblement sommable.

Il en résulte que la fonction θ est de carré faiblement sommable, comme somme de quatre fonctions de carré faiblement sommable (voir le Lemme 5.2); et ceci entraîne (par la majoration $1 - \Re\mathrm{e}\, g \leqslant \theta^2/2$) que $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ est faiblement sommable. ☐

La Proposition ci-dessus affirme que la sommabilité faible de $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ est une condition *nécessaire* pour que l'équation cohomologique ait une solution. Selon toute vraisemblance, ce n'est pas une condition suffisante en général; il devrait être possible de montrer, par exemple, que pour

$$g(m,n) = \exp\Big(\frac{2\pi i}{1+m+n}\Big)$$

l'équation cohomologique n'a pas de solution, bien que $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ soit fortement sommable.

Dans ce qui suit, je donnerai une condition *suffisante* pour que l'équation cohomologique ait une solution. Avant ça, j'aurai besoin de quelques lemmes.

Lemme 7.2. *Soient $u, v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que*

$$\sum_{t \in \mathbb{N}^2} \frac{|u(t)|}{\sqrt{\gamma(t)}} < \infty\,, \quad \sum_{x \in \mathbb{N}^2} |v(x)|^2\, \gamma(x) < \infty\,.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\sum_{t \in \mathbb{N}^2} |u(t) v(t+x)| < \infty$$

et la fonction $w : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$w(x) = \sum_{t \in \mathbb{N}^2} u(t)v(t+x)$$

satisfait

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^2} |w(x)|^2 \gamma(x) < \infty \,.$$

Démonstration. Posons $A = \sum_t |u(t)| / \sqrt{\gamma(t)}$ et $B = \sum_x |v(x)|^2 \gamma(x)$. L'identité classique de Vandermonde

$$C^n_{r+s} = \sum_{a+b=n} C^a_r C^b_s$$

montre que les coefficients binomiaux sont sur-multiplicatifs

$$\beta(m+m', n+n') \geqslant \beta(m,m')\beta(n,n') \tag{7.4}$$

et donc les $\gamma(m,n)$ aussi, i.e.

$$\gamma(t+x) \geqslant \gamma(t)\gamma(x) \tag{7.5}$$

pour tous $t, x \in \mathbb{N}^2$. Par conséquent, pour tout t dans $\mathbb{N}^2$ on a

$$\sum_{s \in \mathbb{N}^2} |v(s)|^2 \gamma(s) \geqslant \sum_{x \in \mathbb{N}^2} |v(t+x)|^2 \gamma(t+x) \geqslant \sum_{x \in \mathbb{N}^2} |v(t+x)|^2 \gamma(t)\gamma(x)$$

et donc

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^2} |v(t+x)|^2 \gamma(x) \leqslant B/\gamma(t) \tag{7.6}$$

et en particulier

$$|v(t+x)| \leqslant \sqrt{\frac{B}{\gamma(t)\gamma(x)}}$$

pour tous t et x. De cette dernière inégalité on déduit que

$$\sum_{t \in \mathbb{N}^2} |u(t)v(t+x)| \leqslant \sum_{t \in \mathbb{N}^2} \frac{|u(t)|}{\sqrt{\gamma(t)}} \sqrt{\frac{B}{\gamma(x)}} = A\sqrt{\frac{B}{\gamma(x)}}$$

ce qui établit la première assertion de l'énoncé, et garantit que la fonction w est bien définie. Montrons maintenant que cette fonction w est dans $L^2(\mathcal{V})$, et de norme au plus $A\sqrt{B}$. Il suffit pour cela de montrer que pour toute fonction $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ de support fini et de norme $\leqslant 1$, c'est-à-dire

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^2} |\alpha(x)|^2 \gamma(x) \leqslant 1, \tag{7.7}$$

on a l'inégalité

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^2} \alpha(x)w(x)\gamma(x) \leqslant A\sqrt{B} \,.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \operatorname{supp}(\alpha)} \alpha(x)w(x)\gamma(x) &= \sum_{x \in \operatorname{supp}(\alpha)} \alpha(x)\gamma(x) \sum_{t \in \mathbb{N}^2} u(t)v(t+x) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{N}^2} u(t) \sum_{x \in \operatorname{supp}(\alpha)} \alpha(x)\gamma(x)v(t+x)\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec (7.6) et (7.7), donne

