Une propriété de concavité pour l'équation de la chaleur en dimension un

Thierry Bousch*

7 septembre 2025

Abstract

It is proved that, if μ is a positive measure on $\mathbb{R}$ of positive type, the function $G\mu :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ defined by

$$(G\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\mu(x)$$

satisfies the 'J-concavity' property, a collection of differential inequalities of order two.

Consequently, for the solutions of the heat equation $\partial u/\partial t = \kappa\, \partial^2 u/\partial x^2$ on $\mathbb{R}$ with positive initial condition $u_0(x) = u(x,0)$, the function $\mathcal{E} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ defined by

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{8\pi\kappa t}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{8\kappa t}\Big)\, u_0(x) u_0(y)\, dx\, dy$$

satisfies the same property; and there is a similar result for the heat equation on $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

From this follows a new proof of the theorem of Cohn and Kumar asserting the universal optimality of the lattice $\mathbb{Z}$ in dimension one.

Résumé

On démontre que, si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ de type positif, la fonction $G\mu :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$(G\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\mu(x)$$

vérifie la propriété de 'J-concavité', un ensemble d'inégalités différentielles du second ordre.

Par conséquent, pour les solutions de l'équation de la chaleur $\partial u/\partial t = \kappa\, \partial^2 u/\partial x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale $u_0(x) = u(x,0)$ positive, la fonction $\mathcal{E} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)\, dx = \frac{1}{\sqrt{8\pi\kappa t}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{8\kappa t}\Big)\, u_0(x) u_0(y)\, dx\, dy$$

vérifie cette même propriété; et il y a un résultat similaire pour l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

On en déduit une nouvelle preuve du théorème de Cohn et Kumar affirmant l'optimalité universelle du réseau $\mathbb{Z}$ en dimension un.

Titre anglais: A concavity property for the heat equation in dimension one

Mots-clés: Conjecture de Cohn-Kumar, Optimalité universelle, Modèle répulsif gaussien, Equation de la chaleur, J-concavité

Classification AMS (2010): 26A51 (Convexity in one variable, generalizations), 35K08 (Heat kernel), 41A05 (Interpolation), 42A82 (Positive definite functions)

*Laboratoire de Mathématique d'Orsay (UMR 8628 du CNRS), bât. 307, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

Table des matières

1 Introduction

Dans leur article [CK1], Cohn et Kumar introduisent la notion d'optimalité universelle: un arrangement de points de la sphère $\mathbb{S}^N$ ou de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ est dit *universellement optimal* si son énergie d'interaction est minimale pour une vaste classe de potentiels (voir plus bas).

Paradoxalement, le cas des sphères est techniquement plus simple: leur compacité permet de se ramener à des problèmes d'optimisation de dimension finie, qu'on peut (en principe) résoudre à l'aide d'ordinateurs.

A l'inverse, le problème analogue dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ est étonnamment difficile: il nécessite de construire des potentiels auxiliaires, qualifiés de "magiques", vérifiant une infinité d'égalités et d'inégalités.

Même en dimension 1, l'optimalité universelle du réseau $\mathbb{Z}$ n'est nullement un résultat trivial, à cause de la non-convexité des potentiels gaussiens; c'est un des résultats les plus importants de l'article [CK1].

Par ailleurs, Cohn et Kumar conjecturent dans ce même article que le réseau E_8 et le réseau de Leech sont universellement optimaux en dimensions 8 et 24; cela sera démontré par Maryna

Viazovska et ses co-auteurs [C+2], par une extension des méthodes qui leur ont précédemment permis de démontrer que les empilements de sphères correspondants étaient de densité maximale [Via, C+1].

Cohn et Kumar font également remarquer qu'il n'existe pas de réseau universellement optimal en dimensions 3, 5, 6, 7. Enfin, ils conjecturent [CK1, CK2, CKS] que les réseaux A_2 et D_4 sont universellement optimaux en dimensions 2 et 4. Cela impliquerait en particulier que l'empilement de sphères associé à D_4 est de densité maximale en dimension 4, un autre problème ouvert.

De manière plus précise, un arrangement de points A dans $\mathbb{R}^N$ (disons, une union finie non vide de translatés d'un réseau de $\mathbb{R}^N$) est dit universellement optimal si, pour tout $t > 0$, l'énergie d'interaction moyenne

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B(0,R))} \sum_{x,y\in A\cap B(0,R)} \Phi(y-x) \tag{1.1}$$

où $\Phi(x) = \exp(-t\,\|x\|^2)$, est minimale parmi tous les arrangements de points de même densité, celle-ci étant définie comme

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\operatorname{Card}(A\cap B(0,R))}{\operatorname{Vol}(B(0,R))} \tag{1.2}$$

Formellement, on peut voir ceci comme un problème d'électrostatique: il s'agit de trouver une distribution de charges (l'ensemble A) dont l'énergie d'interaction, donnée par la fonction Φ, est minimale. Cependant, il diffère des problèmes habituels d'électrostatique, tels que ceux étudiés dans [Fro], essentiellement par les contraintes mises sur la distribution de charges.

Il y a d'abord une contrainte “à grande échelle”: la distribution de charges doit remplir tout l'espace, de manière suffisamment récurrente — idéalement, de façon périodique — avec en tout cas une densité (1.2) bien définie et strictement positive. La charge totale est donc infinie, de même que l'énergie totale $\sum_{x,y\in A}\Phi(y-x)$, et seule la quantité limite (1.1) a un sens. Cette quantité étant définie de manière asymptotique, tout comme la densité, elle ne donne en elle-même aucune information sur l'énergie d'interaction d'une collection finie de charges occupant une région bornée de l'espace.

Il y a d'autre part une contrainte “à petite échelle”: la distribution de charges, vue comme mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$, doit être purement atomique, et tous les atomes doivent avoir la même masse. Là encore, on aimerait pouvoir relaxer cette contrainte ou s'en débarrasser complètement.

Le but de cet article est de réconcilier les questions d'optimalité universelle avec l'électrostatique classique, en présentant une approche pour estimer l'énergie d'interaction gaussienne

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \exp\left[-t\,\|y-x\|^2\right] d\nu(x)\, d\nu(y) \tag{1.3}$$

où ν est une mesure positive finie quelconque sur $\mathbb{R}^N$. L'idée est de considérer cette expression non pas comme fonction de ν (avec t fixé), mais comme fonction de t (avec ν fixée), et de montrer que cette fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfait un ensemble d'inéquations différentielles du second ordre: c'est la propriété de “J-concavité”.

Je détaillerai cette approche en dimension un, et montrerai qu'elle permet de retrouver le théorème de Cohn et Kumar sur l'optimalité universelle de $\mathbb{Z}$, avec quelques améliorations. Et j'espère bien sûr que cette approche sera aussi utilisable en dimension plus grande.

L'article est structuré comme suit. D'abord, le chapitre 2 présente la fonction J, qui est la fonction thêta du réseau $\mathbb{Z}$, puis les fonctions auxiliaires $\sigma, \tau, \omega, \rho$ construites à partir de J et ses dérivées, et quelques-unes de leurs propriétés.

A partir de là, le chapitre 3 introduit la notion de J-concavité, et en présente les principales propriétés; intuitivement, une fonction J-concave est une fonction "qui ressemble à J" par de nombreux aspects.

Le chapitre 4 présente les résultats principaux de l'article, exprimés à l'aide de cette notion. Le chapitre 5 fournit un autre point de vue sur ces théorèmes, en montrant comment ils peuvent se reformuler en termes de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale positive.

Ensuite, au chapitre 6, on montre comment ces résultats passent au quotient sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et redonnent en particulier le théorème de Cohn et Kumar sur l'optimalité universelle du réseau $\mathbb{Z}$ en dimension un.

Enfin, le chapitre 7 donne une démonstration du théorème principal (Théorème 4.1), en utilisant notamment une idée de Ruelle sur les "potentiels stables", ainsi qu'une méthode d'interpolation due à Vaaler, déjà utilisée par Cohn et Kumar.

2 La fonction J et les fonctions associées

2.1 La fonction J

Soient $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ les fonctions thêta classiques, voir [WW], § 21.11. Un résultat classique de Poisson et Jacobi est que la fonction ϑ_3 vérifie

$$\vartheta_3(z \mid \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \exp\Big(\frac{z^2}{\pi i \tau}\Big)\, \vartheta_3\Big(\frac{z}{\tau} \Bigm| -\frac{1}{\tau}\Big) \tag{2.1}$$

(pour $z \in \mathbb{C}$ et $\Im\mathrm{m}(\tau) > 0$); voir [WW], exemples 17, 18 du Chapitre VI, page 124, et plus loin en § 21.51, page 474.

Définissons la fonction $J :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par

$$J(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 x) = \vartheta_3(0, e^{-\pi x}) = \vartheta_3(0 \mid ix) \tag{2.2}$$

Elle vérifie, cas particulier bien connu de (2.1), la relation

$$J(x^{-1}) = x^{1/2} J(x) \tag{2.3}$$

pour $x > 0$. On a donc $J(x) \to 1$ quand $x \to \infty$, et $J(x) \sim x^{-1/2}$ quand $x \to 0$. La fonction J est infiniment dérivable, et ses dérivées successives $J^{(m)}$ sont données par

$$J^{(m)}(x) = (-\pi)^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2m} \exp(-\pi n^2 x) \tag{2.4}$$

ce qui montre en particulier que $(-1)^m J^{(m)}(x) > 0$, pour tous $m \geqslant 0$ et $x > 0$.

2.2 Les fonctions σ et τ

Notons $\mathcal{D}$ l'opérateur de dérivation défini par

$$\mathcal{D} = x\,\frac{d}{dx} = \frac{d}{d(\log x)} \tag{2.5}$$

si bien que $\mathcal{D}f(x) = xf'(x)$. Cette dérivation est "homogène" dans le sens où elle commute avec les homothéties et anticommute avec les inversions: pour toute constante λ, on a $\mathcal{D}\{f(\lambda x)\} =$

$(\mathcal{D}f)(\lambda x)$ et $\mathcal{D}\{f(\lambda/x)\} = -(\mathcal{D}f)(\lambda/x)$. Pour les dérivées homogènes d'ordre supérieur, je noterai parfois $f^{[m]}$ au lieu de $\mathcal{D}^m f$. En particulier,

$$\begin{aligned} f^{[0]}(x) &= f(x) \\ f^{[1]}(x) &= xf'(x) \\ f^{[2]}(x) &= xf'(x) + x^2 f''(x) \\ f^{[3]}(x) &= xf'(x) + 3x^2 f''(x) + x^3 f^{(3)}(x) \\ f^{[4]}(x) &= xf'(x) + 7x^2 f''(x) + 6x^3 f^{(3)}(x) + x^4 f^{(4)}(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Soient $\sigma, \tau :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$\sigma = \mathcal{D}(\log J) = \frac{\mathcal{D}J}{J}, \qquad \tau = \frac{\mathcal{D}^2 J}{J}. \tag{2.7}$$

En dérivant l'égalité $\log J(x^{-1}) = \frac{1}{2}\log(x) + \log J(x)$ on obtient, pour tout x,

$$\sigma(x) + \sigma(x^{-1}) = -1/2 \tag{2.8}$$

et par ailleurs $\sigma(x) = xJ'(x)/J(x) < 0$ partout, donc

$$-1/2 < \sigma(x) < 0 \tag{2.9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$0 < -\mathcal{D}J(x) < \tfrac{1}{2}J(x). \tag{2.10}$$

En dérivant maintenant (2.8), on obtient $\mathcal{D}\sigma(x) = \mathcal{D}\sigma(x^{-1})$, et comme

$$\mathcal{D}\sigma = \frac{J \cdot \mathcal{D}^2 J - (\mathcal{D}J)^2}{J^2} = \tau - \sigma^2 \tag{2.11}$$

on en déduit que τ vérifie

$$\tau(x^{-1}) = 1/4 + \sigma(x) + \tau(x) \tag{2.12}$$

ou, plus symétriquement,

$$(\tau + \sigma/2)(x^{-1}) = (\tau + \sigma/2)(x). \tag{2.13}$$

Lemme 2.1. *Pour tout $x > 0$, on a*

$$(\tau + \sigma/2)(x) > 0 \tag{2.14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathcal{D}^2 J(x) > -\tfrac{1}{2}\mathcal{D}J(x) > 0. \tag{2.15}$$

Démonstration. Grâce à la relation (2.13), il suffit de traiter le cas $x \geqslant 1$. On a alors

$$J''(x) = 2\pi^2 \sum_{n\geqslant 1} n^4 \exp(-\pi n^2 x) \geqslant 2\pi^2 \sum_{n \geqslant 1} n^2 \exp(-\pi n^2 x) = -\pi J'(x) \tag{2.16}$$

et par conséquent

$$(\mathcal{D}^2 J + \tfrac{1}{2}\mathcal{D}J)(x) = \tfrac{3}{2}xJ'(x) + x^2 J''(x) \geqslant (\tfrac{3}{2}x - \pi x^2)J'(x) > 0$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Définissons la fonction $K = J^{[0]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[1]}$, si bien que $\mathcal{D}\sigma = K/J^2$. En combinant les encadrements (2.10) et (2.15), on obtient la

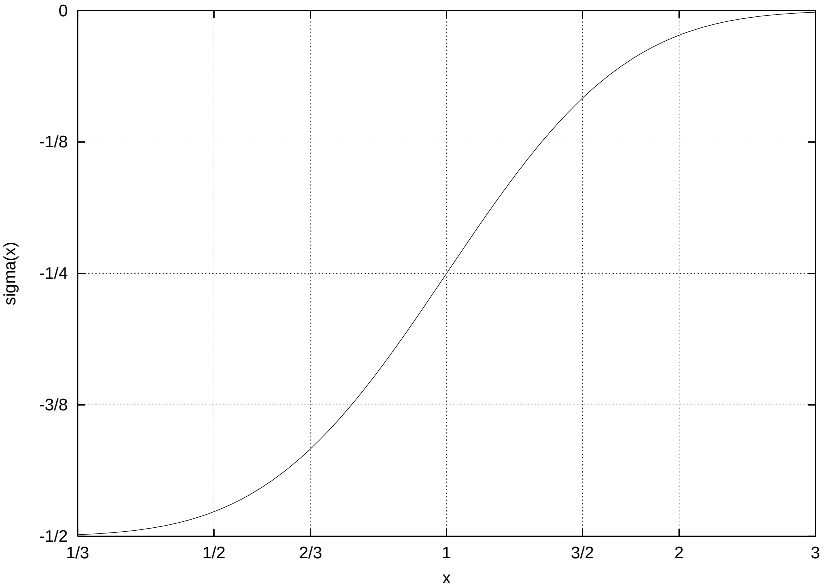
Proposition 2.2. *Pour tout $x > 0$, on a*

$$\mathcal{D}\sigma(x) = \mathcal{D}^2(\log J)(x) \ > \ 0 \tag{2.17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$K(x) = \begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \end{vmatrix} \ > \ 0. \tag{2.18}$$

On voit facilement que $\sigma(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, et avec (2.8), on en déduit que $\sigma(x) \to -1/2$ quand $x \to 0$. Avec la Proposition ci-dessus, on en conclut que la fonction σ est un difféomorphisme croissant de $]0, \infty[$ vers $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.



On montre également sans difficulté que $\tau(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, et $\tau(x) \to 1/4$ quand $x \to 0$. La fonction τ n'est pas monotone: on verra plus bas que la fonction $\omega = \mathcal{D}\tau/\mathcal{D}\sigma$ prend toutes les valeurs réelles.

Proposition 2.3. *Pour tout $x \geqslant 1$, posons $y = \pi x$ et $q = \exp(-y)$. Les expressions*

$$\begin{aligned} E_0 &= 1 + 2q \\ E_1 &= 2qy \\ E_2 &= 2qy(y-1) \\ E_3 &= 2qy(y^2 - 3y + 1) \\ E_4 &= 2qy(y^3 - 6y^2 + 7y - 1) \end{aligned} \tag{2.19}$$

vérifient, pour $m = 0, 1, 2, 3, 4$, les inégalités

$$0 \leqslant (-1)^m J^{[m]}(x) - E_m \leqslant 3q^4(4y)^m. \tag{2.20}$$

On note que $E_3 > 0$ dans cet énoncé, ce qui montre que $J^{[3]}(x) < 0$ pour tout $x \geqslant 1$.

Démonstration. D'après les formules (2.6), on a

$$\begin{aligned}
J^{[0]}(x) &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} 2\exp(-\pi n^2 x) \\
J^{[1]}(x) &= \sum_{n\geqslant 1} 2\pi n^2 x\, \exp(-\pi n^2 x)\,(-1) \\
J^{[2]}(x) &= \sum_{n\geqslant 1} 2\pi n^2 x\, \exp(-\pi n^2 x)\,(-1+\pi n^2 x) \\
J^{[3]}(x) &= \sum_{n\geqslant 1} 2\pi n^2 x\, \exp(-\pi n^2 x)\,(-1+3\pi n^2 x - (\pi n^2 x)^2) \\
J^{[4]}(x) &= \sum_{n\geqslant 1} 2\pi n^2 x\, \exp(-\pi n^2 x)\,(-1+7\pi n^2 x - 6(\pi n^2 x)^2 + (\pi n^2 x)^3)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour tous $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $n^2 x \geqslant 4(x+n-2)$ et $n/2 \leqslant \exp(n/2-1)$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 2} (n/2)^{4\pi} \exp(-\pi n^2 x) &\leqslant \sum_{n\geqslant 2} \exp(-\pi n^2 x + 2\pi(n-2)) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 2} \exp(-4\pi x - 2\pi(n-2)) = e^{-4\pi x} \sum_{n\geqslant 2} (e^{-2\pi})^{n-2} \\
&= \frac{e^{-4\pi x}}{1-e^{-2\pi}} \leqslant \frac{3}{2}\, e^{-4\pi x}
\end{aligned}$$

ce qui montre que, pour tout $\alpha \leqslant 4\pi$,

$$\sum_{n\geqslant 2} q^{n^2} n^\alpha \leqslant \frac{3}{2}\, q^4\, 2^\alpha\,. \tag{2.22}$$

Enfin, pour tout $t \geqslant 4\pi$ on a les inégalités $0 \leqslant t^2 - 3t + 1 \leqslant t^2$ et $0 \leqslant t^3 - 6t^2 + 7t - 1 \leqslant t^3$, et par conséquent

$$\begin{gathered}
0 \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2} \leqslant 3q^4, \qquad 0 \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y) \leqslant 3q^4(4y) \\
0 \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)(n^2 y - 1) \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)^2 \leqslant 3q^4(4y)^2 \\
0 \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)((n^2 y)^2 - 3(n^2 y) + 1) \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)^3 \leqslant 3q^4(4y)^3 \\
0 \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)((n^2 y)^3 - 6(n^2 y)^2 + 7(n^2 y) - 1) \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 2q^{n^2}(n^2 y)^4 \leqslant 3q^4(4y)^4
\end{gathered}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Observons qu'avec les notations ci-dessus, on a toujours l'inégalité

$$q \leqslant (ex)^{-\pi} \tag{2.23}$$

(qui équivaut à $e^{x-1} \geqslant x$). En la combinant avec l'hypothèse $x \geqslant 1$, on retrouve la majoration évidente $q \leqslant e^{-\pi}$, et on obtient plus généralement

$$q\, y^\alpha \leqslant e^{-\pi} \pi^\alpha \tag{2.24}$$

pour tout réel $\alpha \leqslant \pi$. J'utiliserai cette majoration à de nombreuses reprises dans la suite de ce chapitre.

