Université de Paris Sud 11 **L3 – Math318**
Mathématiques **2ème semestre 11/12**

Corrigé de l'Examen Partiel du 12 mars 2012

Exercice 1.— 1. L'équation s'écrit $y' = f(t,y)$ où $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t,x) = -\frac{2}{t}x + t^2\cos(t)x^2$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lispchitz, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale. Or $(]0,+\infty[,0)$ est une solution maximale de ce problème, donc $(J,y) = (]0,+\infty[,0)$.

2. Soit $y \in \mathcal{C}^1(J)$ une fonction qui ne s'annule pas sur J. On a $(1/y)' = -y'/y^2$. Donc (J,y) est une solution de l'équation si et seulement si pour tout $t \in J$,

$$(\frac{1}{y(t)})' = -\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{2}{t}\frac{1}{y(t)} - t^2\cos(t),$$

autrement dit, si et seulement si $(J,1/y)$ est solution de l'équation $z' = \frac{2}{t}z - t^2\cos t$. Les solutions de cette équation linéaire sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $z : t \mapsto t^2(C_0 - \sin t)$, pour $C_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

3. On doit avoir, pour tout $t \in J_a$, $y_a(t) = \dfrac{1}{t^2(C_0 - \sin t)}$. En particulier pour $t = \pi$, on a $\dfrac{1}{\pi^2 a} = \dfrac{1}{\pi^2 C_0}$, donc $C_0 = a$. Si $|a| > 1$, on a $J_a =]0,+\infty[$. Si $-1 \leq a < 0$, il existe un unique $t_a \in]\pi, 3\pi/2[$ tel que $\sin t_a = a$, et $J_a =]0,t_a[$. Si $0 < a \leq 1$, il existe un unique $t_a^- \in [\pi/2,\pi[$ et un unique $t_a^+ \in]2\pi, 2\pi+\pi/2]$ tels que $\sin t_a^\pm = a$ (tracer la courbe représentative de la fonction sinus!). Dans ce cas, $J_a =]t_a^-, t_a^+[$.

Exercice 2.— 1. L'équation est linéaire, donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

2. On trouve $y_0'(t) = -\dfrac{\omega\sin(\omega t)}{t} - \dfrac{\cos(\omega t)}{t^2}$ et $y_0''(t) = -\dfrac{\omega^2\cos(\omega t)}{t} + 2\dfrac{\omega\sin(\omega t)}{t^2} - 2\dfrac{\cos(\omega t)}{t^3}\cdot$ On vérifie alors facilement que y_0 est solution de l'équation sur $]0,+\infty[$.

3. a) On a $y_1(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $y_1'(t) = \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1}$ et $y_1''(t) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n t^{n-2}$, donc y_1 est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 =& t y_1'' + 2y_1' + \omega^2 t y_1 = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n t^{n-1} + 2\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} + \omega^2 \sum_{n\geq 0} a_n t^{n+1} \\ =& \sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1}t^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n + \omega^2\sum_{n\geq 1} a_{n-1}t^n \\ =& 2a_1 + \sum_{n\geq 1}\big((n+2)(n+1)a_{n+1} + \omega^2 a_{n-1}\big)t^n \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = -\omega^2 a_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

b) On voit par récurrence que les a_{2n+1} sont nuls pour tout $n \geq 0$, et que pour tout $n \geq 0$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0$$

Donc $y_1(t) = a_0 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n+1)!} = a_0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \cdot$ En particulier le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.

4. Soit $y \in \mathcal{S}$. La fonction y est en particulier solution de l'équation sur $]0, +\infty[$. Or y_0 et y_1 sont deux solutions indépendantes de cette équation différentielle (résolue!) d'ordre 2 sur $]0, +\infty[$, donc il existe $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que pour $t > 0$,

$$y(t) = \alpha_0 y_0(t) + \alpha_1 y_1(t)$$

Puisque y est continue, on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^+} \alpha_0 y_0(t) + \alpha_1 y_1(t)$$

Comme $y_0(t) \to +\infty$ et $y_1(t) \to 1$ quand $t \to 0^+$, cela entraine que $\alpha_0 = 0$. Donc les éléments de $\mathcal{S}$ sont les multiples de y_1, et $\mathcal{S}$ est de dimension 1.