$$\left| \sum_{x \in \operatorname{supp}(\alpha)} \alpha(x)\gamma(x)v(t+x) \right| \leqslant \sqrt{\frac{B}{\gamma(t)}}$$

et donc

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}(\alpha)} \alpha(x)w(x)\gamma(x) \leqslant \sum_{t \in \mathbb{N}^2} \frac{|u(t)|}{\sqrt{\gamma(t)}} \sqrt{B} = A\sqrt{B}\,,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 7.3. *La fonction* $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$u(m,n) \;=\; \gamma(m,n) - 3\gamma(m-1,n) + 3\gamma(m-2,n) - \gamma(m-3,n) \tag{7.8}$$

vérifie

$$\sum_{m,n \geqslant 0} \frac{|u(m,n)|}{\sqrt{\gamma(m,n)}} \;<\; \infty\,. \tag{7.9}$$

Démonstration. Pour tous $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 3$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{u(m,n)}{\gamma(m,n)} &= 1 - \frac{3}{p_0}\,\frac{m}{m+n} + \frac{3}{p_0^2}\,\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} \\
&\quad - \frac{1}{p_0^3}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= \frac{E(m,n)}{p_0^3(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
E(m,n) = p_0^3&(m+n)(m+n-1)(m+n-2) - 3p_0^2 m(m+n-1)(m+n-2) \\
&+ 3p_0 m(m-1)(m+n-2) - m(m-1)(m-2)\,.
\end{aligned}$$

Avec la nouvelle variable $t = p_0 n - p_1 m$, on peut écrire $m+n = (m+t)/p_0$ et

$$\begin{aligned}
E(m,n) &= (m+t)(m+t-p_0)(m+t-2p_0) - 3m(m+t-p_0)(m+t-2p_0) \\
&\quad + 3m(m-1)(m+t-2p_0) - m(m-1)(m-2) \\
&= 2p_1(2p_0-1)m + t(t^2 - 3p_0 t + 2p_0^2 - 3p_1 m)\,.
\end{aligned}$$

Il existe donc des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$|E(m,n)| \leqslant C_1\, n^{5/3}, \qquad \frac{|u(m,n)|}{\gamma(m,n)} \leqslant C_2\, n^{-4/3}, \tag{7.10}$$

pour tous $m \geqslant 0, n \geqslant 3$ tels que $|t/p_1| < n^{5/9}$, c'est-à-dire

$$|m - np_0/p_1| < n^{5/9}. \tag{7.11}$$

Pour tout entier naturel n, notons $I(n)$ l'ensemble des entiers naturels m vérifiant l'inégalité (7.11), ensemble de cardinal $\leqslant 2n^{5/9}$. Si $n \geqslant 3$ on a

$$\sum_{m \in I(n)} \frac{|u(m,n)|}{\sqrt{\gamma(m,n)}} \leqslant C_2\, n^{-4/3} \sum_{m \in I(n)} \sqrt{\gamma(m,n)}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Big[\sum_{m\in I(n)} \sqrt{\gamma(m,n)}\Big]^2 \leqslant \Big[\sum_{m\in I(n)} 1\Big]\Big[\sum_{m\in I(n)} \gamma(m,n)\Big] \leqslant 2n^{5/9} \sum_{m\geqslant 0} \gamma(m,n) = 2n^{5/9}/p_1$$

donc

$$\sum_{m\in I(n)} \frac{|u(m,n)|}{\sqrt{\gamma(m,n)}} \leqslant C_2\sqrt{2/p_1}\, n^{-19/18}$$

et finalement

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\in I(n)} \frac{|u(m,n)|}{\sqrt{\gamma(m,n)}} < \infty\,.$$

D'autre part, les nombres $\gamma(m,n)$ sont très petits quand l'inégalité (7.11) n'est pas satisfaite; en utilisant la majoration grossière $|u(m,n)| \leqslant (1+1/p_0)^3\gamma(m,n)$ et des arguments classiques de grandes déviations pour borner les $\gamma(m,n)$, on montre sans peine que

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\notin I(n)} \frac{|u(m,n)|}{\sqrt{\gamma(m,n)}} < \infty$$

et ceci termine la preuve du Lemme. □

Proposition 7.4. *Soit $V : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ une fonction telle que $1-\Re\mathrm{e}\, V$ est faiblement sommable (ou, ce qui revient au même, $1-V$ est de carré faiblement sommable), et soient $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ et $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ la fonction et le morphisme définis par*

$$h(\mathbf{e}_{mn}) = g(m,n) = \frac{V(m,n)\; V(m+2,n)^3}{V(m+1,n)^3\; V(m+3,n)}\,. \tag{7.12}$$

Alors le cocycle $h\circ \mathrm{cc}$ est un cobord.