Lemme 2.4. *Pour tout $x \geqslant 1$, on a*

$$\mathcal{D}^2(\log J^{[2]})(x) \ < \ 0 \tag{2.25}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{vmatrix} J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} \ < \ 0. \tag{2.26}$$

Démonstration. Posons $\Delta = J^{[2]}(x)J^{[4]}(x) - (J^{[3]}(x))^2$. Il est évident que $\Delta < 0$ si $J^{[4]}(x) < 0$; je supposerai donc $J^{[4]}(x) \geqslant 0$ dans ce qui suit. Des inégalités

$$\begin{aligned} 0 \leqslant J^{[2]}(x) &\leqslant E_2 + 48q^4y^2 \\ 0 \leqslant J^{[4]}(x) &\leqslant E_4 + 768q^4y^4 \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} J^{[2]}(x)J^{[4]}(x) &\leqslant E_2E_4 + E_2 \cdot 768q^4y^4 + 48q^4y^2 \cdot E_4 + 48q^4y^2 \cdot 768q^4y^4 \\ &\leqslant E_2E_4 + 2qy^2 \cdot 768q^4y^4 + 48q^4y^2 \cdot 2qy^4 + 48 \cdot 768q^5y^6e^{-3\pi} \end{aligned}$$

et donc

$$J^{[2]}(x)J^{[4]}(x) - E_2E_4 \leqslant q^5y^6(2 \cdot 768 + 48 \cdot 2 + 48 \cdot 768e^{-3\pi}) \leqslant 1635q^5y^6.$$

D'autre part $-J^{[3]}(x) \geqslant E_3 \geqslant 0$ entraîne $(J^{[3]}(x))^2 \geqslant E_3^2$, et donc

$$\Delta \leqslant E_2E_4 - E_3^2 + 1635q^5y^6.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} E_2E_4 - E_3^2 &= (2qy)^2\Big[(y-1)(y^3 - 6y^2 + 7y - 1) - (y^2 - 3y + 1)^2\Big] \\ &= (2qy)^2y(-2 + 2y - y^2) \leqslant -2q^2y^5 \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta \leqslant -2q^2y^5 + 1635q^5y^6 = q^2y^5(-2 + 1635q^3y) \leqslant q^2y^5(-2 + 1635\pi e^{-3\pi}) < 0$$

(en utilisant (2.24) avec $\alpha = 1/3$), qui est l'inégalité cherchée. $\square$

2.3 Les fonctions ω et ρ

Puisque la fonction $\mathcal{D}\sigma$ ne prend que des valeurs strictement positives, on peut définir les fonctions $\omega, \rho :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\omega = \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}\sigma} = \frac{J^{[0]}J^{[3]} - J^{[1]}J^{[2]}}{J^{[0]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[1]}} = \frac{\mathcal{D}K}{K} = \mathcal{D}(\log K) \tag{2.27}$$

$$\rho = \tau - \sigma\omega = \frac{J^{[2]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[3]}}{J^{[0]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[1]}} \tag{2.28}$$

et ces deux fonctions sont liées par les relations

$$\rho\, J^{[0]} + \omega\, J^{[1]} = J^{[2]} \tag{2.29}$$

$$\rho\, J^{[1]} + \omega\, J^{[2]} = J^{[3]}. \tag{2.30}$$

Des relations (2.8) et (2.13) on déduit $\mathcal{D}\sigma(x^{-1}) = \mathcal{D}\sigma(x)$ et $\mathcal{D}(\tau + \sigma/2)(x^{-1}) = -\mathcal{D}(\tau + \sigma/2)(x)$ pour tout $x > 0$, et donc ω, ρ vérifient

$$\omega(x) + \omega(x^{-1}) = -1 \tag{2.31}$$

$$(\rho - \omega/4)(x^{-1}) = (\rho - \omega/4)(x). \tag{2.32}$$

Proposition 2.5. *Pour tout $x > 0$, on a*

$$\mathcal{D}\omega(x) = \mathcal{D}^2(\log K)(x) \;<\; 0 \tag{2.33}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} \;<\; 0. \tag{2.34}$$

Démonstration. On a $\mathcal{D}\omega = \mathcal{D}(\mathcal{D}K/K) = (K^{[0]}K^{[2]} - K^{[1]}K^{[1]})/K^2$, et

$$\begin{aligned} K^{[0]}K^{[2]} - K^{[1]}K^{[1]} &= (J^{[0]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[1]})(J^{[0]}J^{[4]} - J^{[2]}J^{[2]}) - (J^{[0]}J^{[3]} - J^{[1]}J^{[2]})^2 \\ &= J^{[0]}(J^{[0]}J^{[2]}J^{[4]} + 2J^{[1]}J^{[2]}J^{[3]} - J^{[2]}J^{[2]}J^{[2]} - J^{[0]}J^{[3]}J^{[3]} - J^{[1]}J^{[1]}J^{[4]}) \end{aligned}$$

(identité de Sylvester) et donc, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{D}\omega(x) = \frac{J(x)}{K^2(x)} \begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} \tag{2.35}$$

ce qui montre l'équivalence des deux inégalités de l'énoncé.
D'autre part, la relation de symétrie (2.31) implique, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{D}\omega(x^{-1}) = \mathcal{D}\omega(x) \tag{2.36}$$

et il suffit donc de traiter le cas $x \geqslant 1$. On a alors, d'après le Lemme 2.4,

$$\begin{vmatrix} J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} \;<\; 0,$$

ce qui, avec l'identité de Sylvester

$$J^{[2]}(x) \begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[3]}(x) & J^{[4]}(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \end{vmatrix}^2$$

entraîne l'inégalité (2.34). $\square$

Il est facile de voir que $\omega(x) \to -\infty$ quand $x \to \infty$ et d'en déduire, avec (2.31), que $\omega(x) \to \infty$ quand $x \to 0$. Avec la Proposition ci-dessus, on en déduit que ω est un difféomorphisme décroissant de $]0, \infty[$ vers $\mathbb{R}$.

La Proposition 2.5 affirme que $\tau(t)$ peut s'écrire comme fonction (strictement) concave de $\sigma(t)$; de manière précise, la fonction $\tau \circ \sigma^{-1} : \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\to \mathbb{R}$ est concave, avec une dérivée seconde partout non nulle. En particulier, le graphe de cette fonction, c'est-à-dire l'ensemble des points $\begin{bmatrix} \sigma(t) \\ \tau(t) \end{bmatrix}$ pour $t > 0$, est en-dessous de chacune des ses tangentes, ce qui donne la

Proposition 2.6. *Pour tous $x, y > 0$, on a*

$$\tau(y) \leqslant \omega(x)\sigma(y) + \rho(x) \tag{2.37}$$

ou, ce qui revient au même,

$$J^{[2]}(y) \leqslant \omega(x)J^{[1]}(y) + \rho(x)J^{[0]}(y) \tag{2.38}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ J^{[0]}(y) & J^{[1]}(y) & J^{[2]}(y) \end{vmatrix} \leqslant 0 \tag{2.39}$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.

De plus, ces tangentes sont strictement au-dessus des deux points limites du graphe, à savoir les points $\left[\begin{smallmatrix}-1/2\\1/4\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$, ce qui montre que

$$\rho(x) > 0 \tag{2.40}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. Les arguments géométriques ci-dessus sont suffisants, mais en voici une autre présentation avec des formules. Fixons $x > 0$, et considérons la fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(y) = \tau(y) - \omega(x)\sigma(y)$ pour $y > 0$. On voit que $f(x) = \rho(x)$, et la derivée homogène

$$\mathcal{D}f(y) = \mathcal{D}\tau(y) - \omega(x)\mathcal{D}\sigma(y) = \mathcal{D}\sigma(y) \cdot (\omega(y) - \omega(x))$$

est strictement positive pour $y < x$ et strictement négative pour $y > x$. La fonction f est donc strictement croissante jusqu'en x, et strictement décroissante ensuite. En outre, elle tend vers 0 à l'infini. Il en résulte que $\rho(x)$ est strictement plus grand que 0 et $f(y)$ pour tout $y \neq x$. $\square$

On montre de même le fait suivant: pour tous a, b réels, on a les équivalences

$$J^{[2]} \leqslant aJ^{[1]} + bJ^{[0]} \iff \tau \leqslant a\,\sigma + b \iff b \geqslant \rho(\omega^{-1}a). \tag{2.41}$$

Voici quelques valeurs numériques (et les valeurs limites) des fonctions J, σ, τ, ω et ρ:

x	$J(x)$	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$\omega(x)$	$\rho(x)$
0	∞	$-1/2$	$1/4$	∞	∞
1/3	1.732330	−0.498479	0.261292	6.305878	3.404641
1/2	1.419495	−0.476620	0.350139	3.088622	1.822239
2/3	1.246749	−0.416829	0.475597	1.414134	1.065048
1	1.086435	$-1/4$	0.536158	$-1/2$	0.411158
3/2	1.017967	−0.083171	0.308768	−2.414134	0.107981
2	1.003735	−0.023380	0.123519	−4.088622	0.027929
3	1.000161	−0.001521	0.012813	−7.305878	0.001702
∞	1	0	0	$-\infty$	0

2.4 Autres inégalités sur ω et ρ

Lemme 2.7. *Pour tout $x \geqslant 1$, posons $y = \pi x$ et $q = \exp(-y)$. On a les inégalités*

$$\begin{aligned} 0 \leqslant J^{[0]}(x)J^{[2]}(x) - E_0E_2 &\leqslant 53q^4y^2, & 0 &\leqslant (J^{[1]}x)^2 - E_1^2 \leqslant 49q^5y^2 \\ 0 \leqslant (J^{[2]}x)^2 - E_2^2 &\leqslant 193q^5y^4, & 0 &\leqslant J^{[1]}(x)J^{[3]}(x) - E_1E_3 \leqslant 409q^5y^4 \\ 0 \leqslant -J^{[0]}(x)J^{[3]}(x) - E_0E_3 &\leqslant 209q^4y^3, & 0 &\leqslant -J^{[1]}(x)J^{[2]}(x) - E_1E_2 \leqslant 121q^5y^3 \end{aligned}$$

et donc, en posant $U = J^{[2]}J^{[2]} - J^{[1]}J^{[3]}$ et $V = J^{[1]}J^{[2]} - J^{[0]}J^{[3]}$,

$$\big|K(x) - 2qy(y-1-2q)\big| \leqslant 53q^4y^2, \quad \big|U(x) - 4q^2y^3\big| \leqslant 409q^5y^4,$$
$$\big|V(x) - 2qy(y^2 - 3y + 1 + 2q - 4qy)\big| \leqslant 209q^4y^3.$$

Démonstration. Soit $x \geqslant 1$. Pour tout m tel que $0 \leqslant m \leqslant 3$, on a

$$E_m \leqslant (-1)^m J^{[m]}(x) \leqslant E_m + 3q^4(4y)^m$$

où les E_m vérifient

$$0 \leqslant E_m \leqslant 0^m + 2qy^m.$$

Donc, si m, n sont des entiers tels que $0 \leqslant m, n \leqslant 3$, on a

$$E_mE_n \leqslant (-1)^{m+n}J^{[m]}(x)J^{[n]}(x) \leqslant E_mE_n + E_m \cdot 3q^4(4y)^n + 3q^4(4y)^m \cdot E_n + (3q^4)^2(4y)^{m+n}$$

c'est-à-dire que la quantité $\Delta_{mn} = (-1)^{m+n}J^{[m]}(x)J^{[n]}(x) - E_mE_n$ vérifie

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Delta_{mn} &\leqslant 3q^4\left[E_m(4y)^n + (4y)^mE_n + 3q^4(4y)^{m+n}\right] \\ &\leqslant 3q^4\left[(0^m + 2qy^m)(4y)^n + (0^n + 2qy^n)(4y)^m + 3q^4(4y)^{m+n}\right] \\ &\leqslant 3q^4\left[0^m(4y)^n + 0^n(4y)^m\right] + 6q^5y^{m+n}\left[4^m + 4^n + \tfrac{3}{2}e^{-3\pi}4^{m+n}\right] \end{aligned}$$

et on en déduit aisément les inégalités du Lemme. □

Lemme 2.8. *Pour tout $x \geqslant 1$, on a les inégalités*

$$\rho(x) \geqslant \frac{2(\pi x)^2}{\pi x - 1}\, e^{-\pi x} \tag{2.42}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant -\omega(x) \leqslant \pi x - 2\,. \tag{2.43}$$

Démonstration. Définissons comme plus haut $y = \pi x$ et $q = \exp(-y)$, et les fonctions U et V, si bien que $\rho = U/K$ et $\omega = -V/K$. Comme la fonction ω est décroissante, on a $\omega(x) \leqslant \omega(1) = -1/2$.

Ensuite, par le Lemme 2.7, on a

$$\begin{aligned} (y-1)U(x) - 2qy^2K(x) &\geqslant (y-1)(4q^2y^3 - 409q^5y^4) - 2qy^2(2qy(y-1-2q) + 53q^4y^2) \\ &= 4q^2y^3((y-1) - (y-1-2q)) - q^5y^4(409(y-1) + 106) \\ &\geqslant 8q^3y^3 - 409q^5y^5 = q^3y^3(8 - 409q^2y^2) \end{aligned}$$

qui est positif, car $qy \leqslant \pi e^{-\pi} \leqslant \sqrt{8/409}$. Ceci démontre que $\rho(x) \geqslant 2qy^2/(y-1)$. Enfin,

$$\begin{aligned} V(x) - (y-2)K(x) &\leqslant 2qy(y^2 - 3y + 1 + 2q - 4qy) + 209q^4y^3 \\ &\qquad - (y-2)2qy(y-1-2q) + 53q^4y^3 \\ &= -2qy(1 + 2q + 2qy) + 262q^4y^3 \\ &= -2qy\big[1 + 2q + qy(2 - 131q^2y)\big] \end{aligned}$$

qui est négatif, car $q^2y \leqslant \pi e^{-2\pi} \leqslant 2/131$. Et ceci démontre que $-\omega(x) \leqslant y - 2$. □

3 La propriété de J-concavité

3.1 Définition

La concavité, au sens ordinaire, d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, peut se caractériser comme suit: f est concave si et seulement si, pour tous x, y, z dans I, on a

$$x < y < z \implies \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \leqslant 0. \tag{3.1}$$

En effet, ce déterminant s'interprète comme le double de la surface algébrique du triangle de sommets $\left[\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} y \\ f(y) \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} z \\ f(z) \end{smallmatrix}\right]$ dans $\mathbb{R}^2$, et la négativité du déterminant signifie que ce triangle tourne dans le sens indirect. Des conditions de forme similaire à (3.1) ont été examinées par de nombreux auteurs, notamment Valiron [Val].

La J-concavité est une propriété qui concerne uniquement les fonctions $]0, \infty[\to \mathbb{R}$, et se définit d'une manière analogue:

Définition 3.1. *Une fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est dite J-concave si, quels que soient les réels $x, y, z, \lambda > 0$, on a*

$$x < y < z \implies \begin{vmatrix} J(x) & J(y) & J(z) \\ \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(y) & \mathcal{D}J(z) \\ f(\lambda x) & f(\lambda y) & f(\lambda z) \end{vmatrix} \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Clairement, la somme de deux fonctions J-concaves est J-concave, de même que le produit d'une fonction J-concave par une constante positive. On voit également qu'une limite simple de fonctions J-concaves est encore J-concave.

La caractérisation suivante nous sera utile:

Proposition 3.2. *Une fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est J-concave si et seulement si, quel que soit le réel $\lambda > 0$, la fonction $u : \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\to \mathbb{R}$ définie implicitement par*

$$\frac{f(\lambda x)}{J(x)} = u\left[\frac{\mathcal{D}J(x)}{J(x)}\right] \tag{3.3}$$

pour $x > 0$, est concave.

Démonstration. Comme on l'a vu au chapitre 2, la fonction $\sigma = \mathcal{D}J/J$ est un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$. La fonction u est donc bien définie, pour tout $\lambda > 0$

donné. On note que, pour tous $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{J(x)J(y)J(z)} \begin{vmatrix} J(x) & J(y) & J(z) \\ \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(y) & \mathcal{D}J(z) \\ f(\lambda x) & f(\lambda y) & f(\lambda z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\mathcal{D}J(x)}{J(x)} & \frac{\mathcal{D}J(y)}{J(y)} & \frac{\mathcal{D}J(z)}{J(z)} \\ \frac{f(\lambda x)}{J(x)} & \frac{f(\lambda y)}{J(y)} & \frac{f(\lambda z)}{J(z)} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^* & y^* & z^* \\ u(x^*) & u(y^*) & u(z^*) \end{vmatrix}$$

où x^*, y^*, z^* sont les images de x, y, z par σ. On a donc l'équivalence

$$\begin{vmatrix} J(x) & J(y) & J(z) \\ \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(y) & \mathcal{D}J(z) \\ f(\lambda x) & f(\lambda y) & f(\lambda z) \end{vmatrix} \leqslant 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^* & y^* & z^* \\ u(x^*) & u(y^*) & u(z^*) \end{vmatrix} \leqslant 0$$

et on conclut facilement. □

La Proposition ci-dessus implique en particulier que toute fonction J-concave est continue. Un autre corollaire en est que la borne inférieure de deux fonctions J-concaves est J-concave, comme c'est le cas pour la concavité usuelle.

3.2 Propriétés des fonctions J-concaves

Proposition 3.3. *Pour toute fonction J-concave $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, et quels que soient les réels $x, y, z, \lambda > 0$, on a*

$$x \leqslant y \leqslant z \implies \frac{f(y)}{J(\lambda y)} \geqslant \min\left\{ \frac{f(x)}{J(\lambda x)}, \frac{f(z)}{J(\lambda z)} \right\}. \tag{3.4}$$

Démonstration. D'après la Proposition 3.2, pour tout $\lambda > 0$ on peut trouver une fonction concave $u : \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{f(t/\lambda)}{J(t)} = u\big(\sigma(t)\big)$$

pour tout $t > 0$. On a alors $f(x)/J(\lambda x) = u(x^*)$, où $x^* = \sigma(\lambda x)$. Définissons de même y^* et z^*. Comme σ est croissante, on a $x^* \leqslant y^* \leqslant z^*$, et par conséquent

$$u(y^*) \geqslant \min\big\{u(x^*), u(z^*)\big\}$$

puisque u est concave, ce qui est l'inégalité cherchée. □

Il est évident que si une fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est J-concave, alors pour tout $\lambda > 0$ la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ est aussi J-concave. Mais la J-concavité est également préservée, d'une certaine manière, par les inversions:

Proposition 3.4. *Si une fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est J-concave, alors la fonction $g(x) = x^{-1/2} f(x^{-1})$ est également J-concave, et réciproquement.*

Démonstration. D'après (2.3) et (2.8), la fonction J vérifie, pour tout $x > 0$,

$$J(x) = J(x^{-1})/\sqrt{x}, \quad \mathcal{D}J(x) = -(\mathcal{D}J + J/2)(x^{-1})/\sqrt{x}.$$

Supposons que f soit J-concave. Pour tous $x, y, z, \lambda > 0$ avec $x < y < z$, on a

$$\begin{vmatrix} J(x) & J(y) & J(z) \\ \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(y) & \mathcal{D}J(z) \\ g(\lambda x) & g(\lambda y) & g(\lambda z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{J(x^{-1})}{\sqrt{x}} & \frac{J(y^{-1})}{\sqrt{y}} & \frac{J(z^{-1})}{\sqrt{z}} \\ -\frac{(\mathcal{D}J+J/2)(x^{-1})}{\sqrt{x}} & -\frac{(\mathcal{D}J+J/2)(y^{-1})}{\sqrt{y}} & -\frac{(\mathcal{D}J+J/2)(z^{-1})}{\sqrt{z}} \\ \frac{f(x^{-1}/\lambda)}{\sqrt{\lambda x}} & \frac{f(y^{-1}/\lambda)}{\sqrt{\lambda y}} & \frac{f(z^{-1}/\lambda)}{\sqrt{\lambda z}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda x y z}} \begin{vmatrix} J(z^{-1}) & J(y^{-1}) & J(x^{-1}) \\ \mathcal{D}J(z^{-1}) & \mathcal{D}J(y^{-1}) & \mathcal{D}J(x^{-1}) \\ f(z^{-1}/\lambda) & f(y^{-1}/\lambda) & f(x^{-1}/\lambda) \end{vmatrix}$$

qui est négatif puisque $z^{-1} < y^{-1} < x^{-1}$, ce qui montre que g est J-concave.
Et bien sûr, on a aussi la réciproque, vu le caractère symétrique de la relation entre f et g. $\square$

On a un fait similaire pour la concavité usuelle: si une fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est concave, alors la fonction $g(x) = x f(x^{-1})$ est concave, et réciproquement.