Exercice 3.— Le système s'écrit $Y' = AY + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$.

- On résout d'abord le système homogène associé $Y' = AY$. Les valeurs propres de A sont -3, associée au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et 5, associée au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit P la matrice dont les colonnes sont U et V. On a $A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$. Posant $X(t) = P^{-1}Y(t)$, on voit que $Y(t)$ est solution du système homogène si et seulement si $X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X(t)$, ou encore $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} X_0$ pour un $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Donc $Y(t) = PX(t) = P \begin{pmatrix} ae^{-3t} \\ be^{5t} \end{pmatrix} = ae^{-3t}U + be^{5t}V$.

- On cherche une solution du système inhomogène sous la forme $Y(t) = a(t)e^{-3t}U + b(t)e^{5t}V$, avec $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a alors $Y'(t) = a'(t)e^{-3t}U + b'(t)e^{5t}V + AY(t)$, donc Y est solution si et seulement si

$$a'(t)e^{-3t}U + b'(t)e^{5t}V = B(t),$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} -2a'(t)e^{-3t} + 2b'(t)e^{5t} = e^t \\ a'(t)e^{-3t} + b'(t)e^{5t} = e^{-3t} \end{cases}$$

En faisant des combinaisons linéaires adéquates des lignes (par exemple), on trouve

$$a'(t) = \frac{1}{4}(2 - e^{4t}) \text{ et } b'(t) = \frac{1}{4}(e^{-4t} + 2e^{-8t}) \cdot$$

On obtient donc une solution en prenant

$$a(t) = \frac{t}{2} - \frac{e^{4t}}{16} \text{ et } b(t) = -\frac{e^{-4t}}{16} - \frac{e^{-8t}}{16}.$$

Finalement, les solutions du système sont les fonctions

$$Y(t) = (\frac{t}{2} + \frac{e^{4t}}{16} + a)e^{-3t}U + (-\frac{e^{-4t}}{16} - \frac{e^{-8t}}{16} + b)e^{5t}V, \ a, b \in \mathbb{R},$$

ou encore
$$Y(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^t}{4} - e^{-3t}(t + \dfrac{1}{8} + 2a) + 2be^{5t} \\ -\dfrac{e^t}{8} + e^{-3t}(\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{16} + a) + be^{5t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.— 1. La fonction y est solution de (4) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $Y' = AY$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ (c'est aussi le polynôme caractéristique de l'équation!). On voit que $P_A(1) = 0$ et en factorisant, que $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ de multiplicité algébrique 2, et $\lambda_2 = 2$ de multiplicité algébrique 1. Le sous-espace propre E_1 associé à λ_1 est engendré par $u = (1, 1, 1)$, donc est de dimension 1, et E_2 est engendré par $w = (1, 2, 4)$, donc de dimension 1 (ce que l'on savait déjà). La matrice A n'est pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est < 3.

3. On cherche d'abord $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - I)v = u$. On trouve $v = (-1, 0, 1)$. On sait que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a
$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
Donc $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}$. On trouve facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et si l'on insiste un peu (...)
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -2\,te^t + e^{2t} & (3\,t + 2)e^t - 2\,e^{2t} & -(t + 1)e^t + e^{2t} \\ -2\,(t + 1)e^t + 2\,e^{2t} & (3\,t + 5)e^t - 4\,e^{2t} & -(t + 2)e^t + 2\,e^{2t} \\ -2\,(t + 2)e^t + 4\,e^{2t} & (3\,t + 8)e^t - 8\,e^{2t} & -(t + 3)e^t + 4\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$
On peut aussi dire notant $X_0 = au + bv + cw$, $e^{tA}X_0 = ae^tu + be^t(tu + v) = ce^{2t}w = (a + bt)e^tu + be^tv + ce^{2t}w$.