Démonstration. On examinera d'abord deux cas particuliers.
Premier cas particulier: le support de $1-\Re\mathrm{e}\, V$, c'est-à-dire l'ensemble $\{V\neq 1\}$, est faiblement sommable. Définissons les fonctions $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ par

$$U_0(m,n) = 1, \qquad U_1(m,n) = \frac{V(m,n)\, V(m+2,n)}{V(m+1,n)^2}\,. \tag{7.13}$$

On a alors

$$\frac{U_1(m,n)\, U_0(m,n+1)}{U_0(m,n)\, U_1(m+1,n)} = \frac{V(m,n)\; V(m+2,n)^3}{V(m+1,n)^3\; V(m+3,n)} = g(m,n) = h(\mathbf{e}_{mn})$$

et la fonction $\Phi = 1 - p_0U_0 - p_1U_1 = p_1(1-U_1)$ est de support faiblement sommable. Par la Proposition 6.2, cela entraîne que $h\circ\mathrm{cc}$ est un cobord, et ceci prouve la Proposition dans ce premier cas particulier.
Second cas particulier: la fonction $1-\Re\mathrm{e}\, V$ est fortement sommable. Soit $v : \mathbb{N}^2 \to [-\pi,\pi]$ une fonction telle que $V = \exp(iv)$; alors v est de carré fortement sommable.
Soit $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie dans le Lemme 7.3. L'identité (5.2) sur γ entraîne que u satisfait l'identité analogue

$$\begin{aligned} u(m,n) - p_0u(m-1,n) - p_1u(m,n-1) &\\ = \delta_{0,m}\,\delta_{0,n} - 3\delta_{0,m-1}\,\delta_{0,n} + 3\delta_{0,m-2}\,\delta_{0,n} - \delta_{0,m-3}\,\delta_{0,n} &\\ = \delta_{0,n}\,(\delta_{0,m} - 3\delta_{1,m} + 3\delta_{2,m} - \delta_{3,m})\,. & \end{aligned}$$

D'après les Lemmes 7.2 et 7.3, on peut définir une fonction $w : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule

$$w(m,n) = \sum_{a,b \geqslant 0} u(a,b)\, v(a+m, b+n) \tag{7.14}$$

(les sommes sont absolument convergentes), et cette fonction w est de carré fortement sommable. Pour tous m,n entiers naturels, on a

$$\begin{aligned} w(m+1,n) &= \sum_{a,b \geqslant 0} u(a,b)\, v(a+m+1, b+n) \\ &= \sum_{a,b \geqslant 0} u(a-1,b)\, v(a+m, b+n) \end{aligned}$$

et similairement

$$w(m,n+1) = \sum_{a,b \geqslant 0} u(a,b-1)\, v(a+m, b+n)$$

et donc

$$\begin{aligned} &w(m,n) - p_0 w(m+1,n) - p_1 w(m,n+1) \\ &\quad = \sum_{a,b \geqslant 0} v(a+m,b+n) \big[u(a,b) - p_0 u(a-1,b) - p_1 u(a,b-1)\big] \\ &\quad = \sum_{a,b \geqslant 0} v(a+m,b+n)\, \delta_{0,b}\, (\delta_{0,a} - 3\delta_{1,a} + 3\delta_{2,a} - \delta_{3,a}) \\ &\quad = v(m,n) - 3v(m+1,n) + 3v(m+2,n) - v(m+3,n)\,. \end{aligned}$$