Proposition 3.5. *Toute fonction J-concave est positive et décroissante.*

Démonstration. Soit f une fonction J-concave, et des réels $y > 0$ et $\theta > 1$.
Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{vmatrix} J(x/\theta) & J(x) & J(x\theta) \\ \mathcal{D}J(x/\theta) & \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(x\theta) \\ f(y/\theta) & f(y) & f(y\theta) \end{vmatrix} \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$f(y/\theta) \begin{vmatrix} J(x) & J(x\theta) \\ \mathcal{D}J(x) & \mathcal{D}J(x\theta) \end{vmatrix} - f(y) \begin{vmatrix} J(x/\theta) & J(x\theta) \\ \mathcal{D}J(x/\theta) & \mathcal{D}J(x\theta) \end{vmatrix} + f(y\theta) \begin{vmatrix} J(x/\theta) & J(x) \\ \mathcal{D}J(x/\theta) & \mathcal{D}J(x) \end{vmatrix} \leqslant 0$$

ou encore

$$f(y) \geqslant f(y/\theta) \frac{J(x)}{J(x/\theta)} \frac{\sigma(x\theta) - \sigma(x)}{\sigma(x\theta) - \sigma(x/\theta)} + f(y\theta) \frac{J(x)}{J(x\theta)} \frac{\sigma(x) - \sigma(x/\theta)}{\sigma(x\theta) - \sigma(x/\theta)} . \tag{3.5}$$

Remarquons que les deux quantités $\lambda_1(x) = \frac{\sigma(x\theta) - \sigma(x)}{\sigma(x\theta) - \sigma(x/\theta)}$ et $\lambda_2(x) = \frac{\sigma(x) - \sigma(x/\theta)}{\sigma(x\theta) - \sigma(x/\theta)}$ sont strictement positives et que leur somme vaut un. De plus, par le Lemme 3.6 ci-dessous, le quotient

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = \frac{\sigma(x\theta) - \sigma(x)}{\sigma(x) - \sigma(x/\theta)}$$

tend vers ∞ quand $x \to 0$, et vers 0 quand $x \to \infty$.
Faisons d'abord tendre $x \to 0$ dans l'inégalité (3.5): on a alors $J(x)/J(x/\theta) \to \theta^{-1/2}$, $\lambda_1(x) \to 1$, $J(x)/J(x\theta) \to \theta^{1/2}$ et $\lambda_2(x) \to 0$, et il vient

$$f(y) \geqslant f(y/\theta)\, \theta^{-1/2}. \tag{3.6}$$

En prenant maintenant la limite $x \to \infty$, on a cette fois $J(x)/J(x/\theta) \to 1$, $\lambda_1(x) \to 0$, $J(x)/J(x\theta) \to 1$ et $\lambda_2(x) \to 1$, et il vient

$$f(y) \geqslant f(y\theta). \tag{3.7}$$

Pour résumer, et en changeant de notations, nous avons démontré que la fonction f satisfait, pour tous $x, y > 0$,

$$x < y \implies f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(x)\sqrt{x/y} \tag{3.8}$$

ce qui montre bien que f est décroissante et positive (et continue, mais on le savait déjà). $\square$

Une autre conséquence de l'encadrement (3.8) est que si f s'annule en un point, alors f est identiquement nulle. Autrement dit, une fonction J-concave non triviale est partout strictement positive.
Notons que si f est de classe C^1, la propriété (3.8) revient à dire que

$$0 \leqslant -\mathcal{D}f \leqslant f/2 \tag{3.9}$$

ce qu'on pourra comparer avec (2.10).

Lemme 3.6. *Pour tous $x > 0$ et $\theta > 1$, il existe un réel y tel que $x/\theta \leqslant y \leqslant x\theta$ et*

$$\log \frac{\sigma(x\theta) - \sigma(x)}{\sigma(x) - \sigma(x/\theta)} = \log(\theta) \cdot (\omega - 2\sigma)(y). \tag{3.10}$$

Démonstration. D'après (2.11), on a $\mathcal{D}(\log \mathcal{D}\sigma) = \mathcal{D}^2\sigma/\mathcal{D}\sigma = \omega - 2\sigma$; notons C_1 et C_2 le minimum et le maximum de cette fonction sur l'intervalle $[x/\theta, x\theta]$.
Pour tout z tel que $x/\theta \leqslant z \leqslant x$, on a

$$\log \mathcal{D}\sigma(z\theta) - \log \mathcal{D}\sigma(z) = \int_0^{\log\theta} \frac{\mathcal{D}^2\sigma}{\mathcal{D}\sigma}(z \exp s)\, ds$$

et

$$C_1 \log\theta \leqslant \int_0^{\log\theta} \frac{\mathcal{D}^2\sigma}{\mathcal{D}\sigma}(z \exp s)\, ds \leqslant C_2 \log\theta$$

et donc

$$\exp(C_1 \log\theta) \leqslant \frac{\mathcal{D}\sigma(z\theta)}{\mathcal{D}\sigma(z)} \leqslant \exp(C_2 \log\theta). \tag{3.11}$$

Par ailleurs, on a

$$\sigma(x\theta) - \sigma(x) = \int_0^{\log\theta} \mathcal{D}\sigma(x \exp s)\, ds$$
$$\sigma(x) - \sigma(x/\theta) = \int_0^{\log\theta} \mathcal{D}\sigma(x\theta^{-1} \exp s)\, ds$$

ce qui, avec l'encadrement (3.11), implique

$$\exp(C_1 \log\theta) \leqslant \frac{\sigma(x\theta) - \sigma(x)}{\sigma(x) - \sigma(x/\theta)} \leqslant \exp(C_2 \log\theta) \tag{3.12}$$

et on conclut facilement. □

3.3 Caractérisation en classe C^2

Proposition 3.7. *Une fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 est J-concave si et seulement si, pour tous $x, y > 0$,*

$$f^{[2]}(y) \leqslant \omega(x) f^{[1]}(y) + \rho(x) f^{[0]}(y) \tag{3.13}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{vmatrix} J^{[0]}(x) & J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) \\ J^{[1]}(x) & J^{[2]}(x) & J^{[3]}(x) \\ f^{[0]}(y) & f^{[1]}(y) & f^{[2]}(y) \end{vmatrix} \leqslant 0. \tag{3.14}$$

Démonstration. Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour tout $\lambda > 0$, considérons la fonction $u = u_\lambda : \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\to \mathbb{R}$ définie par (3.3), et qui est évidemment aussi C^2. En dérivant la relation (3.3) on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{D}\sigma(x) \cdot u'[\sigma(x)] = \frac{G(x)}{J^2(x)} \tag{3.15}$$

où on a posé

$$G(x) = f^{[1]}(\lambda x) J^{[0]}(x) - f^{[0]}(\lambda x) J^{[1]}(x) = J(x) \cdot \left[f^{[1]}(\lambda x) - f^{[0]}(\lambda x)\sigma(x)\right] \tag{3.16}$$

et comme $\mathcal{D}\sigma = K/J^2$, il vient

$$u'[\sigma(x)] = \frac{G(x)}{K(x)}\,. \tag{3.17}$$

En dérivant cette dernière relation, on obtient

$$\mathcal{D}\sigma(x) \cdot u''[\sigma(x)] = \frac{\mathcal{D}G \cdot K - G \cdot \mathcal{D}K}{K^2}(x) = \frac{\mathcal{D}G - G\omega}{K}(x) \tag{3.18}$$

ce qui montre que la condition $u''[\sigma(x)] \leqslant 0$ équivaut à $(\mathcal{D}G - G\omega)(x) \leqslant 0$.
On a $\mathcal{D}G(x) = J(x) \cdot \left[f^{[2]}(\lambda x) - f^{[0]}(\lambda x)\tau(x)\right]$ et par suite

$$(\mathcal{D}G - G\omega)(x) = J(x) \cdot \left[f^{[2]}(\lambda x) - f^{[0]}(\lambda x)\tau(x) - f^{[1]}(\lambda x)\omega(x) + f^{[0]}(\lambda x)\sigma(x)\omega(x)\right]$$

et donc, la condition $u''[\sigma(x)] \leqslant 0$ équivaut à

$$f^{[2]}(\lambda x) - f^{[1]}(\lambda x)\omega(x) - f^{[0]}(\lambda x)\rho(x) \leqslant 0. \tag{3.19}$$

La J-concavité consiste à demander que cette condition soit satisfaite pour tous $x, \lambda > 0$, et ceci est clairement équivalent à la condition (3.13). □

Proposition 3.8. *La fonction J est J-concave.*

Ceci découle immédiatement de la comparaison des Propositions 2.6 et 3.7. On peut également combiner (2.41) avec la Proposition 3.7 pour obtenir le résultat plus précis suivant:

Proposition 3.9. *Une fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 est J-concave si et seulement si, pour tous a, b réels tels que $J^{[2]} \leqslant aJ^{[1]} + bJ^{[0]}$, on a $f^{[2]} \leqslant af^{[1]} + bf^{[0]}$.*

4 Enoncé du théorème principal

Théorème 4.1. *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda x)\, d\mu(x) \geqslant 0 \tag{4.1}$$

pour tout λ réel. Alors, la fonction $G\mu :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$(G\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\mu(x) \tag{4.2}$$

est J-concave.

La condition (4.1) revient à dire que $\Re e\,\hat{\mu} \geqslant 0$, où la fonction $\hat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la transformée de Fourier de μ, définie par

$$\hat{\mu}(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i t x)\, d\mu(x)\,. \tag{4.3}$$

Si ν est une mesure positive finie quelconque sur $\mathbb{R}$, notons $\nu^{(-)}$ la mesure "réfléchie" autour de 0, c'est-à-dire la mesure image de ν par la symétrie $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$. Alors le produit de convolution $\mu = \nu^{(-)} * \nu$ est une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$, de type positif car sa transformée de Fourier $\hat{\mu} = |\hat{\nu}|^2$ est positive, et on déduit du Théorème ci-dessus les deux résultats suivants:

Théorème 4.2. *Pour toute mesure positive finie ν sur $\mathbb{R}$, la fonction*

$$t \;\longmapsto\; \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl[-t\,(y-x)^2\bigr]\, d\nu(x)\, d\nu(y) \tag{4.4}$$

est J-concave.

Théorème 4.3. *Pour tout $n \geqslant 1$ entier, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels, la fonction*

$$t \;\longmapsto\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\bigl[-t\,(x_k - x_j)^2\bigr] \tag{4.5}$$

est J-concave.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace de Schwartz (complexe) des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment différentiables et qui décroissent rapidement à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées. Son dual topologique $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des formes $\mathbb{C}$-linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, est l'espace des "distributions tempérées" (complexes) sur $\mathbb{R}$.

Les éléments positifs de $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$, c'est-à-dire les formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui prennent une valeur réelle positive sur toute fonction de Schwartz réelle positive, sont les mesures de Radon réelles positives qui sont "tempérées", c'est-à-dire pour lesquelles la masse de l'intervalle $[-N, N]$ est majorée par une puissance de N. Ceci inclut bien sûr les mesures positives finies sur $\mathbb{R}$, mais aussi beaucoup de mesures infinies intéressantes, telles que les "peignes de Dirac"

$$\operatorname{comb}(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{dirac}(\alpha n) \tag{4.6}$$

où α est réel strictement positif, et plus généralement toutes les mesures de Radon positives périodiques.

La transformation de Fourier est bien définie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$, voir par exemple le Chapitre 4 de [KG], et la transformée d'une distribution tempérée est encore une distribution tempérée. Et, en restriction aux distributions tempérées paires, c'est-à-dire symétriques par rapport à 0, la transformation de Fourier est involutive. On a alors le résultat suivant:

Théorème 4.4. *Soient μ et $\hat{\mu}$ deux distributions tempérées sur $\mathbb{R}$, paires et réelles positives, et qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Alors, les fonctions $G\mu, G\hat{\mu} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définies par*

$$(G\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\mu(x)$$

$$(G\hat{\mu})(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\hat{\mu}(x)$$

sont liées par la relation

$$(G\hat{\mu})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot (G\mu)\Bigl(\frac{\pi^2}{t}\Bigr) \tag{4.7}$$

et sont J-concaves.

Démonstration. Pour tout $t > 0$, définissons la fonction $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_t(x) = \exp(-tx^2)$. Ces fonctions sont dans l'espace de Schwartz, et dépendent continûment de t, donc les "intégrales" qui apparaissent dans l'énoncé ont un sens, et définissent des fonctions $G\mu, G\hat{\mu}$ continues.

Comme on le sait, la transformée de Fourier de f_t est

$$\hat{f}_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\Big(-\frac{\pi^2 x^2}{t}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot f_{\pi^2/t}(x) \tag{4.8}$$

et donc

$$(G\hat{\mu})(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x)\, d\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_t(x)\, d\mu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot (G\mu)(\pi^2/t)$$

qui est la relation cherchée entre $G\mu$ et $G\hat{\mu}$. Avec la Proposition 3.4, elle montre que la J-concavité de $G\mu$ équivaut à celle de $G\hat{\mu}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, la mesure $\mu_\epsilon = f_\epsilon \cdot \mu$ est une mesure positive *finie*, et sa transformée de Fourier $\hat{\mu}_\epsilon = \hat{f}_\epsilon * \hat{\mu}$ est réelle positive puisque $\hat{f}_\epsilon$ et $\hat{\mu}$ sont réelles positives. On peut donc lui appliquer le Théorème 4.1, qui nous dit que la fonction $G\mu_\epsilon$ est J-concave. Mais d'autre part,

$$(G\mu_\epsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x)\, d\mu_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x) f_\epsilon(x)\, d\mu(x) = (G\mu)(\epsilon + t)$$

ce qui montre en particulier que les fonctions $G\mu_\epsilon$ convergent simplement vers $G\mu$ quand $\epsilon \to 0$. Et comme on l'a vu au chapitre précédent, une limite simple de fonctions J-concaves est encore J-concave; on en conclut que $G\mu$ est J-concave. □

Ce Théorème est donc essentiellement équivalent au Théorème 4.1, mais cette nouvelle formulation présente plusieurs avantages. D'abord, elle montre clairement les rôles symétriques joués par μ et $\hat{\mu}$. Ensuite, elle englobe les mesures de masse infinie, et tout particulièrement les peignes de Dirac (4.6) qui sont "optimaux" pour la propriété de J-concavité.

En effet, pour $\mu = \mathrm{comb}(\alpha)$ avec $\alpha > 0$, on a $\hat{\mu} = \alpha^{-1}\,\mathrm{comb}(\alpha^{-1})$ et

$$(G\mu)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-tn^2\alpha^2) = J(t\alpha^2/\pi). \tag{4.9}$$

Or, les fonctions de la forme $t \mapsto aJ(bt)$ sont très particulières parmi les fonctions J-concaves: en un sens, elles jouent le même role que les fonctions affines parmi les fonctions concaves. Concrètement, elles réalisent l'égalité dans l'inégalité de quasi-concavité (3.4), pour λ bien choisi.

5 Lien avec l'équation de la chaleur sur la droite

Pour tous $t > 0$ et x réel, notons

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2t}\Big) \tag{5.1}$$

la densité de la loi gaussienne centrée de variance t.

Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $t > 0$, définissons la fonction $u_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u_t = g_t * \nu$, et notons $u : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x,t) = u_t(x)$, i.e.

$$u(x,t) = u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} g_t(x-y)\, d\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{(x-y)^2}{2t}\Big]\, d\nu(y) \tag{5.2}$$

Comme on le sait bien, cette fonction u est infiniment différentiable et vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.3}$$

En outre, les fonctions u_t sont positives et intégrables, d'intégrale $\|\nu\|$, et convergent vers ν quand $t \to 0$ au sens des distributions.

Il serait tentant de dire que cette fonction u est "la solution" de l'équation de la chaleur (5.3) avec condition initiale ν. Cependant, les questions d'unicité pour l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ sont assez subtiles, même pour une condition initiale très régulière, et nécessitent de spécifier précisément dans quel espace fonctionnel on cherche la solution [Can, Wid]. Je contournerai ces difficultés en disant que la fonction u donnée par la formule (5.2) est "la solution canonique" de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale ν.

Pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} u_t(x)^2 &= \frac{1}{2\pi t} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{(x-z)^2}{2t}\Big]\, d\nu(y)\, d\nu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi t} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big[-\frac{1}{t}\Big(x - \frac{y+z}{2}\Big)^2\Big] \exp\Big[-\frac{(z-y)^2}{4t}\Big]\, d\nu(y)\, d\nu(z) \end{aligned} \tag{5.4}$$

ce qui montre que la fonction u_t est de carré intégrable, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x)^2\, dx &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big[-\frac{(z-y)^2}{4t}\Big]\, d\nu(y)\, d\nu(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{w^2}{4t}\Big)\, d\mu(w) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, (G\mu)\Big(\frac{1}{4t}\Big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

où on a posé $\mu = \nu^{(-)} * \nu$. D'après le Théorème 4.2, la fonction $G\mu$ est J-concave, et d'après la Proposition 3.4, il en est de même pour la fonction $\mathcal{E}$. Nous avons ainsi établi le

Théorème 5.1. *Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$, et $u : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la solution canonique (5.2) de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale ν. Alors, la fonction d'énergie $\mathcal{E} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ de cette solution, définie par*

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2\, dx = \iint_{\mathbb{R}^2} g_{2t}(z-y)\, d\nu(y)\, d\nu(z) \tag{5.6}$$

est J-concave.

Bien sûr, ce Théorème n'est pas autre chose qu'une reformulation du Théorème 4.2 dans le langage de l'équation de la chaleur. L'hypothèse essentielle ici est que la condition initiale est *positive*.

