Chapitre 5

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est la fonction $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \text{ avec } \|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Le rôle majeur que joue la transformation de Fourier dans l'étude des EDP est lié au fait que, lorsque ces objets sont bien définis,

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ transforme l'action d'un opérateur différentiel à coefficients constants en produit par un polynôme. Ce fait n'aurait aucun intérêt sans une formule d'inversion permettant de retrouver la fonction f connaissant $\mathcal{F}(f)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)d\xi,$$

Malheureusement, cette formule n'a de sens que lorsque $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et ce n'est en général pas le cas pour $f \in L^1$. On commence donc par introduire une (suffisamment grande) classe de fonctions qui est stable par $\mathcal{F}$, et pour lesquelles les deux propriétés ci-dessus sont vraies.

5.1 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.1.1 Définitions, exemples

Définition 5.1.1 On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \quad \sup |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| \leq C_{\alpha,\beta}.$$

Exemples 5.1.2 *i)* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

ii) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction $\phi(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

iii) Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi_1\phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

iv) Aucune fraction rationnelle (même si elle est $\mathcal{C}^\infty$) n'appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On dit souvent qu'une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ et ϕ ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, entendant par là que leur produit par un polynôme quelconque est borné. La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui nous intéresse est celle donnée par la famille de semi-norme N_p (en fait ce sont des normes) définies par

$$N_p(\phi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \ \leq p} \sup |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Par exemple pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a l'équivalence

$$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \forall p \in \mathbb{N}, N_p(\phi) < +\infty.$$

Remarque 5.1.3 Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour $|\alpha| = p$,

$$C_1(1 + |x|)^p \leq |x^\alpha| \leq C_2(1 + |x|)^p.$$

On aurait donc pu, au lieu de la famille N_p, choisir les semi-normes

$$\widetilde{N}_p(\phi) = \max_{|\beta|\leq p} \|(1 + |x|)^p \partial^\beta \phi(x)\|_{L^\infty}.$$

Proposition 5.1.4 Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial^\beta\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $P(x)\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour n'importe quel polynôme P.

Preuve.— Il suffit de remarquer que

$$N_p(x^\alpha \partial^\beta \phi) = \sum_{|\lambda|,|\mu|\leq p} \sup |x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta \phi(x))| \leq N_{p+q}(\phi) \tag{5.1.1}$$

dès que $|\alpha|, |\beta| \leq q$. □

5.1.2 Convergence des suites et théorèmes de densité

Définition 5.1.5 Soit (ϕ_j) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que (ϕ_j) converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$N_p(\phi_j - \phi) \to 0 \text{ quand } j \to +\infty.$$

Remarque 5.1.6 Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si (ϕ_j) converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $(x^\alpha \phi_j)$ converge vers $x^\alpha \phi$ et $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge vers $(\partial^\alpha \phi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, la multiplication par x^α et la dérivation sont des opérations continues dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela découle immédiatement de l'inégalité (5.1.1).

Proposition 5.1.7 Pour tout $q \in [1, +\infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$. On a même, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^q} \leq C_q N_p(\phi)^{1-1/q} N_{p+n+1}(\phi)^{1/q} \text{ pour } |\alpha|, |\beta| \leq p.$$

Preuve.— On démontre directement l'inégalité : dans le cas $\alpha = \beta = 0$, elle donne $\mathcal{S} \subset L^q$. On pose $g(x) = x^\alpha \partial^\beta \phi(x)$.

$$\begin{aligned}\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^q}^q = \int |g(x)|^q dx &\leq \sup |g(x)|^{q-1} \int |g(x)| dx \\ &\leq \sup |g(x)|^{q-1} \sup (1+|x|)^{n+1} |g(x)| \int \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx \\ &\leq C_n N_0(g)^{q-1} N_{n+1}(g) = C_n N_p(\phi)^{q-1} N_{p+n+1}(\phi).\end{aligned}$$

□

Puisque $N_p(\phi) \leq N_{p+n+1}(\phi)$, on a bien sûr,

$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^q} \leq C_q N_{p+n+1}(\phi). \tag{5.1.2}$$

On notera que dans le cas $q = 1$, la Proposition 5.1.7 et (5.1.2) donnent la même majoration

$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^1} \leq C N_{p+n+1}(\phi), \tag{5.1.3}$$

alors que pour $q = \infty$, la Proposition 5.1.7 est meilleure que (5.1.2) et donne

$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} \leq C N_p(\phi), \tag{5.1.4}$$

ce qui découle aussi directement de la définition de N_p.