Soient $U_0, U_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ les fonctions définies par $U_0 = \exp(-ip_1 w)$ et $U_1 = \exp(ip_0 w)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{U_1(m,n)\, U_0(m,n+1)}{U_0(m,n)\, U_1(m+1,n)} &= \exp i \big[w(m,n) - p_0 w(m+1,n) - p_1 w(m,n+1)\big] \\ &= \exp i \big[v(m,n) - 3v(m+1,n) + 3v(m+2,n) - v(m+3,n)\big] \\ &= \frac{V(m,n)\; V(m+2,n)^3}{V(m+1,n)^3\; V(m+3,n)} = g(m,n) = h(\mathbf{e}_{mn})\,. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout t réel on a l'inégalité

$$\big|1 - p_0 \exp(-ip_1 t) - p_1 \exp(ip_0 t)\big| \;\leqslant\; p_0 p_1 t^2/2$$

et donc la fonction $\Phi = 1 - p_0 U_0 - p_1 U_1$ vérifie $|\Phi| \leqslant p_0 p_1 w^2/2$, ce qui montre que Φ est fortement sommable. Par la Proposition 6.2, cela entraîne que $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord, ce qui termine la preuve du second cas particulier.

Le cas général: la fonction $1 - \Re\mathrm{e}\, V$ est faiblement sommable, donc on peut trouver des fonctions $V', V'' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telles que $V = V'V''$, avec $\{V' \neq 1\}$ faiblement sommable et $1 - \Re\mathrm{e}\, V''$ fortement sommable. En appliquant les résultats particuliers ci-dessus à V' et V'' et en combinant les solutions, comme dans la preuve de la Proposition 6.2, on déduit que $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord, ce qui termine la preuve. □

8 Exactitude des cocycles décomposables

Disons qu'un homomorphisme $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{T}$ est *décomposable* s'il s'annule sur les vecteurs de la forme (3.8). Si $g, g' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{T}$ sont les fonctions associées à h par les formules $g(m,n) = h(\mathbf{e}_{mn})$ et $g'(m,n) = h(\mathbf{e}'_{mn})$, cela revient à dire que g satisfait

$$\forall m,n \geqslant 0 \quad g(m+1,n+1) = g(m+1,n) + g(m,n+1) \tag{8.1}$$

ou (ce qui est équivalent) que g' satisfait

$$\forall m,n \geqslant 0 \quad g'(m,n) + g'(m+1,n+1) = g'(m+1,n) + g'(m,n+1)\,. \tag{8.2}$$

Cette dernière condition revient à dire qu'il existe des fonctions $\theta_0, \theta_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{T}$ telles que

$$\forall m,n \geqslant 0 \quad g'(m,n) = \theta_0(m) + \theta_1(n) \tag{8.3}$$

ce qui explique la terminologie employée.

En particulier, si la fonction g' est constante, c'est-à-dire si h prend la même valeur sur tous les vecteurs $\mathbf{e}'_{mn}$, alors h est décomposable.

Proposition 8.1. *Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ une fonction telle que*

$$g(m+1,n+1) = g(m+1,n) \cdot g(m,n+1) \tag{8.4}$$

pour tous $m,n \geqslant 0$, et $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ l'homomorphisme canoniquement associé. Alors, le cocycle $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord si et seulement si la fonction $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ est faiblement sommable.

Démonstration. On sait, par la Proposition 7.1, que si $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord, alors $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ est faiblement sommable.

Réciproquement, supposons $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ faiblement sommable. Par le Lemme 8.2 ci-dessous, appliqué trois fois, il existe une fonction $g_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telle que

$$g_3(m+1,n+1) = g_3(m+1,n) \cdot g_3(m,n+1)\,, \quad g_3(m+3,n) = g(m,n)$$

pour tous m,n entiers naturels. La fonction $V : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ définie par

$$V(m,n) = \frac{1}{g_3(m,n+3)} \tag{8.5}$$

satisfait, pour tous m,n entiers naturels,

$$\frac{V(m,n)}{V(m+1,n)} = \frac{g_3(m+1,n+3)}{g_3(m,n+3)} = g_3(m+1,n+2)$$

et donc

$$\frac{V(m,n)\,V(m+2,n)}{V(m+1,n)^2} = \frac{g_3(m+1,n+2)}{g_3(m+2,n+2)} = \frac{1}{g_3(m+2,n+1)}$$

et finalement

$$\frac{V(m,n)\;V(m+2,n)^3}{V(m+1,n)^3\;V(m+3,n)} = \frac{g_3(m+3,n+1)}{g_3(m+2,n+1)} = g_3(m+3,n) = g(m,n) = h(\mathbf{e}_{mn})$$

et par le Lemme 5.2, les fonctions $1 - \Re\mathrm{e}\, g_3$ et $1 - \Re\mathrm{e}\, V$ sont faiblement sommables. Il en résulte, par la Proposition 7.4, que $h \circ \mathrm{cc}$ est un cobord. □