6 Enoncés analogues sur le cercle

Pour tous $t > 0$ et x réel, notons

$$\begin{aligned} H(x,t) = H_t(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\big[-t(x+n)^2\big] \\ &= e^{-tx^2}\, \vartheta_3\Big(itx \;\Big|\; \frac{it}{\pi}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \vartheta_3\Big(\pi x \;\Big|\; \frac{i\pi}{t}\Big) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Pour t fixé, la fonction $H_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 1-périodique, et on peut donc aussi la considérer comme une fonction $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sa valeur moyenne est $\sqrt{\pi/t}$, et

$$0 < H_t(x) \leqslant H_t(0) = J(t/\pi)\,. \tag{6.2}$$

On peut se demander ce que devient le Théorème 4.4 en restriction aux mesures μ qui sont invariantes par les translations entières. Une telle mesure μ est entièrement déterminée par sa restriction à une période, par exemple l'intervalle $[0,1[$, et peut donc être vue comme une mesure positive finie sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En outre, dans ce cas, la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est une mesure portée par $\mathbb{Z}$, qu'on peut identifier à une fonction sur $\mathbb{Z}$. Finalement, on obtient le résultat suivant:

Théorème 6.1. *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, paire, et $\hat{\mu} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée paire, qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Alors, les fonctions $H\mu, G\hat{\mu} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définies par*

$$(H\mu)(t) = \int_{\mathbb{T}} H(x,t)\, d\mu(x)$$
$$(G\hat{\mu})(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-tn^2)\, \hat{\mu}(n)$$

sont liées par la relation

$$(G\hat{\mu})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot (H\mu)\Big(\frac{\pi^2}{t}\Big) \tag{6.3}$$

et sont J-concaves.

Comme plus haut, on peut appliquer ce résultat aux mesures de la forme $\mu = \nu^{(-)} * \nu$, où ν est une mesure positive finie sur le cercle, et il vient:

Théorème 6.2. *Pour toute mesure positive finie ν sur $\mathbb{T}$, la fonction*

$$t \;\longmapsto\; \iint_{\mathbb{T}^2} H_t(y-x)\, d\nu(x)\, d\nu(y) \tag{6.4}$$

est J-concave.

Théorème 6.3. *Pour tout $n \geqslant 1$ entier, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ éléments de $\mathbb{T}$, la fonction*

$$t \;\longmapsto\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_t(x_k - x_j) \tag{6.5}$$

est J-concave.

Comme précédemment, on peut reformuler ces résultats dans le langage de l'équation de la chaleur. Pour tous $t > 0$ et x réel, définissons

$$h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, H\Big(x, \frac{1}{2t}\Big) = \vartheta_3(\pi x \mid 2\pi i t) \tag{6.6}$$

Comme on le sait, ces fonctions $h_t : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ constituent le "noyau de la chaleur" sur $\mathbb{T}$, dans le sens suivant. Si ν est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, définissons pour tout $t > 0$ la fonction $u_t : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par $u_t = h_t * \nu$, et notons $u : \mathbb{T} \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que $u(x,t) = u_t(x)$, c'est-à-dire

$$u(x,t) = u_t(x) = \int_{\mathbb{T}} h_t(x-y)\, d\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{T}} H\Big(x-y, \frac{1}{2t}\Big)\, d\nu(y) \tag{6.7}$$

alors u est infiniment différentiable et vérifie l'équation de la chaleur (5.3) sur $\mathbb{T} \times]0,\infty[$. En outre, les fonctions u_t sont positives, de moyenne $\|\nu\|$, et convergent vers ν quand $t \to 0$ au sens des distributions. Il n'existe pas d'autre fonction vérifiant ces conditions, ce qui permet de dire que (6.7) est *la* solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{T}$ avec condition initiale ν.

De la formule

$$u_t^2(x) = \iint_{\mathbb{T}^2} h_t(x-y)h_t(x-z)\,d\nu(y)\,d\nu(z) \tag{6.8}$$

on déduit que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \int_{\mathbb{T}} u_t(x)^2\,dx = \iint_{\mathbb{T}^2} d\nu(y)\,d\nu(z)\left\{\int_{\mathbb{T}} h_t(x-y)h_t(x-z)\,dx\right\}\\
&= \iint_{\mathbb{T}^2} (h_t * h_t)(z-y)\,d\nu(y)\,d\nu(z) = \iint_{\mathbb{T}^2} h_{2t}(z-y)\,d\nu(y)\,d\nu(z)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\iint_{\mathbb{T}^2} H\Big(z-y,\frac{1}{4t}\Big)\,d\nu(y)\,d\nu(z)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{T}} H\Big(w,\frac{1}{4t}\Big)\,d\mu(w) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,(H\mu)\Big(\frac{1}{4t}\Big)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

où on a posé $\mu = \nu^{(-)} * \nu$. D'après le Théorème 6.1 ou le Théorème 6.2, la fonction $H\mu$ est J-concave, et d'après la Proposition 3.4, il en est de même pour la fonction $\mathcal{E}$. Nous avons ainsi établi le

Théorème 6.4. *Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, et $u : \mathbb{T} \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la solution (6.7) de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{T}$ avec condition initiale ν. Alors, la fonction d'énergie $\mathcal{E} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ de cette solution, définie par*

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{T}} u(x,t)^2\,dx = \iint_{\mathbb{T}^2} h_{2t}(z-y)\,d\nu(y)\,d\nu(z) \tag{6.10}$$

est J-concave.

Granularité. Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$. On définit sa *granularité* $\operatorname{gran}(\mu)$ de l'une des manières suivantes:

$$\begin{aligned}
\operatorname{gran}(\mu) &= \big(\nu^{(-)} * \nu\big)\{0\} = (\nu\otimes\nu)(\Delta)\\
&= \iint_{\mathbb{T}^2} \mathbf{1}_\Delta(x,y)\,d\nu(x)\,d\nu(y) = \int_{\mathbb{T}} \nu\{x\}\,d\nu(x)\\
&= \sum_{x\in\mathbb{T}} \big(\nu\{x\}\big)^2
\end{aligned} \tag{6.11}$$

où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : x = y\}$ est la diagonale dans $\mathbb{T}^2$, et $\mathbf{1}_\Delta$ sa fonction caractéristique. Bien sûr, la granularité est nulle si et seulement si la mesure est sans atome.

Cette quantité apparaît dans le bien connu *lemme de Wiener*, qui affirme que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \big|\hat\nu(k)\big|^2 \;\longrightarrow\; \operatorname{gran}(\nu) \tag{6.12}$$

quand $n \to \infty$. Cela se voit facilement, en notant d'abord que $\big|\hat\nu(k)\big|^2 = \hat\mu(k)$, où $\mu = \nu^{(-)} * \nu$, puis en écrivant

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \hat\mu(k) = \int_{\mathbb{T}} D_n(w)\,d\mu(w) = \iint_{\mathbb{T}^2} D_n(y-x)\,d\nu(x)\,d\nu(y) \tag{6.13}$$

où D_n est (essentiellement) le noyau de Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \exp(2\pi i k x) = \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)\sin \pi x} \tag{6.14}$$

Quand $n \to \infty$, les fonctions D_n convergent simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$ sur le cercle, et de façon dominée, ce qui donne le résultat (6.12).

Des arguments similaires donnent le comportement asymptotique de la fonction d'énergie (6.10) quand $t \to 0$ et $t \to \infty$. Pour t petit, les fonctions $\sqrt{4\pi t} \cdot h_{2t}$ convergent simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$ sur le cercle, et de façon dominée, donc $\sqrt{4\pi t} \cdot \mathcal{E}(t) \to \mathrm{gran}(\nu)$ quand $t \to 0$. Pour t grand, les fonctions h_{2t} convergent uniformément vers 1, donc $\mathcal{E}(t) \to \|\nu\|^2$ quand $t \to \infty$. Ces estimations asymptotiques, combinées avec la propriété de J-concavité, conduisent à une minoration globale de la fonction d'énergie:

Théorème 6.5. *Pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{T}$ de granularité non nulle, la fonction d'énergie* (6.10) *vérifie*

$$\mathcal{E}(t) \;\geqslant\; J\left[\frac{4\pi t}{(\mathrm{gran}\,\nu)^2}\right] \tag{6.15}$$

pour tout $t > 0$.

Démonstration. Posons $g = \mathrm{gran}(\nu) > 0$, et soit $t > 0$ quelconque. La fonction d'énergie $\mathcal{E}$ est J-concave, par le Théorème 6.4, et il en résulte, par la Proposition 3.3, que

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{J(\lambda t)} \geqslant \min\left\{\frac{\mathcal{E}(s)}{J(\lambda s)}, \frac{\mathcal{E}(u)}{J(\lambda u)}\right\} \tag{6.16}$$

pour tous $\lambda, s, u > 0$ vérifiant $s \leqslant t \leqslant u$. En faisant tendre $s \to 0$ et $u \to \infty$, on obtient

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{J(\lambda t)} \geqslant \min\left\{g\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}}, 1\right\} \tag{6.17}$$

quels que soient $\lambda, t > 0$. Enfin, en prenant $\lambda = 4\pi/g^2$, on obtient l'inégalité cherchée. ☐

On démontre de même le résultat suivant, plus général:

Théorème 6.6. *Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$, et $\mathcal{E}$ la fonction d'énergie* (6.10)*. On suppose qu'il existe $\lambda, s > 0$ tels que $\mathcal{E}(s) \geqslant J(\lambda s)$. Alors $\mathcal{E}(t) \geqslant J(\lambda t)$ pour tout $t \geqslant s$.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tous $x_1, \ldots, x_n$ éléments de $\mathbb{T}$, la mesure

$$\nu = \frac{\mathrm{dirac}(x_1) + \cdots + \mathrm{dirac}(x_n)}{n}$$

est de granularité au moins $1/n$, avec égalité si les points sont distincts. En appliquant le Théorème 6.5 à cette mesure, on obtient le résultat suivant, qui est une reformulation du théorème de Cohn et Kumar [CK1] affirmant l'optimalité universelle du réseau $\mathbb{Z}$ en dimension un:

Théorème 6.7 (Cohn-Kumar)**.** *Pour tout $n \geqslant 1$ entier, et $x_1, \ldots, x_n$ éléments de $\mathbb{T}$, on a*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{2t}(x_k - x_j) \;\geqslant\; n^2 J(4\pi n^2 t) \;= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{2t}\Big(\frac{k}{n} - \frac{j}{n}\Big) \tag{6.18}$$

quel que soit $t > 0$.

En effet, si on considère l'arrangement 1-périodique de points de $\mathbb{R}$ dont la projection sur $\mathbb{T}$ est l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (ou plutôt le multi-ensemble, si on autorise certains des x_j à être égaux), son énergie d'interaction gaussienne est, à normalisation près, $\sum_{j,k} h_{2t}(x_k - x_j)$; et le résultat ci-dessus affirme que cette énergie est minimale quand les points x_j sont régulièrement espacés sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire quand leurs préimages sur $\mathbb{R}$ forment un réseau (ici, de densité n).

7 Démonstration du théorème principal

7.1 Les fonctions R_s

Pour tous $s > 0$ et x réel, définissons

$$R_s(x) = \exp(-\pi s x^2)\,\left(-\pi^2 s^2 x^4 + (1-\omega(s))\pi s x^2 + \rho(s)\right). \tag{7.1}$$

De manière générale, la transformée de Fourier d'une fonction (de x) de la forme

$$\exp(-\pi s x^2)\,\left(A(\pi s x^2)^2 + B(\pi s x^2) + C\right)$$

où A, B, C sont des constantes, est la fonction

$$s^{-1/2}\exp(-\pi x^2/s)\,\left(A'(\pi x^2/s)^2 + B'(\pi x^2/s) + C'\right)$$

avec

$$\begin{cases} A' = A \\ B' = -3A - B \\ C' = \frac{3}{4}A + \frac{1}{2}B + C \end{cases} \tag{7.2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(x) &= s^{-1/2}\exp\Big(-\frac{\pi x^2}{s}\Big)\,\Big[-\Big(\frac{\pi x^2}{s}\Big)^2 + \big(2+\omega(s)\big)\Big(\frac{\pi x^2}{s}\Big) + \big(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\omega(s) + \rho(s)\big)\Big] \\ &= s^{-1/2}\exp\Big(-\frac{\pi x^2}{s}\Big)\,\Big[-\Big(\frac{\pi x^2}{s}\Big)^2 + \big(1-\omega(s^{-1})\big)\Big(\frac{\pi x^2}{s}\Big) + \rho(s^{-1})\Big] \\ &= s^{-1/2}R_{1/s}(x) \end{aligned} \tag{7.3}$$

d'après (2.31) et (2.32). En particulier, la fonction R_1 est égale à sa transformée de Fourier. D'autre part, j'affirme que les fonctions R_s satisfont

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} R_s(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nR_s(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_s'(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nR_s'(n) = 0. \tag{7.4}$$

Les identités $\sum_n nR_s(n) = \sum_n R_s'(n) = 0$ découlent immédiatement de la parité des fonctions R_s. En outre, grâce aux formules (2.4) on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_s(n) &= -\pi^2 s^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4\exp(-\pi s n^2) + (1-\omega(s))\pi s \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \exp(-\pi s n^2) \\ &\qquad + \rho(s)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi s n^2) \\ &= -s^2 J''(s) + (\omega(s)-1)sJ'(s) + \rho(s)J(s) \\ &= -J^{[2]}(s) + \omega(s)J^{[1]}(s) + \rho(s)J^{[0]}(s) \end{aligned} \tag{7.5}$$

et cette dernière expression est nulle d'après (2.29). Enfin, on a

$$R_s'(x) = 2\pi s x\,\exp(-\pi s x^2)\,\left[\pi^2 s^2 x^4 + (\omega(s)-3)\pi s x^2 + (1-\omega(s)-\rho(s))\right] \tag{7.6}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} nR_s'(n) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi s n^2)\Big[2\pi^3 s^3 n^6 + 2\pi^2 s^2(\omega(s)-3)n^4 \\
&\qquad\qquad + 2\pi s(1-\omega(s)-\rho(s))n^2\Big] \\
&= 2\pi^3 s^3 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 \exp(-\pi s n^2) + 2\pi^2 s^2(\omega(s)-3)\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4\exp(-\pi s n^2) \\
&\quad + 2\pi s(1-\omega(s)-\rho(s))\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \exp(-\pi s n^2) \\
&= -2s^3 J^{(3)}(s) + 2s^2(\omega(s)-3)J^{(2)}(s) - 2s(1-\omega(s)-\rho(s))J^{(1)}(s) \\
&= -2J^{[3]}(s) + 2\omega(s)J^{[2]}(s) + 2\rho(s)J^{[1]}(s)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

et cette dernière expression est nulle d'après (2.30).

J'utiliserai également les fonctions U_s, qui sont une forme "normalisée" des R_s,

$$
U_s(x) = \frac{R_s(x)}{R_s(0)} = \frac{R_s(x)}{\rho(s)} = \exp(-\pi s x^2)\left[1 + \frac{1-\omega(s)}{\rho(s)}\pi s x^2 - \frac{1}{\rho(s)}\pi^2 s^2 x^4\right] \tag{7.8}
$$

si bien que $U_s(0) = 1$.

Revenons à la démonstration du Théoreme 4.1. Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (4.1). On note que la fonction

$$
\mathcal{G}(t) = (G\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-tx^2)\, d\mu(x)
$$

ne dépend que de la partie paire de μ, i.e. $(\mu + \mu^{(-)})/2$. On peut donc supposer sans perte de généralité que μ est paire ($\mu^{(-)} = \mu$), et donc de type positif, c'est-à-dire que sa transformée de Fourier est réelle positive. D'autre part, $\mathcal{G}$ est infiniment différentiable, avec

$$
\mathcal{G}'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-x^2)\exp(-tx^2)\, d\mu(x)\,, \qquad \mathcal{G}''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^4 \exp(-tx^2)\, d\mu(x)
$$

$$
\mathcal{G}^{[1]}(t) = t\mathcal{G}'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-tx^2)\exp(-tx^2)\, d\mu(x)
$$

$$
\mathcal{G}^{[2]}(t) = t\mathcal{G}'(t) + t^2\mathcal{G}''(t) = \int_{\mathbb{R}} (-tx^2 + t^2x^4)\exp(-tx^2)\, d\mu(x)
$$

et par la Proposition 3.7, la J-concavité de $\mathcal{G}$ revient à dire que, pour tous $t, s > 0$,

$$
\mathcal{G}^{[2]}(t) \leqslant \omega(s)\cdot \mathcal{G}^{[1]}(t) + \rho(s)\cdot\mathcal{G}^{[0]}(t)
$$

c'est-à-dire

$$
\int_{\mathbb{R}} (-t^2x^4 + tx^2(1-\omega(s)) + \rho(s))\exp(-tx^2)\, d\mu(x) \;\geqslant\; 0 \tag{7.9}
$$

ou encore, en posant $\alpha = \sqrt{t/\pi s}$,

$$
\int_{\mathbb{R}} R_s(\alpha x)\, d\mu(x) \;\geqslant\; 0 \tag{7.10}
$$

pour tous $s, \alpha > 0$. Mais bien sûr, vu l'invariance d'échelle du problème, il suffit de traiter le cas $\alpha = 1$. En résumé, nous avons démontré que le Théoreme 4.1 est équivalent à l'énoncé suivant:

Théorème 7.1. *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$, de type positif. Pour tout $s > 0$,*

$$
\int_{\mathbb{R}} R_s(x)\, d\mu(x) \;\geqslant\; 0. \tag{7.11}
$$

7.2 Stabilité au sens de Ruelle

Dans son article [Ru1], puis dans son livre [Ru2], David Ruelle cherche à minorer l'énergie potentielle de n particules classiques dans $\mathbb{R}^\nu$ ayant des interactions deux à deux, c'est-à-dire la quantité

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi(x_k - x_j) \tag{7.12}$$

où $\Phi : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ est la fonction représentant l'interaction, qu'on peut supposer paire sans perte de généralité, et $x_1, \ldots, x_n$ des points quelconques dans $\mathbb{R}^\nu$. (Voir aussi [FR] pour le contexte et les travaux antérieurs.)

Ruelle dit que le potentiel Φ est *stable* si l'expression ci-dessus est positive pour tout choix des points x_j (et de n) dans $\mathbb{R}^\nu$. (Plus précisément, il montre qu'une notion classique de stabilité, qu'il attribue à Onsager, est équivalente à cette condition.) Et il observe que tout potentiel de la forme $\Phi_1 + \Phi_2$, où Φ_1 est positif et Φ_2 de type positif, est stable. La réciproque[1] est fausse: il existe des potentiels stables qui ne peuvent pas s'écrire comme somme d'un potentiel positif et d'un potentiel de type positif [ANP, LS1, LS2].