Puisque $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans les $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty[$, on en déduit le

Corollaire 5.1.8 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty[$.

On a aussi la

Proposition 5.1.9 $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite (ϕ_j) de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction qui vaut 1 sur $B(0,1)$. On pose $\phi_j(x) = \phi(x)\chi(x/j)$. Les fonctions ϕ_j sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et valent ϕ dans la boule $B(0,j)$. La formule de Leibniz donne

$$\partial^\beta(\phi - \phi_j)(x) = \partial^\beta\phi(x)(1-\chi(x/j)) + \sum_{|\gamma|\geq 1, \gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma \frac{1}{j^{|\gamma|}}\partial^{\beta-\gamma}\phi(x)(\partial^\gamma\chi)(\frac{x}{j}).$$

Donc, quand $j \to +\infty$,

$$\|x^\alpha\partial^\beta(\phi-\phi_j)(x)\|_\infty \leq \sup_{|x|\geq j}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| + \frac{C}{j}\sum_{\gamma\leq\beta}\|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\phi\|_\infty \to 0.$$

En effet

$$\sup_{|x|\geq j}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| \leq \frac{1}{j^2}\sup\left||x|^2x^\alpha\partial^\beta\phi(x)\right| \leq \frac{1}{j^2}N_{p+2}(\phi).$$

□

5.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

5.2.1 Définitions, premières propriétés

Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{F}(\phi)$ est bien défini et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5.2.1 Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on note $\hat{\phi}$, $\mathcal{F}(\phi)$ ou encore $\mathcal{F}_{x\to\xi}(\phi(x))$ la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\hat{\phi}(\xi) = \mathcal{F}(\phi)(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(\phi(x)) = \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx.$$

L'application linéaire $\phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$ est appelée transformation de Fourier.

On rassemble dans la proposition qui suit quelques propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.2.2 Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

i) La fonction $\mathcal{F}(\phi)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_j\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(-ix_j\phi(x))$.

ii) Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, on a $\mathcal{F}(\partial_j\phi)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}(\phi)(\xi)$.

iii) Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(\phi(x-a)) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(\phi)(\xi)$.

iv) Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{ia\cdot x}\phi(x)) = \mathcal{F}(\phi)(\xi - a)$.

Preuve.— i) La fonction $(x,\xi) \mapsto e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et

$$|\partial_{\xi_j}(e^{-ix\cdot\xi}\phi(x))| = |-ix_j e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)| = |x_j\phi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Donc le théorème de dérivation sous le signe somme dit que $\mathcal{F}(\phi)$ est $\mathcal{C}^1$, et que

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \int -ix_j e^{-ix\cdot\xi}\phi(x) = \mathcal{F}(-ix_j\phi(x)).$$

ii) On écrit la preuve pour $j=1$. En intégrant par parties

$$\int \partial_1\phi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx_1 = i\xi_1\int \phi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx_1$$

On intègre les deux membres de cette égalité par rapport à x'. Par Fubini, puisque $\phi, \partial_1\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\int \partial_1\phi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = i\xi_1\int \phi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Pour (iv), il suffit d'écrire

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{ia\cdot x}\phi(x)) = \int e^{-ix\cdot\xi}e^{ia\cdot x}\phi(x)dx = \int e^{-i(x-a)\cdot\xi}\phi(x)dx = \mathcal{F}(\phi)(\xi - a).$$

On a enfin, en changeant de variable,

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\phi(x-a)) = \int e^{ix\cdot\xi}\phi(x-a)dx = \int e^{i(x+a)\cdot\xi}\phi(x)dx = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(\phi)(\xi),$$

c'est à dire (iii). □

En raison de la présence de $i = \sqrt{-1}$ dans les formules (i) et (ii), on introduit la notation