Lemme 8.2. *Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ une fonction telle que*

$$g(m+1,n+1) = g(m+1,n) \cdot g(m,n+1)$$

pour tous $m,n \geqslant 0$. Alors, il existe une fonction $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ telle que

$$g_1(m+1,n+1) = g_1(m+1,n) \cdot g_1(m,n+1)\,, \quad g_1(m+1,n) = g(m,n)$$

pour tous $m,n \geqslant 0$.

Démonstration. La fonction g_1 définie par

$$g_1(m,n) = \begin{cases} g(m-1,n) & \text{si } m \geqslant 1, \\ g(0,n)/g(0,n-1) & \text{si } m = 0 \text{ et } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } m = n = 0, \end{cases}$$

vérifie les propriétés demandées. □

9 Retour à la transformation de Pascal

Les fonctions propres de la transformation de Pascal sont les fonctions $H : \Omega \to \mathbb{C}$ de carré sommable, non p.p. nulles, telles que $H(\mathcal{P}\mathbf{x}) = \lambda H(\mathbf{x})$ pour $\mathcal{B}$-presque tout $\mathbf{x}$. On doit avoir $|\lambda| = 1$ puisque l'opérateur de Koopman est unitaire, et la fonction $|H|$ est $\mathcal{P}$-invariante, donc p.p. constante puisque $\mathcal{P}$ est ergodique. On peut donc supposer $|H| = 1$ sans perte de généralité.

Le problème est donc, pour un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ donné, de déterminer s'il existe une fonction $H : \Omega \to \mathbb{S}^1$ telle que

$$\frac{H(\mathcal{P}\mathbf{x})}{H(\mathbf{x})} = \lambda \tag{9.1}$$

$\mathcal{B}$-presque partout. Par la Proposition 4.1, cela équivaut à l'équation cohomologique

$$\frac{H(\mathbf{x}')}{H(\mathbf{x})} = h\big[\mathrm{cc}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\big]$$

dans le cas particulier où $h : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^2)} \to \mathbb{S}^1$ est l'homomorphisme défini par

$$h(\mathbf{e}'_{mn}) = 1/\lambda \tag{9.2}$$

pour tous $m, n \geqslant 0$. C'est donc un homomorphisme “décomposable” dans le sens du chapitre précédent, et par la Proposition 8.1, l'équation cohomologique a une solution si et seulement si $1 - \Re\mathrm{e}\, g$ est faiblement sommable, où $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{S}^1$ est la fonction définie par $g(m, n) = h(\mathbf{e}_{mn})$. Cette fonction vaut

$$h(\mathbf{e}_{mn}) = g(m, n) = \lambda^{-\beta(m,n)} \tag{9.3}$$

ce qui peut se montrer de différentes manières. La plus simple consiste à utiliser la formule (8.4), qui exprime la décomposabilité de h, et de noter que si $\min(m, n) = 0$ alors $\mathbf{e}_{mn} = \mathbf{e}'_{mn}$ et donc $g(m, n) = 1/\lambda$. On en déduit la formule ci-dessus, par récurrence sur $m + n$.

Une autre preuve de (9.3) consiste à utiliser la formule de changement de base (3.7), qui donne $g(m, n) = \lambda^{-E}$ avec

$$\begin{aligned} E &= 1 + \sum_{0\leqslant m'<m} \ \sum_{0\leqslant n'<n} \beta(m - m' - 1, n - n' - 1) \\ &= 1 + \sum_{0\leqslant m'<m} \ \sum_{0\leqslant n'<n} \beta(m', n') \ = 1 + \sum_{0\leqslant m'<m} \beta(m' + 1, n - 1) \\ &= 1 + \sum_{1\leqslant m'\leqslant m} \beta(m', n - 1) \ = \beta(m, n)\,. \end{aligned}$$