Beaucoup d'énoncés du présent article (les Théorèmes 4.2, 4.3, 6.2, 6.3) reviennent à affirmer que certains potentiels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$ sont stables au sens de Ruelle. Notamment, le Théorème 4.3 (qui est un cas particulier du Théorème 4.1, avec $\mu = \nu^{(-)} * \nu$) revient à dire que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_s(\alpha(x_k - x_j)) \geqslant 0 \tag{7.13}$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$ et $s, \alpha > 0$, c'est-à-dire que les fonctions R_s sont stables au sens de Ruelle (sur $\mathbb{R}$). Les Théorèmes 4.1 et 7.1 sont, semble-t-il, des énoncés plus forts. Comme on le verra, ils se prêtent très bien à l'idée de Ruelle de décomposer le potentiel d'interaction, ici R_s.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un potentiel stable au sens de Ruelle. En prenant les x_j régulièrement espacés dans l'expression (7.12), c'est-à-dire $x_j = j\lambda$ $(j = 1, \ldots, n)$ pour un certain $\lambda > 0$, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi(\lambda(k-j)) = \sum_{\ell=-n}^{n} \big(n - |\ell|\big)\, \Phi(\ell\lambda)$$

pour tout n, et donc

$$\forall \lambda > 0 \quad \sum_{x \in \lambda\mathbb{Z}} \Phi(x) \geqslant 0 \tag{7.14}$$

si la fonction Φ décroît suffisamment vite à l'infini (disons $\Phi(x) = O\big(|x|^{-1-\epsilon}\big)$ pour un certain $\epsilon > 0$) pour garantir que ces sommes convergent absolument.

Disons qu'un potentiel Φ est *stable sur les réseaux* s'il satisfait la condition (7.14). Comme on vient de le voir, la stabilité au sens de Ruelle implique la stabilité sur les réseaux. En général, la réciproque n'est pas vraie; mais elle peut être vraie pour des potentiels d'une forme particulière, et le Théorème 4.3 peut se reformuler de cette manière. De façon précise:

Théorème 7.2. *Un potentiel de la forme $\Phi(x) = e^{-x^2}(-x^4 + Ax^2 + B)$, où A et B sont des constantes réelles, est stable au sens de Ruelle (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si il est stable sur les réseaux.*

[1] Dans son livre [Ru2], Ruelle constate que ce critère est "très efficace" pour prouver la stabilité, et pose la question de la réciproque en note de bas de page.

Démonstration. Dire que Φ est stable sur les réseaux revient à dire que pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi\big(n\sqrt{\pi x}\big) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}(-\pi^2 n^4 x^2 + A\pi n^2 x + B) \\ &= -x^2 J''(x) - AxJ'(x) + BJ(x) \\ &= -J^{[2]}(x) + (1-A)J^{[1]}(x) + BJ^{[0]}(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$J^{[2]} \leqslant (1-A)J^{[1]} + BJ^{[0]} \ .$$

D'après (2.41), cette inégalité équivaut à $B \geqslant \rho(s)$, où s est l'unique nombre réel strictement positif tel que $\omega(s) = 1 - A$. Mais alors, pour tout $x > 0$,

$$R_s\Big(\frac{x}{\sqrt{\pi s}}\Big) = e^{-x^2}\big[-x^4 + (1-\omega(s))x^2 + \rho(s)\big] \leqslant e^{-x^2}\big[-x^4 + Ax^2 + B\big] = \Phi(x)$$

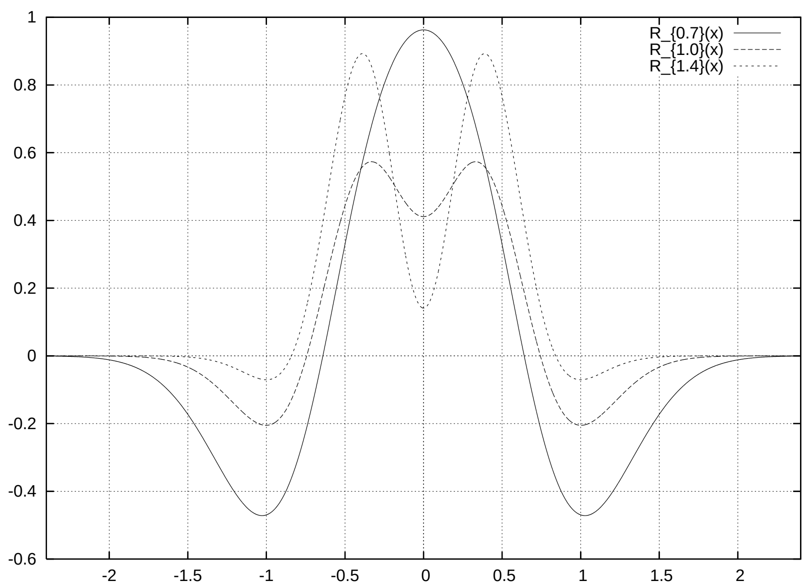
et la fonction R_s est stable au sens de Ruelle, donc Φ aussi. $\square$

Il est important, dans cet énoncé, que le coefficient de x^4 soit négatif (au sens large). Il n'y a pas d'énoncé similaire quand le coefficient de x^4 est strictement positif; en particulier:

Proposition 7.3. *Le potentiel $\Phi(x) = e^{-x^2}(x^4 - \frac{3}{2}x^2)$ est stable sur les réseaux, mais n'est pas stable au sens de Ruelle.*

Démonstration. Un calcul similaire au précédent montre que la stabilité de Φ sur les réseaux équivaut à $J^{[2]} + \frac{1}{2}J^{[1]} \geqslant 0$, et cela a été établi dans le Lemme 2.1.
Mais Φ n'est pas stable au sens de Ruelle, car $\Phi(\pm x) < -\Phi(0)$ pour certaines valeurs de x. $\square$

Voici l'aspect de certains de ces potentiels R_s (pour $s = 0.7, 1, 1.4$):



Pour s petit, plus précisément quand $\omega(s) + \rho(s) \geqslant 1$, ce qui correspond à $s \leqslant 0.83034492\ldots$, la fonction R_s a un maximum global à l'origine: l'interaction est répulsive à petite distance (jusqu'à 1 environ) et attractive ensuite. Dans le cas contraire, la fonction R_s a un minimum local à l'origine: l'interaction est attractive aux petites et aux grandes distances, et répulsive aux distances intermédiaires.

7.3 Une décomposition du Théorème 7.1

Equation de Laplace discrète. Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ l'opérateur aux différences finies qui, à une fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, associe la fonction $\mathcal{L}\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(\mathcal{L}\phi)(n) = 2\phi(n) - \phi(n-1) - \phi(n+1) \tag{7.15}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On vérifie facilement le résultat suivant:

Lemme 7.4. *Soit $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\,\psi(n)| < \infty \tag{7.16}$$

et vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,\psi(n) = 0. \tag{7.17}$$

Alors, il existe exactement une fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(n) \to 0$ quand $|n| \to \infty$ et vérifiant l'équation $\mathcal{L}\phi = \psi$. Cette fonction est donnée par

$$\phi(n) = -\sum_{m>0} m\,\psi(n+m) = -\sum_{m>0} m\,\psi(n-m). \tag{7.18}$$

On note que si la fonction ψ est paire, ou impaire, alors il en est de même pour ϕ.

En particulier, d'après (7.4), on peut appliquer ce lemme aux fonctions U_s et U_s' restreintes aux entiers: il existe pour tout $s > 0$ une fonction paire $\phi_{0,s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et une fonction impaire $\phi_{1,s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ qui tendent (rapidement) vers 0 à l'infini, pour lesquelles $U_s = \mathcal{L}\phi_{0,s}$ et $U_s' = \mathcal{L}\phi_{1,s}$, c'est-à-dire

$$U_s(n) = 2\phi_{0,s}(n) - \phi_{0,s}(n-1) - \phi_{0,s}(n+1) \tag{7.19}$$
$$U_s'(n) = 2\phi_{1,s}(n) - \phi_{1,s}(n-1) - \phi_{1,s}(n+1) \tag{7.20}$$

pour tout entier n. Ces fonctions sont données par

$$\phi_{0,s}(n) = -\sum_{m>0} m\,U_s(n+m) \tag{7.21}$$
$$\phi_{1,s}(n) = -\sum_{m>0} m\,U_s'(n+m) \tag{7.22}$$

et vérifient notamment

$$\phi_{0,s}(0) = \tfrac{1}{2} + \phi_{0,s}(1), \quad \phi_{1,s}(0) = 0, \tag{7.23}$$

car $1 = U_s(0) = 2\phi_{0,s}(0) - \phi_{0,s}(-1) - \phi_{0,s}(1) = 2\big[\phi_{0,s}(0) - \phi_{0,s}(1)\big]$ puisque $\phi_{0,s}$ est paire, tandis que l'imparité de $\phi_{1,s}$ entraîne évidemment la deuxième égalité.

Interpolation de Vaaler. On définit les fonctions $I_0, I_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$I_0(x) = \operatorname{sinc}^2(\pi x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} = \int_{-1}^{1} \big(1 - |t|\big)\ \exp(2\pi i t x)\,dt \tag{7.24}$$
$$= \int_0^1 2(1-t)\cos(2\pi t x)\,dt \tag{7.25}$$

et

$$I_1(x) = x\,I_0(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x} = \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\pi i}\ \exp(2\pi i t x)\,dt \tag{7.26}$$
$$= \int_0^1 \pi^{-1}\sin(2\pi t x)\,dt \tag{7.27}$$

Ce sont des fonctions entières, en particulier C^1, bornées sur $\mathbb{R}$ ainsi que leurs dérivées, avec

$$I_0(n) = I_1'(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
$$I_1(n) = I_0'(n) = 0$$

pour tout entier relatif n.

Soit $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 tendant suffisamment rapidement vers 0 à l'infini, ainsi que sa dérivée; par exemple, telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |U(n)| + |U'(n)| < \infty\,.$$

Alors on peut définir la fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$V(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U(n)\, I_0(x-n) + U'(n)\, I_1(x-n) \tag{7.28}$$
$$= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{U(n)}{(x-n)^2} + \frac{U'(n)}{x-n} \tag{7.29}$$

qui est de classe C^1, et vérifie $V(n) = U(n)$ et $V'(n) = U'(n)$ pour tout n entier relatif. Je dirai que la fonction V est *l'interpolante de Vaaler* de U. Ce procédé d'interpolation, introduit par Vaaler [Vaa], est utilisé notamment par Cohn et Kumar [CK1] pour prouver l'optimalité universelle de $\mathbb{Z}$.

On démontrera le Théorème 7.1 à partir des deux résultats suivants. Pour tout $s > 0$, notons $V_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'interpolante de Vaaler de la fonction $U_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 7.5. *Pour tout $s \geqslant 1$, la fonction V_s est de type positif.*

Proposition 7.6. *Pour tout $s \geqslant 1$, on a $U_s \geqslant V_s$.*

Les expériences numériques suggèrent que ces deux énoncés sont valables pour $s > 0$ quelconque, mais il me suffira de les avoir pour $s \geqslant 1$. Ces deux Propositions seront démontrées plus loin dans le chapitre; pour le moment, voyons comment elles entraînent le Théorème 7.1.

Démonstration du Théorème 7.1. Supposons qu'on puisse écrire $R_s = \Phi_1 + \Phi_2$, où $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues paires, avec Φ_1 positive et Φ_2 de type positif. Une fonction de type positif est toujours bornée, donc Φ_1 et Φ_2 sont bornées.

Il est évident que $\int \Phi_1\, \mu \geqslant 0$. D'autre part, par le théorème de Bochner, il existe une mesure positive finie ξ sur $\mathbb{R}$ dont Φ_2 est la transformée de Fourier:

$$\Phi_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i x y)\, d\xi(y) \tag{7.30}$$

et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_2(x)\, d\mu(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-2\pi i x y)\, d\mu(x)\, d\xi(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(y)\, d\xi(y) \geqslant 0 \tag{7.31}$$

puisque $\hat{\mu}$ est réelle positive, et donc finalement $\int R_s\, \mu \geqslant 0$.

Il reste à trouver une telle décomposition. Pour $s \geqslant 1$, on peut écrire $U_s = (U_s - V_s) + V_s$, où le premier terme est positif et le second de type positif, ce qui donne (à un facteur positif près) la décomposition cherchée pour R_s. En outre, on vérifie facilement que la fonction V_s, et donc aussi Φ_1 et Φ_2, sont intégrables[2] par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Pour $s \leqslant 1$, écrivons d'abord $s^{-1/2}R_{1/s} = \Phi_1 + \Phi_2$ avec Φ_1, Φ_2 comme ci-dessus. En appliquant la transformation de Fourier à cette égalité, avec (7.3), on obtient $R_s = \widehat{\Phi}_1 + \widehat{\Phi}_2$, où les fonctions $\widehat{\Phi}_1$ et $\widehat{\Phi}_2$ sont paires et continues, avec $\widehat{\Phi}_2$ positive et $\widehat{\Phi}_1$ de type positif. □

7.4 Démonstration de la Proposition 7.5

Lemme 7.7. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $x \geqslant 1.02$, on a*

$$|U_s(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi s - 1)x^4 \exp(\pi s(1 - x^2)) \tag{7.32}$$

$$|U_s'(x)| \leqslant \pi s(\pi s - 1)x^5 \exp(\pi s(1 - x^2)) \ . \tag{7.33}$$

Démonstration. Fixons $s \geqslant 1$, et écrivons $U_s(x) = e^{-\pi s x^2}P(x)$ avec $P(x) = 1 + Ax^2 - Bx^4$, où $A = \pi s(1 - \omega(s))/\rho(s)$ et $B = (\pi s)^2/\rho(s)$. Par le Lemme 2.8, on a

$$0 \leqslant A \leqslant B \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi s - 1)\, e^{\pi s}. \tag{7.34}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(x) &\leqslant 1 + Ax^2 \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^2 \leqslant 0.5202\,(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^2 \\ -P(x) &\leqslant Bx^4 \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^4 \end{aligned}$$

car $0.0202(\pi - 1)e^{\pi} > 1$, ce qui donne $|P(x)| \leqslant \frac{1}{2}(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^4$, et établit l'inégalité (7.32).

D'autre part, on a $U_s'(x) = e^{-\pi s x^2}Q(x)$, avec

$$\begin{aligned} Q(x) &= -2\pi s x\, P(x) + P'(x) \\ &= -2\pi s x(1 + Ax^2 - Bx^4) + 2Ax - 4Bx^3 \\ &= 2x\big[-\pi s - A(\pi s x^2 - 1) + Bx^2(\pi s x^2 - 2)\big] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Q(x)/2x &\leqslant Bx^2(\pi s x^2 - 2) \leqslant \tfrac{1}{2}\pi s(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^4 \\ -Q(x)/2x &\leqslant \pi s + A(\pi s x^2 - 1) \leqslant \pi s + \tfrac{1}{2}\pi s(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^2 \leqslant 0.5202\,\pi s(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^2 \end{aligned}$$

ce qui donne $|Q(x)/2x| \leqslant \frac{1}{2}\pi s(\pi s - 1)\, e^{\pi s}x^4$, et établit l'inégalité (7.33). □

Lemme 7.8. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $x \geqslant 1.5$, on a*

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi s(\pi s - 1)x^4(\pi s x^2 - 4)\, e^{\pi s(1 - x^2)} \tag{7.35}$$

$$\geqslant -2\pi^3(\pi - 1)\, \frac{x^8}{\pi x^2 + 4}\, e^{\pi(1 - x^2)} \tag{7.36}$$

[2]Cela résulte notamment de la dernière formule dans (7.50), car les fonctions L_0 et L_1 sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et les coefficients $\phi_{k,s}(n)$ sont sommables.

Démonstration. Ecrivons comme plus haut $U_s(x) = e^{-\pi s x^2} P(x)$ avec $P(x) = 1 + Ax^2 - Bx^4$. On a alors $U_s''(x) = Q(x)\, e^{-\pi s x^2}$, avec

$$\begin{aligned} Q(x) &= (-2\pi s + 4\pi^2 s^2 x^2) P(x) - 4\pi s x P'(x) + P''(x) \\ &= (-2\pi s + 4\pi^2 s^2 x^2) + A\,(2 - 10\pi s x^2 + 4\pi^2 s^2 x^4) - B\, x^2 (12 - 18\pi s x^2 + 4\pi^2 s^2 x^4) \\ &\geqslant -B\, x^2(-16\pi s x^2 + 4\pi^2 s^2 x^4) = -B \cdot 4\pi s x^4 (\pi s x^2 - 4) \end{aligned}$$

ce qui donne, avec (7.34), la première inégalité du lemme.
Cette inégalité, combinée avec $\pi s x^2 - 4 \leqslant \pi^2 s^2 x^4/(\pi s x^2 + 4)$, nous donne

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi^3 s^3 (\pi s - 1) \frac{x^8}{\pi s x^2 + 4}\, e^{\pi s (1 - x^2)} = -2\pi^3 x^8 \Phi(s)$$

où on a posé

$$\Phi(s) = s^3 \frac{\pi s - 1}{\pi s x^2 + 4}\, e^{\pi s (1 - x^2)}$$

(pour un $x \geqslant 1.5$ donné). La fonction Φ est décroissante sur l'intervalle $[1, \infty[$, en effet

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} &= \frac{3}{s} + \frac{\pi}{\pi s - 1} - \frac{\pi x^2}{\pi s x^2 + 4} + \pi(1 - x^2) \\ &= \frac{3}{s} + \frac{\pi(x^2 + 4)}{(\pi s - 1)(\pi s x^2 + 4)} + \pi(1 - x^2) \\ &\leqslant 3 + \frac{\pi}{\pi - 1}\, \frac{x^2 + 4}{\pi x^2 + 4} + \pi(1 - x^2) \end{aligned}$$

et cette dernière expression est manifestement décroissante en x (les trois termes le sont), et atteint donc son maximum pour $x = 1.5$, à savoir,

$$3 + \frac{\pi}{\pi - 1}\, \frac{1.5^2 + 4}{1.5^2 \pi + 4} + \pi(1 - 1.5^2) = -0.0986\ldots < 0\ .$$

On a donc $\Phi(s) \leqslant \Phi(1)$ et par suite

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi^3 x^8 \Phi(1) = -2\pi^3 x^8 \frac{\pi - 1}{\pi x^2 + 4}\, e^{\pi(1 - x^2)}$$

qui est la deuxième inégalité annoncée. □

Lemme 7.9. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $x \geqslant 1.22$, on a*

$$|U_s(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi - 1) x^4 \exp(\pi(1 - x^2))\ . \tag{7.37}$$

Démonstration. De l'inégalité

$$\log\Big(\frac{\pi s - 1}{\pi - 1}\Big) \leqslant \frac{\pi s - 1}{\pi - 1} - 1 = \frac{\pi}{\pi - 1}(s - 1) \leqslant \pi(s - 1)(x^2 - 1)$$

on déduit

$$\frac{\pi s - 1}{\pi - 1} \leqslant \exp(\pi(s - 1)(x^2 - 1)) = \frac{\exp(\pi(1 - x^2))}{\exp(\pi s(1 - x^2))}$$

ce qui, combiné avec (7.32), donne la majoration cherchée. □

Lemme 7.10. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $x \geqslant 2$, on a*

$$|U_s(x)| \leqslant 32(\pi-1)x^{-2}s^{-3}\exp(\pi(4-s-3x)) \tag{7.38}$$

$$\left|U_s'(x)\right| \leqslant 64\pi(\pi-1)x^{-1}s^{-2}\exp(\pi(4-s-3x)) \tag{7.39}$$

et d'autre part

$$\left|U_s(1)+\tfrac{1}{2}\right| \leqslant 0.032\, e^{-\pi s}/s^3 \tag{7.40}$$

$$\left|U_s'(1)\right| \leqslant 0.81\, e^{-\pi s}/s^2\,. \tag{7.41}$$

Démonstration. De l'inégalité

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{\pi s-1}{\pi-1}\Big)+3\log(s) &\leqslant \frac{\pi s-1}{\pi-1}-1+3(s-1)=\frac{4\pi-3}{\pi-1}(s-1)\\ &\leqslant 2\pi(s-1)\leqslant \pi(s-1)(x^2-2)\end{aligned}$$

on déduit

$$\frac{\pi s-1}{\pi-1}\,s^3 \leqslant \exp(\pi(s-1)(x^2-2))=\frac{\exp(\pi(2-s-x^2))}{\exp(\pi s(1-x^2))}$$

ce qui, combiné avec les inégalités (7.32) et (7.33), nous donne

$$|U_s(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi-1)x^4s^{-3}\exp(\pi(2-s-x^2)) \tag{7.42}$$

$$\left|U_s'(x)\right| \leqslant \pi(\pi-1)x^5s^{-2}\exp(\pi(2-s-x^2))\,. \tag{7.43}$$