$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j.$$

Par exemple (ii) devient $\mathcal{F}(D_j\phi) = \xi_j\mathcal{F}(\phi)$, et (i) s'écrit $D_j\mathcal{F}(\phi) = -\mathcal{F}(x_j\phi)$. On pourra retenir ces relations sous la forme

$$\begin{cases} \widehat{D_j\phi} = \xi_j\widehat{\phi}, \\ \widehat{x_j\phi} = -D_j\widehat{\phi}. \end{cases}$$

On remarque aussi, en utilisant (i), que $\mathcal{F}(\phi)$ est $\mathcal{C}^\infty$ puisque $x^\alpha\phi \in \mathcal{S}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

5.2.2 Gaussiennes (1)

Proposition 5.2.3 Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, on a

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{-z|x|^2}) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n e^{-|\xi|^2/4z},$$

où $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)}$, et $\ln z$ désigne la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$.

Preuve.— On remarque d'abord que

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{-z|x|^2}) = \int e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\dots+x_n\xi_n)}e^{-z(x_1^2+\dots x_n^2)}dx_1\dots dx_n = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j}e^{-zx_j^2}dx_j$$

Il suffit donc d'établir le résultat en dimension 1. On suppose d'abord que $z\in]0,+\infty[$. Soit $\phi_z(x)=e^{-zx^2}$. On a vu que

$$\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) = \int e^{-ix\xi}(-ix)e^{-zx^2}dx$$

Donc, en intégrant par parties,

$$\partial_\xi\hat{\phi}(\xi) = \frac{i}{2z}\int e^{-ix\xi}\phi'(x)dx = -\frac{i}{2z}\int(-i\xi)e^{-ix\xi}\phi(x)dx = -\frac{\xi}{2z}\hat{\phi}(\xi).$$

Ainsi $\hat{\phi}(\xi)=e^{-\xi^2/4z}\hat{\phi}(0)$. Or

$$\hat{\phi}(0) = \int e^{-zx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}},$$

d'où le résultat dans ce cas.

Soit alors $\Omega=\{z\in\mathbb{C}, \operatorname{Re} z>0\}$. Pour $\xi\in\mathbb{R}^n$ fixé, on note $\Phi:\Omega\to\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\Phi(z) = \int e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}dx.$$

Φ est une fonction holomorphe sur Ω. En effet
- $z\mapsto e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}$ est holomorphe pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,
- Si $K\subset\Omega$ est compact, il existe $\epsilon>0$ tel que $\operatorname{Re} z>\epsilon$ pour tout $z\in K$, et

$$|e^{-ix\cdot\xi}e^{-z|x|^2}| \le e^{-\epsilon|x|^2}\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Or on sait que pour $z\in]0,+\infty[$,

$$\Phi(z) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n e^{-|\xi|^2/4z}.$$

Comme le membre de droite est également holomorphe dans Ω, cette égalité reste vraie pour tout z dans Ω. □

Exercice 5.2.4 Calculer $\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{-zx^2})$ en calculant $\int_{\operatorname{Im}\zeta=\xi} e^{-z\zeta^2}d\zeta$ par la formule des résidus.

5.2.3 Formule d'inversion

Proposition 5.2.5 La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est donné par

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\phi(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\widetilde{\mathcal{F}(\phi)}(x).$$

De plus $\mathcal{F}$ est bicontinue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, au sens où, pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe une constante $C_p>0$ telle que

$$N_p(\mathcal{F}(\phi)), N_p(\mathcal{F}^{-1}(\phi)) \le C_p N_{p+n+1}(\phi).$$

Preuve.— a) On montre d'abord que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $|\alpha|, |\beta| \leq p$. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a vu que

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(\phi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial^\alpha(x^\beta \phi(x))).$$