4. Le solutions de l'équation (4) sont données par la première coordonnée des solutions de l'équation $Y' = AY$. Donc il s'agit des fonctions $y(t) = (-2a+3b-c)te^t + (2b-c)e^t + (a-2b+c)e^{2t}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.—

A. 1. La solution générale de l'équation s'écrit $y(t) = \left(\alpha + \int_0^t b(s)e^{-A(s)}dt\right) e^{A(t)}$.

2. On note que $A(t+2\pi) = A(t) + \int_t^{t+2\pi} a(s)ds = A(t) + \int_0^{2\pi} a(s)ds = A(t) + \lambda$, et donc

$$\begin{aligned}
y(t+2\pi) &= \left(\alpha + \int_0^{2\pi} b(s)e^{-A(s)}ds + \int_{2\pi}^{t+2\pi} b(s)e^{-A(s)}ds\right) e^{A(t+2\pi)} \\
&= \left(\alpha + \mu + \int_0^t b(s)e^{-\lambda-A(s)}ds\right) e^{A(t)+\lambda} \\
&= y(t) + \left(\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda\right) e^{A(t)}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, y est 2π-périodique si et seulement $\alpha(e^\lambda - 1) + \mu e^\lambda = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, l'équation admet une unique solution 2π-périodique, donnée par

$$\alpha = \frac{\mu e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, alors toute solution est 2π-périodique.
Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, alors il n'y a aucune solution 2π-périodique.

B. 1. La solution générale de l'équation s'écrit $Y(t) = e^{tA}X_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}B(s)ds$

2. Pour une telle fonction, on a donc

$$\begin{aligned}
Y(t+2\pi) =& e^{tA+2\pi A}X_0 + e^{tA+2\pi A}\int_0^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds \\
=& e^{2\pi A}Y(t) - e^{tA+2\pi A}\int_0^t e^{-sA}B(s)ds + e^{tA+2\pi A}\int_0^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds \\
=& e^{2\pi A}Y(t) - e^{2\pi A}e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA}B(s)ds - \int_0^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds\right) \\
=& e^{2\pi A}Y(t) + e^{2\pi A}e^{tA}\int_t^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds.
\end{aligned}$$

Ainsi Y est 2π-périodique si et seulement si

$$Y(t) = e^{2\pi A}Y(t) + e^{2\pi A}e^{tA}\int_t^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds$$

ou encore

$$(e^{2\pi A} - I)Y(t) = -e^{2\pi A}e^{tA}\int_t^{t+2\pi} e^{-sA}B(s)ds$$

ce qui donne l'équation annoncée en multipliant les deux membres par e^{-tA}.

3.a) On trouve, en utilisant la périodicité de B, $G'(t) = -e^{2\pi A}(e^{-(t+2\pi)A}B(t+2\pi) - e^{-tA}B(t)) = (e^{2\pi A} - I)e^{-tA}B(t) = F'(t)$. b) Donc il existe une constante C telle que $F(t) = G(t) + C$. Donc $F(t) = G(t)$ pour tout t si et seulement si $F(0) = G(0)$.

4. On a $F(0) = (e^{2\pi A} - I)X_0$. La matrice $e^{2\pi A} - I$ est inversible car A n'admet pas de valeur propre de la forme ik avec $k \in Z$. En effet les valeurs propres de $e^{2\pi A}$ sont les $e^{2\pi\lambda}$ où λ est une valeur propre de A. Ainsi 1 n'est pas valeur propre de $e^{2\pi A}$. Donc l'équation $(e^{2\pi A} - I)X_0 = G(0)$ admet une unique solution X_0, et le système différentiel admet une unique solution périodique.