D'autre part, on a

$$6\log(x/2)\leqslant 6(x/2-1)=3(x-2)\leqslant \pi(x-2)\leqslant \pi(x-2)(x-1)$$

et par conséquent

$$\frac{x^6}{64}\leqslant \exp(\pi(x-2)(x-1))=\frac{\exp(\pi(4-s-3x))}{\exp(\pi(2-s-x^2))}$$

ce qui, combiné avec (7.42) et (7.43), établit les inégalités (7.38) et (7.39) du lemme. Ensuite, la formule (7.4) affirme que

$$\begin{aligned}0&=\tfrac{1}{2}U_s(0)+U_s(1)+U_s(2)+U_s(3)+\cdots\\ &=U_s'(1)+2U_s'(2)+3U_s'(3)+\cdots\end{aligned}$$

On en déduit, avec les inégalités (7.38) et (7.39), que

$$\begin{aligned}\left|U_s(1)+\tfrac{1}{2}\right| &\leqslant \sum_{n\geqslant 2}|U_s(n)| \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 8(\pi-1)s^{-3}e^{\pi(4-s-3n)}\\ &= 8(\pi-1)\frac{e^{-\pi s}}{s^3}\sum_{n\geqslant 2}e^{\pi(4-3n)} = C_0\frac{e^{-\pi s}}{s^3}\end{aligned}$$

avec

$$C_0 = 8(\pi-1)\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-3\pi}} = 0.031996995\ldots$$

ce qui démontre (7.40), et d'autre part,

$$\begin{aligned}\left|U_s'(1)\right| &\leqslant \sum_{n\geqslant 2} n\left|U_s'(n)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 2} 64\pi(\pi-1)s^{-2}e^{\pi(4-s-3n)}\\ &= 64\pi(\pi-1)\frac{e^{-\pi s}}{s^2}\sum_{n\geqslant 2}e^{\pi(4-3n)} = C_1\frac{e^{-\pi s}}{s^2}\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = 64\pi(\pi-1)\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-3\pi}} = 0.804172201\ldots$$

ce qui démontre (7.41). $\square$

Lemme 7.11. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$|\phi_{0,s}(n)| \leqslant 397\, e^{-\pi(s+3n)} \tag{7.44}$$

$$|\phi_{1,s}(n)| \leqslant 9966\, e^{-\pi(s+3n)}/(n+1)\,. \tag{7.45}$$

Démonstration. D'après la formule (7.21) et les estimations du lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}|\phi_{0,s}(n)| &\leqslant \sum_{m>0} m\,|U_s(n+m)| \leqslant \sum_{m>0} m\cdot 8(\pi-1)e^{\pi(4-s-3n-3m)}\\ &= 8(\pi-1)e^{\pi(1-s-3n)}\sum_{m>0} m(e^{-3\pi})^{m-1} = C_0 e^{-\pi(s+3n)}\end{aligned}$$

avec

$$C_0 = \frac{8(\pi-1)e^{\pi}}{(1-e^{-3\pi})^2} = 396.52749\ldots$$

ce qui démontre (7.44). D'autre part, d'après (7.22),

$$\begin{aligned}|\phi_{1,s}(n)| &\leqslant \sum_{m>0} m\,\left|U_s'(n+m)\right| \leqslant \sum_{m>0} m\cdot 64\pi(\pi-1)\frac{e^{\pi(4-s-3n-3m)}}{n+m}\\ &\leqslant 64\pi(\pi-1)\frac{e^{\pi(1-s-3n)}}{n+1}\sum_{m>0} m(e^{-3\pi})^{m-1} = C_1\frac{e^{-\pi(s+3n)}}{n+1}\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = \frac{64\pi(\pi-1)e^{\pi}}{(1-e^{-3\pi})^2} = 9965.8229\ldots$$

ce qui démontre (7.45). $\square$

Soient $L_0, L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $L_k(x) = 2I_k(x) - I_k(x-1) - I_k(x+1)$, pour $k = 0, 1$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}L_0(x) &= 2I_0(x) - I_0(x-1) - I_0(x+1)\\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big[\frac{2}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big]\\ &= \frac{2\sin^2(\pi x)\,(1-3x^2)}{\pi^2 x^2(1-x^2)^2}\end{aligned} \tag{7.46}$$

et

$$\begin{aligned}L_1(x) &= 2I_1(x) - I_1(x-1) - I_1(x+1)\\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big[\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big]\\ &= \frac{2\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x(1-x^2)}\end{aligned} \tag{7.47}$$

Des décompositions de Fourier de I_0, I_1, on déduit celles de L_0, L_1 :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \int_{-1}^{1} \bigl(1-|t|\bigr)\bigl[2e^{2\pi i t x} - e^{2\pi i t(x-1)} - e^{2\pi i t(x+1)}\bigr]\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \bigl(1-|t|\bigr)e^{2\pi i t x}\bigl[2 - e^{-2\pi i t} - e^{2\pi i t}\bigr]\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} 4\sin^2(\pi t)\,\bigl(1-|t|\bigr)\exp(2\pi i t x)\,dt \\ &= \int_{0}^{1} 8\sin^2(\pi t)\,(1-t)\cos(2\pi t x)\,dt \end{aligned} \tag{7.48}$$

et

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\pi i}\bigl[2e^{2\pi i t x} - e^{2\pi i t(x-1)} - e^{2\pi i t(x+1)}\bigr]\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\pi i}e^{2\pi i t x}\bigl[2 - e^{-2\pi i t} - e^{2\pi i t}\bigr]\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2\operatorname{sgn}(t)}{\pi i}\sin^2(\pi t)\ \exp(2\pi i t x)\,dt \\ &= \int_{0}^{1} 4\pi^{-1}\sin^2(\pi t)\ \sin(2\pi t x)\,dt\,. \end{aligned} \tag{7.49}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} V_s(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0\leqslant k\leqslant 1} U_s^{(k)}(n)\ I_k(x-n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0\leqslant k\leqslant 1} \bigl[2\phi_{k,s}(n) - \phi_{k,s}(n-1) - \phi_{k,s}(n+1)\bigr]\,I_k(x-n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0\leqslant k\leqslant 1} \phi_{k,s}(n)\ \bigl[2I_k(x-n) - I_k(x-n-1) - I_k(x-n+1)\bigr] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0\leqslant k\leqslant 1} \phi_{k,s}(n)\ L_k(x-n) \end{aligned} \tag{7.50}$$

et pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} &\phi_{0,s}(n)L_0(x-n) + \phi_{1,s}L_1(x-n) \\ &\qquad = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi t)\,e^{2\pi i t(x-n)}\Bigl[4\bigl(1-|t|\bigr)\phi_{0,s}(n) + \frac{2}{\pi i}\operatorname{sgn}(t)\ \phi_{1,s}(n)\Bigr]\,dt \end{aligned} \tag{7.51}$$

ce qui donne la décomposition de Fourier de V_s ,

$$V_s(x) = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi t)\ \exp(2\pi i t x)\,E(t)\,dt \tag{7.52}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\bigl(1-|t|\bigr)\phi_{0,s}(n)e^{-2\pi i t n} + \frac{2}{\pi i}\operatorname{sgn}(t)\ \phi_{1,s}(n)e^{-2\pi i t n} \\ &= 4\bigl(1-|t|\bigr)\Bigl[\phi_{0,s}(0) + 2\sum_{n\geqslant 1}\phi_{0,s}(n)\cos(2\pi t n)\Bigr] - \frac{4}{\pi}\operatorname{sgn}(t)\ \sum_{n\geqslant 1}\phi_{1,s}(n)\sin(2\pi t n) \end{aligned} \tag{7.53}$$

Montrer que V_s est de type positif revient à montrer que la fonction E est positive sur l'intervalle $[-1,1]$. Pour cela, insérons les majorations $|\cos(2\pi tn)| \leqslant 1$ et $|\sin(2\pi tn)| \leqslant 2\pi n\big(1-|t|\big)$ dans la formule ci-dessus, ce qui donne

$$E(t) \geqslant 4\big(1-|t|\big)\Big[\phi_{0,s}(0) - 2\sum_{n\geqslant 1}|\phi_{0,s}(n)| - 2\sum_{n\geqslant 1} n\,|\phi_{1,s}(n)|\Big] \tag{7.54}$$

Notons C_s l'expression entre crochets. En utilisant (7.23) et le Lemme 7.11, on obtient

$$\begin{aligned} C_s &\geqslant \frac{1}{2} - 397e^{-4\pi} - 2\sum_{n\geqslant 1} 397e^{-\pi(1+3n)} - 2\sum_{n\geqslant 1} 9966e^{-\pi(1+3n)} \\ &= \frac{1}{2} - e^{-4\pi}\Big[397 + \frac{20726}{1-e^{-3\pi}}\Big] = 0.42633\ldots \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7.55}$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 7.5.

7.5 Démonstration de la Proposition 7.6

Fixons $s \geqslant 1$. Comme les fonctions U_s et V_s sont paires, il suffit de prouver l'inégalité $U_s(x) \geqslant V_s(x)$ pour x positif. On distinguera trois cas, selon que l'entier le plus proche de x est zéro, un, ou au moins deux.

A. Etude du cas $0 \leqslant x \leqslant 1/2$.

Lemme 7.12. *Pour tous* $s \geqslant 1$ *et* $x \in [0,1/2]$, *on a* $U_s(x) \geqslant 1$.

Démonstration. Ecrivons $U_s(x) = e^{-\pi s x^2}(1 + A_s x^2 - B_s x^4)$. On doit montrer que

$$\forall t \in [0,1/4] \quad 1 + A_s t - B_s t^2 \geqslant \exp(\pi s t). \tag{7.56}$$

Or, le membre de gauche est une fonction concave en t, et le membre de droite une fonction convexe en t. Il suffit donc, pour vérifier l'inégalité sur l'intervalle $[0,1/4]$, de la vérifier aux extrémités de l'intervalle. En 0 c'est évident, et il reste à montrer que

$$1 + A_s/4 - B_s/16 \geqslant \exp(\pi s/4). \tag{7.57}$$

Les coefficients “inconnus” A_s et B_s peuvent s'exprimer à l'aide de $U_s(1)$ et $U_s'(1)$, comme suit. Des égalités

$$\begin{aligned} U_s(1) &= e^{-\pi s}(1 + A_s - B_s) \\ U_s'(1) &= 2e^{-\pi s}\big[A_s - 2B_s - \pi s(1 + A_s - B_s)\big] \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} A_s - B_s &= e^{\pi s}U_s(1) - 1 \\ A_s - 2B_s &= \pi s\, e^{\pi s}U_s(1) + \tfrac{1}{2}e^{\pi s}U_s'(1) \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} A_s &= (2-\pi s)e^{\pi s}\,U_s(1) - \tfrac{1}{2}e^{\pi s}\,U_s'(1) - 2 \\ B_s &= (1-\pi s)e^{\pi s}\,U_s(1) - \tfrac{1}{2}e^{\pi s}\,U_s'(1) - 1\,. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Par conséquent,

$$16 + 4A_s - B_s = (7 - 3\pi s)e^{\pi s}\,U_s(1) - \tfrac{3}{2}e^{\pi s}\,U_s'(1) + 9 \tag{7.59}$$

et on sait, par le Lemme 7.10, que $U_s(1) \leqslant -\frac{1}{2} + 0.032e^{-\pi s}$ et $U_s'(1) \leqslant 0.81e^{-\pi s}$, donc

$$\begin{aligned}16 + 4A_s - B_s &\geqslant (7 - 3\pi s)(-\tfrac{1}{2}e^{\pi s} + 0.032) - \tfrac{3}{2}0.81 + 9 \\ &\geqslant (3\pi - 7)(\tfrac{1}{2}e^{\pi s} - 0.032) + 7.785 \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}(3\pi - 7)e^{\pi s} + 7.7\end{aligned}$$

et il suffit donc de vérifier que

$$\tfrac{1}{2}(3\pi - 7)\, e^{\pi s} + 7.7 \geqslant 16\, e^{\pi s/4} \tag{7.60}$$

pour tout $s \geqslant 1$. Pour cela, posons $x_0 = e^{\pi/4}$ et $x = e^{\pi s/4}$; alors

$$x^4 - x_0^4 \geqslant 4x_0^3 \cdot (x - x_0) \geqslant \frac{32}{3\pi - 7}(x - x_0)$$

et on en déduit facilement l'inégalité (7.60). □

Lemme 7.13. *Pour tous $s \geqslant 1$ et $x \in [0, 1/2]$, on a $V_s(x) \leqslant I_0(x)$.*

Démonstration. Ecrivons

$$\begin{aligned}V_s(x) - I_0(x) &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{U_s(n)}{(x-n)^2} + \frac{U_s'(n)}{x-n} \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big\{U_s(1)\Big[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\Big] + U_s'(1)\Big[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big] \\ &\qquad + \sum_{|n|\geqslant 2} \frac{U_s(n)}{(x-n)^2} + \frac{U_s'(n)}{x-n}\Big\}\end{aligned} \tag{7.61}$$

L'inégalité $(x-1)^{-2} + (x+1)^{-2} \geqslant 2$ combinée avec le Lemme 7.10 donne

$$U_s(1)\Big[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\Big] \leqslant -1 + 0.064\, e^{-\pi} \leqslant -0.997 \tag{7.62}$$

Pour les autres termes, on utilisera la majoration grossière $|x \pm n|^{-1} \leqslant 2$, avec les autres estimations du Lemme 7.10. D'abord,

$$U_s'(1)\Big[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big] \leqslant 4\,\big|U_s'(1)\big| \leqslant 3.24\, e^{-\pi} \leqslant 0.141 \tag{7.63}$$

et pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned}|U_s(n)| &\leqslant 8(\pi - 1)e^{3\pi(1-n)} \\ \big|U_s'(n)\big| &\leqslant 32\pi(\pi - 1)e^{3\pi(1-n)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\geqslant 2} \frac{U_s(n)}{(x-n)^2} + \frac{U_s'(n)}{x-n} &\leqslant \sum_{n\geqslant 2} 8\,|U_s(n)| + 4\,\big|U_s'(n)\big| \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 2} \big\{64(\pi - 1) + 128\pi(\pi - 1)\big\}\, e^{3\pi(1-n)} \\ &= 64(\pi - 1)(1 + 2\pi)\frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-3\pi}} \leqslant 0.081\,.\end{aligned} \tag{7.64}$$

L'expression entre accolades dans (7.61) est donc majorée par

$$-0.997 + 0.141 + 0.081 = -0.775 \leqslant 0$$

ce qui démontre que $V_s(x) \leqslant I_0(x)$. □

Les deux lemmes ci-dessus impliquent évidemment que $U_s(x) \geqslant V_s(x)$ si $x \in [0, 1/2]$.

B. Etude du cas $1/2 \leqslant x \leqslant 3/2$.

On a donné plus haut des formules pour calculer les coefficients A_s et B_s à l'aide de $U_s(1)$ et $U'_s(1)$: cela revient à écrire la fonction U_s sous la forme

$$U_s(x) = e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 + U_s(1) \cdot Y_{0,s}(x) + U'_s(1) \cdot Y_{1,s}(x) \tag{7.65}$$

où les fonctions $Y_{0,s}, Y_{1,s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$Y_{0,s}(x) = e^{\pi s(1-x^2)} x^2 \big[(\pi s - 1)x^2 + 2 - \pi s\big] \tag{7.66}$$

$$Y_{1,s}(x) = \tfrac{1}{2} e^{\pi s(1-x^2)} x^2 (x^2 - 1) \tag{7.67}$$

et vérifient $Y_{0,s}(1) = Y'_{1,s}(1) = 1$ et $Y'_{0,s}(1) = Y_{1,s}(1) = 0$.

J'utiliserai plutôt l'écriture

$$U_s(x) = U^\star_s(x) + \big(U_s(1) + \tfrac{1}{2}\big) \cdot Y_{0,s}(x) + U'_s(1) \cdot Y_{1,s}(x) \tag{7.68}$$

où la fonction $U^\star_s$ est définie par

$$\begin{aligned} U^\star_s(x) &= e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 - \tfrac{1}{2} Y_{0,s}(x) \\ &= e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 + \tfrac{1}{2} e^{\pi s(1-x^2)} x^2 \big[\pi s - 2 + (1-\pi s)x^2\big] \\ &= e^{-\pi s x^2}(1 + A^\star_s x^2 - B^\star_s x^4) \end{aligned} \tag{7.69}$$

avec

$$\begin{aligned} A^\star_s &= \tfrac{1}{2}(\pi s - 2)e^{\pi s} - 2 \\ B^\star_s &= \tfrac{1}{2}(\pi s - 1)e^{\pi s} - 1 \,. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Comme $U_s(1)+1/2$ et $U'_s(1)$ sont proches de zéro, par le Lemme 7.10, il faut imaginer la fonction $U^\star_s$ comme une approximation de U_s, qui vérifie les relations exactes $U^\star_s(0) = 1$, $U^\star_s(1) = -1/2$ et $(U^\star_s)'(1) = 0$, et les coefficients $A^\star_s$ et $B^\star_s$ comme des approximations de A_s et B_s.