Or la formule de Leibniz donne

$$\partial^\alpha(x^\beta\phi) = \sum_{\gamma\leq\alpha} C_\alpha^\gamma \partial^\gamma(x^\beta)\partial^{\alpha-\gamma}\phi,$$

donc $\partial^\alpha(x^\beta\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta\phi)) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(\phi)(\xi)| \leq& \|\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial^\alpha(x^\beta\phi(x)))\|_{L^\infty} \\ \leq& \|\partial^\alpha(x^\beta\phi(x))\|_{L^1} \\ \lesssim& N_{n+1}(\partial^\alpha(x^\beta\phi)) \\ \lesssim& N_{n+1+p}(\phi)\end{aligned}$$

d'après la Proposition 5.1.7. Donc $N_p(\mathcal{F}(\phi)) \leq C N_{n+1+p}(\phi)$.

b) On montre maintenant que pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi.$$

Or

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int e^{ix\cdot\xi}\Big(\int e^{-iy\cdot\xi}\phi(y)dy\Big)d\xi,$$

mais la fonction $g : (y,\xi) \mapsto e^{ix\cdot\xi}e^{ix\cdot\xi}\phi(y)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, puisque $|g(y,\xi)| = |\phi(y)|$, et on ne peut pas intervertir l'ordre des intégrations. Cependant, par le théorème de convergence dominée,

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int e^{ix\cdot\xi}e^{-\epsilon|\xi|^2}\hat{\phi}(\xi)d\xi,$$

et

$$\int e^{ix\cdot\xi}e^{-\epsilon|\xi|^2}\Big(\int e^{-iy\cdot\xi}\phi(y)dy\Big)d\xi = \int\Big(\int e^{i(x-y)\cdot\xi}e^{-\epsilon|\xi|^2}d\xi\Big)\phi(y)dy.$$

Donc, grâce à la proposition 5.2.3,

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}}\Big)^n\int e^{-|x-y|^2/4\epsilon}\phi(y)dy.$$

On effectue enfin le changement de variable $u = (x-y)/2\sqrt{\epsilon}$, et on obtient

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\sqrt{\pi})^n\int e^{-|u|^2}\phi(x-2\sqrt{\epsilon}u)du.$$

Le théorème de convergence dominée, donne alors

$$\int e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = (2\sqrt{\pi})^n\phi(x)\int e^{-|u|^2}du = (2\pi)^n\phi(x).$$

c) Le reste de la proposition découle du fait que $\mathcal{F}^{-1}(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\widetilde{\mathcal{F}(\phi)}$. □

5.2.4 Formule de Parseval

Proposition 5.2.6 (Lemme des chapeaux) Soit ϕ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

i) $\displaystyle\int \hat{\phi}\psi = \int \phi\hat{\psi}$.

ii) $\displaystyle\int \phi\overline{\psi} = (2\pi)^{-n}\int \hat{\phi}\overline{\hat{\psi}}$

Preuve.— (i) On a, par Fubini,

$$\int \hat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int (\int e^{-ix\cdot y}\phi(y)dy)\psi(x)dx = \int (\int e^{-ix\cdot y}\psi(x)dx)\phi(y)dy = \int \phi\hat{\psi}.$$

(ii) Il suffit d'appliquer (i) à ϕ et $\omega = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}}$. En effet

$$\widehat{\omega}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{\psi}(x)}dx = \overline{\mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi})(\xi)} = \overline{\psi(x)},$$

donc

$$\int \hat{\phi}\omega = (2\pi)^{-n}\hat{\phi}\overline{\hat{\psi}} = \int \phi\overline{\psi}.$$

□

En terme du produit scalaire hermitien dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, la relation (ii) s'écrit

$$(\phi, \psi)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{\phi}, \hat{\psi})_{L^2}.$$

En particulier pour $\psi = \phi$, on obtient la formule de Parseval :

Corollaire 5.2.7 Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\|\phi\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|\hat{\phi}\|_{L^2}.$$

Exercice 5.2.8 Montrer que $\mathcal{F}(\bar{\phi}) = \overline{\widecheck{\mathcal{F}(\phi)}}$.

5.2.5 Convolution et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 5.2.9 Soit ϕ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

i) $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}\hat{\psi}$.

ii) $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\phi} * \hat{\psi}$.