Si $\lambda = \exp(2\pi i t)$ alors

$$1 - \Re\mathrm{e}\, g(m, n) = 1 - \cos(2\pi t\, \beta(m, n)) = 2\sin^2(\pi t\, \beta(m, n)) \tag{9.4}$$

et on a donc le

Théorème 9.1. *Pour t réel quelconque, $\exp(2\pi i t)$ est valeur propre de $\mathcal{P}$ si et seulement si la fonction (9.4) est faiblement sommable, c'est-à-dire que*

$$\sum_{n\geqslant 0} \sin^2(\pi t \cdot C_n^{x_0+\cdots+x_{n-1}}) \ < \ \infty \tag{9.5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{n\geqslant 0} \big\| \, t \cdot C_n^{x_0+\cdots+x_{n-1}} \big\|^2 \ < \ \infty \tag{9.6}$$

pour $\mathcal{B}$-presque tout $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ dans Ω, où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

De ce théorème on déduit immédiatement une condition nécessaire, et une condition suffisante, pour que $\exp(2\pi it)$ soit valeur propre.

Une condition évidemment nécessaire, déjà mentionnée dans la Proposition 7.1, est que le terme général de la série tende vers zéro:

Corollaire 9.2. *Si t est un nombre réel tel que* $\exp(2\pi it)$ *est valeur propre de* $\mathcal{P}$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| t \cdot C_n^{x_0+\cdots+x_{n-1}} \right\| = 0 \tag{9.7}$$

pour $\mathcal{B}$*-presque tout* $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ *dans* Ω.

Une condition suffisante est que la fonction (9.4) soit fortement sommable:

Corollaire 9.3. *Si t est un nombre réel tel que*

$$\sum_{m,n\geqslant 0} p_0^m p_1^n \beta(m,n)\ \sin^2(\pi t\cdot\beta(m,n)) < \infty \tag{9.8}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{m,n\geqslant 0} p_0^m p_1^n \beta(m,n)\ \| t\cdot\beta(m,n)\|^2 < \infty \tag{9.9}$$

alors $\exp(2\pi it)$ *est valeur propre de* $\mathcal{P}$.

Remarque. Le Corollaire 9.2 est un résultat connu depuis bien longtemps, mais non publié; c'est la "condition nécessaire" dont je parlais dans l'Introduction. Je n'ai pas réussi à en retrouver l'origine. Ce résultat est mentionné dans [PS] mais très succintement, et sans démonstration ni référence. Selon Karl Petersen (communication privée), "the statement was generally believed but not published anywhere, so could not be claimed to be new or attributed to anyone (except maybe Vershik), so it was 'folklore' ". La condition diophantienne (nécessaire) ainsi obtenue paraît difficile à étudier, voir [AP, BBK].

Références

[AP] T. M. Adams & K. E. Petersen, *Binomial-coefficient multiples of irrationals*, Monats. Math. **125** (1998), 269–278

[BBK] D. Berend, M. D. Boshernitzan & G. Kolesnik, *Irrational dilations of Pascal's triangle*, Mathematika **48** (2001), 159–168

[BDM] X. Bressaud, F. Durand & A. Maass, *Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical Cantor systems*, J. London. Math. Soc. **72** (2005), 799–816

[HIK] A. Hajian, Y. Ito & S. Kakutani, *Invariant measures and orbits of dissipative transformations*, Adv. in Math. **9** (1972), 52–65

[HS] E. Hewitt & L. J. Savage, *Symmetric measures on cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 470–501

[Hos] B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **6** (1986), 529–540

[Kak] S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval* $[0,1]$, Proceedings of the Oberwolfach conference on measure theory (1975), Lecture Notes in Math. **541**, Springer (1976)

[Liv] A. N. Livshitz, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations*, Math. Notes **44** (1988), 920–925

[PS] K. E. Petersen & K. Schmidt, *Symmetric Gibbs measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2775–2811

[Sol] B. Solomyak, *On the spectral theory of adic transformations*, Adv. Soviet Math. **9** (1992), 217–230

[V81] A. M. Vershik, *Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **259** (1981), 526–529, traduction anglaise dans: Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 97–100

[V11] A. M. Vershik, *The Pascal automorphism has a continuous spectrum*, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya **45** (2011), 16–33, traduction anglaise dans: Functional Analysis and Its Applications **45** (2011), 173–186

[V15] A. M. Vershik, *Several remarks on Pascal automorphism and infinite ergodic theory*, Armenian Journal of Mathematics **7** (2015), 85–96

[VL] A. M. Vershik & A. N. Livshitz, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics*, Adv. Soviet Math. **9** (1992), 185–204