Définissons $\varepsilon_0 = U_s(1) + 1/2$ et $\varepsilon_1 = U'_s(1)$, et écrivons

$$\begin{aligned} U_s(x) &= U^\star_s(x) + \varepsilon_0 Y_{0,s}(x) + \varepsilon_1 Y_{1,s}(x) \\ V_s(x) &= \tfrac{1}{2} L_0(x) + \mathcal{R}_2 + \varepsilon_0 \big[I_0(x-1) + I_0(x+1)\big] + \varepsilon_1 \big[I_1(x-1) - I_1(x+1)\big] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geqslant 2}} U_s(n) I_0(x-n) + U'_s(n) I_1(x-n) \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geqslant 2}} \frac{U_s(n)}{(x-n)^2} + \frac{U'_s(n)}{x-n} \end{aligned}$$

et donc

$$U_s(x) - V_s(x) = \mathcal{T} + \varepsilon_0 \mathcal{T}_0 + \varepsilon_1 \mathcal{T}_1 \tag{7.71}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= U^\star_s(x) - \tfrac{1}{2} L_0(x) - \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{T}_0 &= Y_{0,s}(x) - I_0(x-1) - I_0(x+1) \\ \mathcal{T}_1 &= Y_{1,s}(x) - I_1(x-1) + I_1(x+1) \,. \end{aligned} \tag{7.72}$$

L'inégalité (7.64) est toujours valable et entraîne

$$\mathcal{R}_2 \leqslant 0.081(x-1)^2 \,. \tag{7.73}$$

Lemme 7.14. *Pour tout x réel fixé, $U_s^\star(x)$ dépend de manière croissante de s pour $s \geqslant 1$. En particulier, $U_s^\star(x) \geqslant U_1^\star(x)$ pour tout $s \geqslant 1$.*

Démonstration. Pour tous x réel et $s > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_s^\star(x)}{\partial s} &= -\pi x^2 e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 + \frac{\pi}{2}x^2(1-x^2)e^{\pi s(1-x^2)}\left[\pi s - 2 + (1-\pi s)x^2\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\pi s(1-x^2)}(\pi - \pi x^2) \\ &= -\pi x^2 e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 + \frac{\pi}{2}x^2(1-x^2)e^{\pi s(1-x^2)}(\pi s - 1)(1-x^2) \\ &= \pi x^2 (x^2-1)^2 e^{-\pi s x^2}\left[-1 + \tfrac{1}{2}e^{\pi s}(\pi s - 1)\right]\end{aligned}$$

et l'expression entre crochets est positive pour $s \geqslant 1$, d'où le résultat. □

Lemme 7.15. *La fonction $U_1^\star$ vérifie*

$$\forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \qquad U_1^\star(x) \geqslant -\tfrac{1}{2} + (x-1)^2(-23.1x^2 + 33.6x - 4.9) \tag{7.74}$$

$$\forall x \in \left[1, \tfrac{3}{2}\right] \qquad U_1^\star(x) \geqslant -\tfrac{1}{2} + (x-1)^2(7.23x^2 - 26.28x + 24.8)\,. \tag{7.75}$$

Démonstration. J'utiliserai l'identité

$$\int_1^x (t-1)(at^2 + bt + c)\,dt = \frac{(x-1)^2}{12}\Big[(3a)x^2 + (2a+4b)x + (a+2b+6c)\Big] \tag{7.76}$$

valable pour tous a, b, c réels.

Pour tout x réel et $s > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_s^\star(x)}{\partial x} &= -2\pi s x\, e^{-\pi s x^2}(x^2-1)^2 + 4x(x^2-1)e^{-\pi s x^2} \\ &\qquad + e^{\pi s}e^{-\pi s x^2}x(x^2-1)\left[2 - \pi s + \pi s(\pi s - 1)x^2\right] \\ &= x(x^2-1)e^{-\pi s x^2}\Big[4 - 2\pi s(x^2-1) + e^{\pi s}\big\{2 - \pi s + \pi s(\pi s - 1)x^2\big\}\Big]\end{aligned} \tag{7.77}$$

et en particulier

$$\begin{aligned}(U_1^\star)'(x) &= x(x^2-1)e^{-\pi x^2}\Big[4 - 2\pi(x^2-1) + e^{\pi}(2-\pi) + e^{\pi}\pi(\pi-1)x^2\Big] \\ &= x(x^2-1)e^{-\pi x^2}\Big[4 + 2\pi + e^{\pi}(2-\pi) + \pi\big\{e^{\pi}(\pi-1) - 2\big\}x^2\Big] \\ &= (x-1)\,\Phi(x)\end{aligned} \tag{7.78}$$

où on a posé

$$\Phi(x) = x(x+1)e^{-\pi x^2}\Big[4 + 2\pi + e^{\pi}(2-\pi) + \pi\big\{e^{\pi}(\pi-1) - 2\big\}x^2\Big]\,. \tag{7.79}$$

On observe numériquement (et on pourrait prouver rigoureusement) que Φ vérifie

$$\forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \qquad \Phi(x) \geqslant -92.4x^2 + 147x - 43.4 \tag{7.80}$$

$$\forall x \in \left[1, \tfrac{3}{2}\right] \qquad \Phi(x) \geqslant 28.92x^2 - 93.3x + 75.88\,. \tag{7.81}$$

Il en résulte que, si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}U_1^\star(x) - U_1^\star(1) &= \int_1^x (U_1^\star)'(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\Phi(t)\,dt \\ &\geqslant \int_1^x (t-1)(-92.4t^2 + 147t - 43.4)\,dt \\ &= (x-1)^2(-23.1x^2 + 33.6x - 4.9)\end{aligned}$$

et si $1 \leqslant x \leqslant 3/2$,

$$\begin{aligned} U_1^\star(x) - U_1^\star(1) &= \int_1^x (U_1^\star)'(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\Phi(t)\,dt \\ &\geqslant \int_1^x (t-1)(28.92t^2 - 93.3t + 75.88)\,dt \\ &= (x-1)^2(7.23x^2 - 26.28x + 24.8) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 7.16. *La fonction L_0 vérifie*

$$\forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \qquad L_0(x) \leqslant -1 + (x-1)^2(-6.66x^2 + 9.2x + 2.52) \tag{7.82}$$

$$\forall x \in \left[1, \tfrac{3}{2}\right] \qquad L_0(x) \leqslant -1 + (x-1)^2(0.6x^2 - 6.56x + 11.2)\,. \tag{7.83}$$

Démonstration. Comme $L_0'(1) = 0$, on peut écrire $L_0'(x) = (x-1)\Phi(x)$ pour une certaine fonction entière Φ. Il n'est pas possible de donner ici une expression de Φ aussi explicite que dans le lemme précédent, mais on peut écrire

$$\Phi(x) = \int_0^1 L_0''(1 + t(x-1))\,dt \tag{7.84}$$

et de la représentation intégrale de Fourier de I_0 ou L_0, on déduit que la fonction $L_0^{(3)}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui fournit des constantes de Lipschitz explicites sur les fonctions L_0'' et Φ. D'autre part, le calcul numérique de $\Phi(x)$ ne pose aucun problème si $x \neq 1$. Avec ces informations, on observe numériquement (et on pourrait prouver rigoureusement) que Φ vérifie

$$\forall x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \qquad \Phi(x) \leqslant -26.64x^2 + 40.92x - 4.16 \tag{7.85}$$

$$\forall x \in \left[1, \tfrac{3}{2}\right] \qquad \Phi(x) \leqslant 2.4x^2 - 20.88x + 28.96 \tag{7.86}$$

et en utilisant la formule (7.76) comme dans le lemme précédent, on obtient les inégalités annoncées sur L_0. □

En regroupant les trois lemmes précédents avec l'inégalité (7.73), on obtient

$$\mathcal{T} \geqslant \begin{cases} (x-1)^2(-19.77x^2 + 29x - 6.241) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^2(6.93x^2 - 23x + 19.119) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{7.87}$$

Lemme 7.17. *Soit $s \geqslant 1$ quelconque. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a*

$$|Y_{0,s}(x) - 1| \leqslant (x-1)^2 \cdot \frac{3}{4}(\pi s)^2 \exp\Big(\frac{3}{4}\pi s\Big) \tag{7.88}$$

et pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a

$$|Y_{0,s}(x) - 1| \leqslant (x-1)^2 \cdot \frac{9}{2}(\pi s)^2\,. \tag{7.89}$$

Démonstration. On a déjà vu que $Y_{0,s}(1) = 1$. Ensuite, la dérivée de la fonction

$$Y_{0,s}(x) = e^{\pi s(1-x^2)} x^2 \left[(\pi s - 1)x^2 + 2 - \pi s\right]$$

est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}Y_{0,s}(x) &= 2x\, e^{\pi s(1-x^2)}\big[-\pi s(\pi s-1)x^4+(\pi^2 s^2-2)x^2+2-\pi s\big]\\ &= 2x\, e^{\pi s(1-x^2)}(x^2-1)\big[-\pi s(\pi s-1)x^2+\pi s-2\big]\\ &= 2(1-x)\Phi_1(x)\Phi_2(x)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= x(x+1)e^{\pi s(1-x^2)}\\ \Phi_2(x) &= \pi s(\pi s-1)x^2+2-\pi s\,.\end{aligned}$$

La fonction Φ_1 est positive et décroissante sur l'intervalle $\big[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\big]$, tandis que la fonction Φ_2 est positive et croissante sur ce même intervalle.
Et donc, si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}Y_{0,s}(x)\right| \leqslant 2\,|x-1|\cdot\Phi_1(1/2)\Phi_2(1) \leqslant 2\,|x-1|\cdot\frac{3}{4}\exp\Big(\frac{3}{4}\pi s\Big)\,(\pi s)^2$$

tandis que si $1 \leqslant x \leqslant 3/2$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}Y_{0,s}(x)\right| \leqslant 2\,|x-1|\cdot\Phi_1(1)\Phi_2(3/2) \leqslant 2\,|x-1|\cdot 2\,\Big(\frac{3}{2}\pi s\Big)^2$$

et on en déduit, par intégration, les inégalités cherchées. □

De la représentation (7.25) de la fonction I_0 on déduit $|I_0''(x)| \leqslant 2\pi^2/3$ pour tout x réel, et donc

$$\begin{aligned}|I_0(x-1)-1| &\leqslant \frac{\pi^2}{3}(x-1)^2\\ |I_0(x+1)-0| &\leqslant \frac{\pi^2}{3}(x-1)^2\end{aligned}$$

et avec le lemme ci-dessus, on en déduit que si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_0| &= \big|(Y_{0,s}(x)-1)-(I_0(x-1)-1)-I_0(x+1)\big|\\ &\leqslant (x-1)^2\Big[\frac{3}{4}\pi^2 s^2\exp\Big(\frac{3}{4}\pi s\Big)+\frac{2\pi^2}{3}\Big]\\ &\leqslant (x-1)^2\pi^2 s^2 e^{\pi s}\Big[\frac{3}{4}\exp\Big(-\frac{1}{4}\pi s\Big)+\frac{2}{3}s^{-2}\exp(-\pi s)\Big]\\ &\leqslant (x-1)^2\pi^2 s^2 e^{\pi s}\Big[\frac{3}{4}e^{-\pi/4}+\frac{2}{3}e^{-\pi}\Big]\end{aligned}$$

et comme $|\varepsilon_0| \leqslant 0.032e^{-\pi s}/s^3$,

$$|\varepsilon_0\mathcal{T}_0| \leqslant (x-1)^2\cdot 0.032\pi^2\Big[\frac{3}{4}e^{-\pi/4}+\frac{2}{3}e^{-\pi}\Big] \leqslant (x-1)^2\cdot 0.12$$

et de même, si $1 \leqslant x \leqslant 3/2$,

$$|\mathcal{T}_0| \leqslant (x-1)^2\Big[\frac{9}{2}\pi^2 s^2+\frac{2\pi^2}{3}\Big] \leqslant (x-1)^2\pi^2 s^2\frac{31}{6}$$

et donc

$$|\varepsilon_0\mathcal{T}_0| \leqslant (x-1)^2\cdot 0.032\pi^2\frac{31}{6}e^{-\pi} \leqslant (x-1)^2\cdot 0.08\ .$$

Pour résumer, on a

$$|\varepsilon_0\mathcal{T}_0| \;\leqslant\; \begin{cases}(x-1)^2\cdot 0.12 & \text{si } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)^2\cdot 0.08 & \text{si } 1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}.\end{cases} \tag{7.90}$$

Lemme 7.18. *Soit $s \geqslant 1$ quelconque. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a*

$$Y_{1,s}(x) \leqslant x - 1 \leqslant 0 \tag{7.91}$$

$$0 \leqslant (x-1) - Y_{1,s}(x) \leqslant 2\, e^{\pi s - 1}(x-1)^2 \tag{7.92}$$

et pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a

$$0 \leqslant Y_{1,s}(x) \leqslant x - 1 \tag{7.93}$$

$$0 \leqslant (x-1) - Y_{1,s}(x) \leqslant 2\pi s(x-1)^2 \tag{7.94}$$

Démonstration. Notons d'abord que, par la concavité de la fonction logarithme sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, on a

$$\forall t \in \left[\tfrac{1}{4}, 1\right] \quad \log(t) \geqslant \frac{8}{3} \log(2) \cdot (t-1)\,.$$

Puis, écrivons

$$Y_{1,s}(x) = \tfrac{1}{2} e^{\pi s(1-x^2)} x^2 (x^2 - 1) = (x-1)\Phi(x)$$

où Φ est la fonction

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2} e^{\pi s(1-x^2)} x^2 (x+1)$$

qui est strictement positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, et vérifie $\Phi(1) = 1$.

Supposons d'abord $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Alors $x + 1 \geqslant 2x$, donc $\Phi(x) \geqslant e^{\pi s(1-x^2)} x^3$, et

$$\begin{aligned}
\log \Phi(x) &\geqslant \pi s(1-x^2) + \tfrac{3}{2} \log(x^2) \\
&\geqslant \pi s(1-x^2) + 4 \log(2) \cdot (x^2 - 1) \\
&= (\pi s - 4 \log 2) \cdot (1 - x^2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

car $4 \log 2 < \pi$. Donc $\Phi(x) \geqslant 1$, ce qui établit (7.91).

D'autre part, on a

$$\Phi'(x) = \tfrac{1}{2} e^{\pi s(1-x^2)} x \left[3x + 2 - 2\pi s x^2 (x+1)\right]$$

et on vérifie facilement que cette quantité est négative pour $x \geqslant 1$, donc Φ est décroissante sur l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, ce qui entraîne $0 < \Phi(x) \leqslant 1$ sur cet intervalle, et établit (7.93).

En outre, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, on a la minoration

$$\Phi'(x) \geqslant -\pi s x^3 (x+1) e^{\pi s(1-x^2)}\,. \tag{7.95}$$

Donc, si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, on a

$$\Phi'(x) \geqslant -2\pi s x^2 e^{\pi s(1-x^2)} \geqslant -2\, e^{\pi s - 1}$$

et par conséquent, sur cet intervalle,

$$\Phi(x) = \Phi(1) + \int_1^x \Phi'(t) dt \leqslant 1 - 2\, e^{\pi s - 1}(x-1)$$

ce qui démontre (7.92).

D'autre part, on vérifie facilement que le membre de droite dans (7.95) est une fonction croissante de x sur l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2}\right]$; donc, si $1 \leqslant x \leqslant 3/2$,

$$\Phi'(x) \geqslant -2\pi s$$

et par conséquent, sur cet intervalle,

$$\Phi(x) = \Phi(1) + \int_1^x \Phi'(t) dt \geqslant 1 - 2\pi s(x-1)$$

ce qui démontre (7.94). $\square$

De la représentation (7.27) de la fonction I_1 on déduit $|I_1''(x)| \leqslant 4\pi/3$ pour tout x réel, et donc

$$|I_1(x-1)-(x-1)| \leqslant \frac{2\pi}{3}(x-1)^2$$
$$|I_1(x+1)-0| \leqslant \frac{2\pi}{3}(x-1)^2$$

et avec le lemme ci-dessus, on en déduit que si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_1| &= \big|(Y_{1,s}(x)-(x-1)) - (I_1(x-1)-(x-1)) + I_1(x+1)\big| \\ &\leqslant (x-1)^2\Big[2e^{\pi s-1}+\frac{4\pi}{3}\Big] = (x-1)^2 e^{\pi s}\Big[2e^{-1}+\frac{4\pi}{3}e^{-\pi s}\Big] \\ &\leqslant (x-1)^2 e^{\pi s}\Big[2e^{-1}+\frac{4\pi}{3}e^{-\pi}\Big] \end{aligned}$$

et comme $|\varepsilon_1| \leqslant 0.81 e^{-\pi s}/s^2$,

$$|\varepsilon_1\mathcal{T}_1| \leqslant (x-1)^2\cdot 0.81\Big[2e^{-1}+\frac{4\pi}{3}e^{-\pi}\Big] \leqslant (x-1)^2\cdot 0.75$$

et de même, si $1 \leqslant x \leqslant 3/2$,

$$|\mathcal{T}_1| \leqslant (x-1)^2\Big[2\pi s+\frac{4\pi}{3}\Big] \leqslant (x-1)^2\pi s\frac{10}{3}$$

et donc

$$|\varepsilon_1\mathcal{T}_1| \leqslant (x-1)^2\cdot 0.81 e^{-\pi}\,\frac{10\pi}{3} \leqslant (x-1)^2\cdot 0.37\ .$$

Enfin, observons que pour tout $x>1$ on a

$$I_1(x-1)-I_1(x+1) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Big] \geqslant 0$$

et donc

$$0 \leqslant I_1(x+1) \leqslant I_1(x-1) \leqslant x-1\ .$$

En particulier, $Y_{1,s}(x)$ et $I_1(x-1)-I_1(x+1)$ sont tous deux éléments de l'intervalle $[0,x-1]$, ce qui entraîne

$$|\mathcal{T}_1| = \big|Y_{1,s}(x)-(I_1(x-1)-I_1(x+1))\big| \leqslant x-1$$

et

$$|\varepsilon_1\mathcal{T}_1| \leqslant (x-1)\cdot 0.81e^{-\pi} \leqslant (x-1)\cdot 0.036\ .$$

Il résulte de tout cela que

$$|\varepsilon_1\mathcal{T}_1| \leqslant \begin{cases} (x-1)^2\cdot 0.75 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^2\cdot 0.37 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 1.4, \\ (x-1)\cdot 0.036 & \text{si } 1.4 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{7.96}$$

Enfin, en combinant les inégalités (7.87), (7.90) et (7.96), on voit que $U_s(x)-V_s(x) = \mathcal{T} + \varepsilon_0\mathcal{T}_0 + \varepsilon_1\mathcal{T}_1$ est positif pour tout x dans l'intervalle $[1/2,3/2]$.

C. Etude du cas $N-1/2 \leqslant x \leqslant N+1/2$, avec $N \geqslant 2$ entier.

Lemme 7.19. *Pour tous m,x réels vérifiant $x>1$, $m \geqslant 2$ et $|x-m| \geqslant 1/2$, on a*

$$\big|x^2-m^2\big| \geqslant \frac{x^2-1}{m+1}\ . \tag{7.97}$$

Démonstration. Pour m fixé, la fonction $\phi : x \mapsto (x^2-m)/(x^2-1)$ est croissante sur l'intervalle $]1,\infty[$. Donc, si $x \leqslant m-1/2$,

$$\phi(x) \leqslant \phi(m-\tfrac{1}{2}) = \frac{1-4m}{4m^2-4m-3} \leqslant \frac{-1}{m+1}$$

et si $x \geqslant m+1/2$,

$$\phi(x) \geqslant \phi(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1+4m}{4m^2+4m-3} \geqslant \frac{1}{m+1}$$

ce qui prouve le résultat. □

Pour n entier naturel et x réel, définissons

$$\begin{aligned} T_{0,n}(x) &= I_0(x-n) - 2I_0(x) + I_0(x+n) \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big[\frac{1}{(x-n)^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\Big] \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\,\frac{2n^2(3x^2-n^2)}{x^2(x^2-n^2)^2} \end{aligned} \tag{7.98}$$

et

$$\begin{aligned} T_{1,n}(x) &= I_1(x-n) - 2n\, I_0(x) - I_1(x+n) \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\Big[\frac{1}{x-n} - \frac{2n}{x^2} - \frac{1}{x+n}\Big] \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\,\frac{2n^3}{x^2(x^2-n^2)} \end{aligned} \tag{7.99}$$

Les relations (7.4) permettent d'écrire la fonction V_s sous la forme

$$V_s(x) = \sum_{n\geqslant 1} U_s(n)\, T_{0,n}(x) + U_s'(n)\, T_{1,n}(x) \tag{7.100}$$

et on a le résultat suivant.