Preuve.— On commence par le point (i). On ne peut pas utiliser les propriétés de la convolution des distributions, puisque ϕ et ψ ne sont pas nécessairement convolables. Par contre, on sait que $\phi * \psi \in L^1$ puisque $\phi, \psi \in L^1$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha|, |\beta| \leq p$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x^\alpha \partial^\beta (\phi * \psi)(x) = x^\alpha \partial_x^\beta \int \phi(x-y)\psi(y)dy.$$

Comme la fonction $y \mapsto \partial_x^\beta \phi(x-y)\psi(y)$ est intégrable pour tout x, et dominée par $\sup |\partial^\beta \phi|\, |\psi(y)| \in L^1$, on a

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial^\beta (\phi * \psi)(x) &= \int x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x-y)\psi(y)dy = \int (x-y+y)^\alpha \partial_x^\beta \phi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int (x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma} \partial_x^\beta \phi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int (x-y)^\gamma (\partial^\beta \phi)(x-y) y^{\alpha-\gamma}\psi(y)dy \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (y^\gamma \partial^\beta \phi) * (y^{\alpha-\gamma}\psi)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young,

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\phi * \psi)\|_{L^\infty} \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \|y^\gamma \partial^\beta \phi\|_{L^1}\ \|y^{\alpha-\gamma}\psi\|_{L^\infty}.$$

La proposition 5.1.7, en particulier (5.1.3) et (5.1.4), donne alors

$$N_p(\phi * \psi) \leq C N_{p+n+1}(\phi) N_p(\psi), \tag{5.2.5}$$

ce qui montre que $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On a enfin, par Fubini,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi * \psi)(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \phi * \psi(x)dx = \int e^{-ix\cdot\xi} \big(\int \phi(x-y)\psi(y)dy \big) dx \\ &= \int \psi(y) \big(\int e^{-ix\cdot\xi} \phi(x-y)\psi(y)dx \big) dy \\ &= \int \psi(y) \big(\int e^{-i(y+z)\cdot\xi} \phi(z)dz \big) dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} \psi(y)dy \int e^{-iz\cdot\xi}\phi(z)dz = \hat{\phi}(\xi)\hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

On montre maintenant (ii). Soit $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $u = \mathcal{F}^{-1}(\phi), v = \mathcal{F}^{-1}(\psi)$. On a

$$\begin{aligned} \widehat{\phi\psi}(\xi) =& \mathcal{F}(\hat{u}\hat{v})(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u*v))(\xi) = (2\pi)^n \widetilde{u*v}(\xi) \\ =& (2\pi)^n \int u(-\xi-\eta)v(\eta)d\eta = (2\pi)^n \int \check{u}(\xi+\eta)v(\eta)d\eta \\ =& (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi+\eta)\check{\hat{\psi}}(\eta)d\eta = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi-\eta)\hat{\psi}(\eta)d\eta \\ =& (2\pi)^{-n} \hat{\phi} * \hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

□

5.3 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées

5.3.1 Définition, exemples

Définition 5.3.1 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T est une distribution tempérée lorsqu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T, \phi\rangle \leq C N_p(\phi).$$

Proposition 5.3.2 Si T est une distribution tempérée, T s'étend de manière unique en une forme linéaire $\widetilde{T}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, continue dans le sens où, si $\phi_j \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\langle \widetilde{T}, \phi_j\rangle \to \langle \widetilde{T}, \phi\rangle$.

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il existe une suite (ϕ_j) de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi_j \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La suite $(\langle T, \phi_j\rangle)_j$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, puisque, T étant tempérée,

$$|\langle T, \phi_j - \phi_k\rangle| \leq C N_p(\phi_j - \phi_k). \tag{5.3.6}$$

Soit alors $\tilde{T}$ la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\langle \tilde{T}, \phi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T, \phi_j\rangle$. On voit facilement que $\langle \tilde{T}, \phi\rangle$ ne dépend pas du choix de la suite (ϕ_j), puisque lorsque $\phi_j, \psi_j \to \phi$,

$$|\langle T, \phi_j - \psi_j\rangle| \leq C N_p(\phi_j - \psi_j) \to 0.$$

La propriété de continuité de $\tilde{T}$ s'obtient en passant à la limite $k \to +\infty$ dans (5.3.6).