Lemme 7.20. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout réel x tel que $|x-n| \leqslant 1/2$, on a*

$$\big|V_s(x) - \tfrac{1}{2}L_0(x) - U_s(n)\, T_{0,n}(x) - U_s'(n)\, T_{1,n}(x)\big| \;\leqslant\; \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2(x^2-1)}\ . \tag{7.101}$$

Démonstration. En notant $\mathcal{E}$ l'expression sous la valeur absolue,

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}T_{0,1}(x) + \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\neq n}} U_s(m)\, T_{0,m}(x) + U_s'(m)\, T_{1,m}(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\neq n}} (A_m + B_m) \tag{7.102}$$

où on a posé

$$A_m = U_s(m)\,\frac{2m^2(3x^2-m^2)}{x^2(x^2-m^2)^2}\ , \qquad B_m = U_s'(m)\,\frac{2m^3}{x^2(x^2-m^2)}\ ,$$

à l'exception de

$$A_1 = \big(U_s(1) + \tfrac{1}{2}\big)\,\frac{2(3x^2-1)}{x^2(x^2-1)^2}\ .$$

Comme $\left|U_s(1)+\frac{1}{2}\right| \leqslant 0.032e^{-\pi}$, et $3x^2-1 \leqslant 4.6(x^2-1)$ car $x \geqslant 1.5$, on a

$$|A_1| = \left|U_s(1)+\tfrac{1}{2}\right| \, \frac{2(3x^2-1)}{x^2(x^2-1)^2} \leqslant \frac{2\cdot 4.6\cdot 0.032e^{-\pi}}{x^2(x^2-1)} \leqslant \frac{0.013}{x^2(x^2-1)}$$

et $|U_s'(1)| \leqslant 0.81e^{-\pi}$ donc

$$|B_1| = \left|U_s'(1)\right| \, \frac{2}{x^2(x^2-1)} \leqslant \frac{2\cdot 0.81e^{-\pi}}{x^2(x^2-1)} \leqslant \frac{0.071}{x^2(x^2-1)} \; .$$

Bornons maintenant A_2 et B_2 en supposant que ces termes apparaissent dans la somme (7.102), c'est-à-dire $n \neq 2$, ce qui implique $x \geqslant 2.5$ et par suite $x^2-4 \geqslant \frac{3}{7}(x^2-1)$. Alors,

$$\frac{3x^2-4}{(x^2-4)^2} \leqslant \frac{3(x^2-1)}{(x^2-4)^2} \leqslant \frac{49/3}{x^2-1} \; , \qquad \frac{1}{x^2-4} \leqslant \frac{7/3}{x^2-1} \; ,$$

d'où

$$|A_2| = |U_s(2)| \, \frac{8(3x^2-4)}{x^2(x^2-4)^2} \leqslant \frac{392}{3} \, |U_s(2)| \, \frac{1}{x^2(x^2-1)}$$

$$|B_2| = \left|U_s'(2)\right| \, \frac{16}{x^2(x^2-4)} \leqslant \frac{112}{3} \left|U_s'(2)\right| \frac{1}{x^2(x^2-1)}$$

Avec les majorations $|U_s(t)| \leqslant 8(\pi-1)e^{3\pi(1-t)}$ et $|U_s'(t)| \leqslant 32\pi(\pi-1)e^{3\pi(1-t)}$, valables pour tout $t \geqslant 2$ d'après le Lemme 7.10, on en déduit

$$|A_2| + |B_2| \leqslant \frac{0.83}{x^2(x^2-1)}$$

De même, pour tout $m \geqslant 3$ autre que n, on a $|x-m| \geqslant 1/2$ et par conséquent $\left|x^2-m^2\right| \geqslant (x+m)/2$. En outre, on a $\left|3x^2-m^2\right| \leqslant 3\left|x^2-m^2\right| + 2m^2$ et donc

$$\frac{\left|3x^2-m^2\right|}{|x^2-m^2|} \leqslant 3 + \frac{2m^2}{|x^2-m^2|} \leqslant 3 + \frac{4m^2}{x+m} \leqslant 4+4m$$

et d'autre part $\left|x^2-m^2\right| \geqslant (x^2-1)/(m+1)$ par le Lemme 7.19, donc

$$|A_m| = |U_s(m)| \, \frac{2m^2\left|3x^2-m^2\right|}{x^2\left|x^2-m^2\right|^2} \leqslant |U_s(m)| \, \frac{8m^2(m+1)^2}{x^2(x^2-1)}$$

$$|B_m| = \left|U_s'(m)\right| \, \frac{2m^3}{x^2\left|x^2-m^2\right|} \leqslant \left|U_s'(m)\right| \frac{2m^3(m+1)}{x^2(x^2-1)}$$

et

$$|A_m| + |B_m| \leqslant \left[4\left|U_s(m)\right| + \left|U_s'(m)\right|\right] \frac{2(m+1)^4}{x^2(x^2-1)} \leqslant 64(\pi^2-1)\frac{(m+1)^4e^{3\pi(1-m)}}{x^2(x^2-1)}$$

et finalement

$$\sum_{\substack{m\geqslant 3\\ m\neq n}} |A_m| + |B_m| \leqslant \frac{C}{x^2(x^2-1)}$$

où

$$C = 64(\pi^2-1)\sum_{m\geqslant 3}(m+1)^4e^{3\pi(1-m)} = 9.465\ldots\times 10^{-4} < 0.001$$

En rassemblant toutes les inégalités ci-dessus, on obtient

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\neq n}} |A_m| + |B_m| \leqslant \frac{0.013+0.071+0.83+0.001}{x^2(x^2-1)} = \frac{0.915}{x^2(x^2-1)}$$

et donc $|\mathcal{E}| \leqslant \sin^2(\pi x)/\pi^2x^2(x^2-1)$. □

Lemme 7.21. *Pour tout nombre réel h vérifiant $|h| \leqslant 1/4$, on a*

$$|T_{0,2}(2+h) - 1| \leqslant 3.68\, h^2$$
$$|T_{1,2}(2+h) - h| \leqslant 2.4\, h^2 \ .$$

Démonstration. Ecrivons $x = 2+h$, et $T_{0,2}(x) = A_0(x) + B_0(x)$, avec

$$A_0(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \frac{1}{(x-2)^2} = I_0(x-2) \ , \quad B_0(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \Big[-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2} \Big] \ .$$

Comme $|I_0''(t)| \leqslant 2\pi^2/3$ pour tout t réel, on a

$$\big| A_0(x) - A_0(2) - hA_0'(2) \big| = |A_0(x) - 1| \leqslant \frac{\pi^2}{3} h^2$$

et d'autre part, pour tout x dans $[1.75, 2.25]$ on a

$$\left| -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2} \right| \leqslant \frac{284}{735}$$

et donc

$$|B_0(x)| \leqslant \frac{284}{735} h^2$$

et finalement

$$|T_{0,2}(x) - 1| \leqslant \Big(\frac{\pi^2}{3} + \frac{284}{735} \Big) h^2 \leqslant 3.68\, h^2 \ .$$

Ecrivons maintenant $T_{1,2}(x) = A_1(x) + B_1(x)$, avec

$$A_1(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \frac{1}{x-2} = hA_0(x) \ , \quad B_1(x) = -\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \Big[\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x+2} \Big] \ .$$

On a d'une part

$$|A_1(x) - h| = |h| \cdot |A_0(x) - 1| \leqslant \frac{\pi^2}{12} h^2$$

et d'autre part, pour tout x dans $[1.75, 2.25]$,

$$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x+2} \leqslant \frac{1156}{735}$$

donc

$$|B_1(x)| \leqslant \frac{1156}{735} h^2$$

et finalement

$$|T_{1,2}(x) - h| \leqslant \Big(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1156}{735} \Big) h^2 \leqslant 2.4\, h^2$$

et le lemme est démontré. □

Par les mêmes arguments, on démontre le

Lemme 7.22. *Pour tout entier $n \geqslant 3$ et tout réel h tel que $|h| \leqslant 1/2$, on a*

$$|T_{0,n}(n+h) - 1| \leqslant 4h^2$$
$$|T_{1,n}(n+h) - h| \leqslant 3h^2 \ .$$

Revenons à l'inégalité $U_s(x) \geqslant V_s(x)$. Considérons d'abord le cas où $N \geqslant 3$. Ceci entraîne en particulier que tout x dans $[N-1/2, N+1/2]$ satisfait $x \geqslant 5/2$ et donc $x^2 \geqslant 5x - 25/4$, et par le Lemme 7.8,

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi^2(\pi-1)x^6 e^{\pi(1-x^2)} \geqslant -2\pi^2(\pi-1)x^6 e^{\pi(29/4-5x)}$$

et le membre de droite est croissant en x, donc atteint son minimum pour $x = N - 1/2$, et

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi^2(\pi-1)(N-1/2)^6 e^{\pi(39/4-5N)}$$

pour tout x dans $[N-1/2, N+1/2]$. Par conséquent,

$$N^4 U_s''(x) \geqslant -2\pi^2(\pi-1)N^{10} e^{\pi(39/4-5N)}$$

et le membre de droite est croissant en N, donc atteint son minimum pour $N = 3$, et

$$N^4 U_s''(x) \geqslant -2\pi^2(\pi-1)3^{10} e^{\pi(39/4-15)} \geqslant -0.1716 \tag{7.103}$$

et il en résulte que

$$U_s(x) - U_s(N) - (x-N)U_s'(x) \geqslant -0.0858\,\frac{(x-N)^2}{N^4} \tag{7.104}$$

pour tout x dans $[N-1/2, N+1/2]$.
Posons maintenant $\Phi(x) = U_s(N)T_{0,N}(x) + U_s'(N)T_{1,N}(x)$, si bien que $\Phi(N) = U_s(N) = V_s(N)$ et $\Phi'(N) = U_s'(N) = V_s'(N)$. Du Lemme 7.22 il résulte que

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(x) - U_s(N) - (x-N)U_s'(N)\right| &= \left|U_s(N)(T_{0,N}(x)-1) + U_s'(N)(T_{1,N}(x) - x + N)\right| \\
&\leqslant (x-N)^2\Big[4\left|U_s(N)\right| + 3\left|U_s'(N)\right|\Big] \\
&\leqslant (x-N)^2\Big[4\cdot 8(\pi-1)e^{3\pi(1-N)} + 3\cdot 32\pi(\pi-1)e^{3\pi(1-N)}\Big] \\
&\leqslant \frac{(x-N)^2}{N^4}\big[32(\pi-1)(1+3\pi)N^4 e^{3\pi(1-N)}\big]
\end{aligned}$$

et la dernière expression entre crochets est décroissante en N, donc atteint son minimum pour $N = 3$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(x) - U_s(N) - (x-N)U_s'(N)\right| &\leqslant \frac{(x-N)^2}{N^4}\big[32(\pi-1)(1+3\pi)3^4 e^{-6\pi}\big] \\
&\leqslant 0.0004\,\frac{(x-N)^2}{N^4}
\end{aligned} \tag{7.105}$$

D'autre part, on sait par le Lemme 7.20 que

$$\begin{aligned}
(V_s - \Phi)(x) &\leqslant \frac{1}{2}L_0(x) + \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2(x^2-1)} = -\frac{2\sin^2(\pi x)}{\pi^2(x^2-1)^2} \\
&\leqslant -\frac{4(x-N)^2}{\pi^2 N^4 (7/6)^4} \leqslant -0.2187\,\frac{(x-N)^2}{N^4}
\end{aligned}$$

car $|\sin \pi x| \geqslant \sqrt{2}\,|x-N|$ et $x \leqslant 7N/6$. Il en résulte que

$$V_s(x) - U_s(N) - (x-N)U_s'(N) \leqslant -0.2183\,\frac{(x-N)^2}{N^4} \tag{7.106}$$

et la comparaison avec (7.104) montre bien que $U_s(x) \geqslant V_s(x)$, quels que soient N et x vérifiant $|x-N| \leqslant 1/2$ et $N \geqslant 3$.

Il reste à examiner le cas $N=2$, et pour cela je considererai d'abord le cas $|x-2| \leqslant 1/4$. La fonction Φ, définie comme plus haut, vérifie ici

$$\begin{aligned}\left|\Phi(x)-U_s(2)-(x-2)U_s'(2)\right| &= \left|U_s(2)(T_{0,2}(x)-1)+U_s'(2)(T_{1,2}(x)-x+2)\right| \\ &\leqslant (x-2)^2\Big[3.68\,|U_s(2)|+2.4\,|U_s'(2)|\Big] \\ &\leqslant (x-2)^2\big[3.68\cdot 8(\pi-1)e^{-3\pi}+2.4\cdot 32\pi(\pi-1)e^{-3\pi}\big] \\ &\leqslant (x-2)^2\cdot 8(\pi-1)e^{-3\pi}(3.68+2.4\cdot 4\pi) \\ &\leqslant 0.0468\,(x-2)^2\end{aligned}$$

pour tout x dans $[1.75, 2.25]$.
Ensuite, on a

$$U_s''(x) \geqslant -2\pi^2(\pi-1)x^6e^{\pi(1-x^2)} \geqslant \begin{cases} 4.608x-9.382 & \text{si } 1.75 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2.4x^2+10.8x-12.166 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 2.25, \end{cases}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}U_s(x)-U_s(2)-(x-2)U_s'(2) &= (x-2)^2\int_0^1 U_s''(2+t(x-2))(1-t)dt \\ &\geqslant (x-2)^2\Phi_1(x)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0.768x-1.619 & \text{si } 1.75 \leqslant x \leqslant 2, \\ -0.2x^2+x-1.283 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 2.25. \end{cases}$$

Enfin, on a comme précédemment

$$(V_s-\Phi)(x) \leqslant -\frac{2\sin^2(\pi x)}{\pi^2(x^2-1)^2} = (x-2)^2\Phi_2(x) \tag{7.107}$$

où on a posé

$$\Phi_2(x) = -\frac{2\,\mathrm{sinc}^2(\pi(x-2))}{(x^2-1)^2}$$

ce qui entraîne

$$U_s(x)-V_s(x) \geqslant (x-2)^2\big[\Phi_1(x)-\Phi_2(x)-0.0468\big]$$

et, comme on le vérifie numériquement, la fonction entre crochets est positive sur l'intervalle $[1.75, 2.25]$. Ceci établit l'inégalité $U_s(x) \geqslant V_s(x)$ sur cet intervalle.
Il ne reste plus qu'à traiter le cas $1/4 \leqslant |x-2| \leqslant 1/2$. On a alors $\left|x^2-4\right| \geqslant 15/16$, et

$$\left|\frac{3x^2-4}{x^2-4}\right| = \left|3+\frac{8}{x^2-4}\right| \leqslant 3+\frac{8}{|x^2-4|} \leqslant \frac{173}{15}$$

et par conséquent

$$|T_{1,2}(x)| = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\,\frac{16}{x^2\,|x^2-4|}\ , \quad |T_{0,2}(x)| = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\,\frac{8(3x^2-4)}{x^2(x^2-4)^2} \leqslant \frac{173}{30}\,|T_{1,2}(x)|\ ,$$

et

$$
\begin{aligned}
|\Phi(x)| &\leqslant |U_s(2)| \cdot |T_{0,2}(x)| + \left|U_s'(2)\right| \cdot |T_{1,2}(x)| \\
&\leqslant \left[\frac{173}{30}\,|U_s(2)| + \left|U_s'(2)\right|\right] \cdot |T_{1,2}(x)| \\
&\leqslant \left[\frac{173}{30} 8(\pi-1)e^{-3\pi} + 32\pi(\pi-1)e^{-3\pi}\right] \cdot |T_{1,2}(x)| \\
&= 8(\pi-1)e^{-3\pi}(173/30+4\pi)\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2}\,\frac{16}{x^2\,|x^2-4|} \\
&\leqslant 0.042\frac{\sin^2(\pi x)}{x^2\,|x^2-4|}\ .
\end{aligned}
$$

L'inégalité (7.107) est par ailleurs toujours valable, et le Lemme 7.9 nous dit que

$$
U_s(x) \geqslant -\frac{1}{2}(\pi-1)x^4 e^{\pi(1-x^2)}
$$

donc finalement

$$
U_s(x) - V_s(x) \geqslant -\frac{1}{2}(\pi-1)x^4 e^{\pi(1-x^2)} + \frac{2\sin^2(\pi x)}{\pi^2(x^2-1)^2} - 0.042\frac{\sin^2(\pi x)}{x^2\,|x^2-4|}
$$

et, comme on le vérifie numériquement, le membre de droite est positif sur le domaine $1/4 \leqslant |x-2| \leqslant 1/2$. Ceci établit l'inégalité $U_s(x) \geqslant V_s(x)$ sur ce domaine, et termine la preuve de la Proposition 7.6.

Références

[ANP] N. Angelescu, G. Nenciu & V. Protopopescu, *On stable potentials*, Commun. Math. Phys. **22** (1971), 162–165

[Can] J. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **23**, Addison-Wesley (1984)

[CK1] H. Cohn & A. Kumar, *Universally optimal distribution of points on spheres*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 99–148

[CK2] H. Cohn & A. Kumar, *Counterintuitive ground states in soft-core models*, Physical Review E **78** (2008), #061113

[C+1] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko & M. S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Annals of Mathematics **185** (2017), 1017–1033

[C+2] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko & M. S. Viazovska, *Universal optimality of the E_8 and Leech lattices and interpolation formulas*, Annals of Mathematics **196** (2022), 983–1082

[CKS] H. Cohn, A. Kumar & A. Schürmann, *Ground states and formal duality relations in the Gaussian core model*, Physical Review E **80** (2009), #061116

[CwS] J. H. Conway & N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices, and groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **290**, troisième édition, Springer (1999)

[ClS] R. Coulangeon & A. Schürmann, *Energy minimization, periodic sets and spherical designs*, International Mathematics Research Notices (2012), 829–848

[FR] M. E. Fisher & D. Ruelle, *The stability of many-particle systems*, Journal of Mathematical Physics **7** (1966), 260–270

[Fro] O. Frostman, *Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles*, thèse, Université de Lund (1935)

[God] R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 1–84

[KG] A. Kirillov & A. Gvichiani, *Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle*, Editions Mir (1982)

[LS1] A. Lenard & S. Sherman, *Stable potentials I*, Commun. Math. Phys. **15** (1969), 201–207

[LS2] A. Lenard & S. Sherman, *Stable potentials II*, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 91–97

[Ru1] D. Ruelle, *Classical statistical mechanics of a system of particles*, Helv. Phys. Acta. **36** (1963), 183–197

[Ru2] D. Ruelle, *Statistical mechanics: rigorous results*, W. A. Benjamin (1969)

[Sti] F. H. Stillinger, *Phase transitions in the Gaussian core system*, Journal of Chemical Physics **65** (1976), 3968–3974

[Vaa] J. D. Vaaler, *Some extremal functions in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 183–215

[Val] G. Valiron, *Fonctions convexes et fonctions entières*, Bull. SMF **60** (1932), 278–287

[Via] M. S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension* 8, Ann. of Math. **185** (2017), 991–1015

[WW] E. T. Whittaker & G. N. Watson, *A course of modern analysis*, quatrième édition, Cambridge University Press (1927)

[Wid] D. V. Widder, *The heat equation*, Pure and Applied Mathematics **67**, Academic Press (1975)