Enfin si T_1 est un autre prolongement continu de T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle T_1, \phi\rangle = \langle T_1, \phi - \phi_j\rangle + \langle T_1, \phi_j\rangle \to 0 + \langle \tilde{T}, \phi\rangle,$$

donc $T_1 = \tilde{T}$. □

Exemple 5.3.3 Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$, tels que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, et en particulier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T, \phi\rangle \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \phi| \leq C N_p(\phi).$$

Donc $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: les distributions à support compact sont tempérées.

Exemple 5.3.4 Pour $p \in [1, +\infty]$, on a $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et pour $q \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$, on a

$$|\langle T_f, \phi\rangle| \leq |\int f(x)\phi(x)dx| \leq \|f\|_{L^p}\|\phi\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}N_{n+1}(\phi),$$

grâce à (5.1.2). Compte tenu du Corollaire 5.1.8, on a en particulier $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 5.3.5 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, telle que $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^p$ pour une constante $C > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi\rangle| \leq & C\int (1 + |x|)^p|\phi(x)|dx \leq C\int (1 + |x|)^{p+n+1}|\phi(x)|\frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}}dx \\ \leq & CN_{p+n+1}(\phi)\int \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}}dx \leq C_nN_{p+n+1}(\phi). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En particulier les polynômes définissent des distributions tempérées, et $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 5.3.6 Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $x^\alpha\partial^\beta T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Preuve.— Il suffit de montrer que x_jT et ∂_jT sont tempérées quand la distribution T l'est. Or pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle x_jT, \phi\rangle = \langle T, x_j\phi\rangle$ et $\langle\partial_jT, \phi\rangle = -\langle T, \partial_j\phi\rangle$. La proposition découle donc directement de (5.1.1). □

Exercice 5.3.7 Montrer que la fonction $x \mapsto e^xe^{ie^x}$ n'est pas majorée par un polynôme, mais qu'elle appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pourra montrer que c'est la dérivée d'une distribution tempérée.

Définition 5.3.8 On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à croissance modérée lorsque pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\beta > 0$ et $m_\beta \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta(1 + |x|)^{m_\beta}.$$

On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 5.3.9 Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, alors $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. La formule de Leibniz donne

$$|x^\alpha\partial^\beta(f\phi)| \leq \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial^\gamma f|\,|\partial^{\beta-\gamma}\phi| \leq C_\gamma\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\beta}{\gamma}(1 + |x|)^{m_\gamma}|\partial^{\beta-\gamma}\phi|.$$

Compte tenu de la Remarque 5.1.3, on a donc

$$N_p(f\phi) \leq CN_{p+M}(\phi),$$

avec $M = \max_{|\gamma|\leq p} m_\gamma$. Soit alors $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a

$$|\langle fT, \phi\rangle| = |\langle T, f\phi\rangle| \leq CN_p(f\phi) \leq C'N_{p+M}(\phi),$$

ce qui montre que fT est une distribution tempérée. □

Exercice 5.3.10 Montrer que $\mathrm{vp}(1/x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5.3.11 Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $N_p(\tau_a\phi) \leq C(1 + |a|)^p$. En déduire que $(x \mapsto e^x) \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.3.2 Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 5.3.12 Soit (T_j) une suite de distributions tempérées. On dit que (T_j) tend vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T_j, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$.

Comme pour la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, cette notion de convergence faible entraine automatiquement la convergence forte. On admet la

Proposition 5.3.13 Si, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la suite $(\langle T_j, \phi\rangle)$ converge, alors il existe une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 5.3.14 Lorsque $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a bien sûr $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La réciproque n'est pas vraie : quelle que soit la suite de nombre réels $(a_j)_j$, la suite $(a_j\delta_j)$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par contre elle ne converge (vers 0 forcément) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ qu'à condition que la suite (a_j) soit à croissance modérée, i.e. il existe $C > 0$, $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a_j| \leq (1 + j)^p.$$

Remarque 5.3.15 Si $(f_j) \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j) \to f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $fT_j \to fT$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.

5.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

5.4.1 Définition

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\phi \mapsto \langle T, \hat{\phi}\rangle$ est une distribution tempérée puisqu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \hat{\phi}\rangle| \leq CN_p(\hat{\phi}) \leq C'N_{p+n+1}(\phi),$$

grâce à la Proposition 5.2.5.

Définition 5.4.1 Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on note $\hat{T} = \mathcal{F}(T)$ la distribution tempérée définie par

$$\langle \hat{T}, \phi\rangle = \langle T, \hat{\phi}\rangle,\ \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 5.4.2 *i)* Pour $f \in L^1$, on a, grâce au lemme des chapeaux (Proposition 5.2.6),

$$\langle \widehat{T_f}, \phi\rangle = \int f(x)\hat{\phi}(x)dx = \int \hat{f}(x)\phi(x)dx,$$

donc $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.

ii) Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \widehat{\delta_0}, \phi\rangle = \int \phi(x)dx$, donc $\widehat{\delta_0} = 1$.

Proposition 5.4.3 La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Son inverse est $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\check{\mathcal{F}}$. De plus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continues sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dans le sens où si $T_j \to T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(T_j) \to \mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

La preuve de cette proposition est immédiate, compte tenu de la définition ci-dessus et de la Proposition 5.2.5. Dans le même registre, du transport à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on notera les relations

$$\mathcal{F}(D_jT) = \xi_j\hat{T},\ \ \mathcal{F}(x_jT) = -D_j\hat{T},\ \text{ et }\ \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(T) = (2\pi)^n\ \check{T}.$$

Exemple 5.4.4 $\hat{1} = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(\delta_0) = (2\pi)^n\ \check{\delta_0} = (2\pi)^n\delta_0$.

5.4.2 Gaussiennes (2)

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $\operatorname{Re} z = 0$, la fonction $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par contre elle est bornée, donc définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont on peut calculer la transformée de Fourier.

Proposition 5.4.5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $T = e^{i\lambda|x|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\widehat{T} = \mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{i\lambda|x|^2}) = \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)^n e^{in\pi\,\mathrm{sign}(\lambda)/4} e^{-i|\xi|^2/4\lambda}.$$

Preuve.— Soit (z_j) une suite de $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ telle que $z_j \to -i\lambda$. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée donne, quand $j \to +\infty$,

$$\int e^{-z_j|x|^2}\phi(x)dx \to \int e^{i\lambda|x|^2}\phi(x)dx,$$
$$\int e^{-|\xi|^2/4z_j}\phi(\xi)d\xi \to \int e^{-i\lambda|\xi|^2/4\lambda}\phi(\xi)d\xi.$$

On en déduit que, notant $T_j = e^{-z_j|x|^2}$, on a $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par continuité de la transformation de Fourier, on a aussi $\mathcal{F}(T_j) \to \mathcal{F}(T)$. Or on a vu que

$$\mathcal{F}(T_j) = \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z_j}}\Big)^n e^{-|\xi|^2/4z_j},$$

où $\sqrt{z_j} = \sqrt{|z_j|}\; e^{i\pi\,\mathrm{sign}(z_j)/4} \to \sqrt{|\lambda|}\; e^{-i\pi\,\mathrm{sign}(\lambda)/4}$. Donc, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(T_j) \to \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}\Big)^n e^{in\pi\,\mathrm{sign}(\lambda)/4} e^{-i\lambda|\xi|^2/4\lambda} = \mathcal{F}(T).$$

□

5.4.3 Symétries

On étudie comment certaines symétries de la distribution tempérée T se traduisent pour sa transformée de Fourier. Une façon commode de formuler ces invariances consiste à définir l'action d'une matrice A, supposée inversible, sur T.

Proposition 5.4.6 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire $T \circ A$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle T \circ A, \phi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle T, \phi \circ A^{-1}\rangle,$$

est une distribution. De plus $T \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $M = (m_{ij})$ une matrice à coefficients réels. On a

$$\partial_j(\phi \circ M)(x) = \nabla\phi(Mx) \cdot \partial_j(Mx) = \sum_{k=1}^n m_{k,j}(\partial_k\phi \circ M)(x),$$

et en itérant,

$$\partial_{j_1,j_2,\ldots,j_s}(\phi\circ M)(x)=\sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n} m_{k_1,j_1}\ldots m_{k_s,j_s}(\partial_{k_1,k_2,\ldots,k_s}\phi)(Mx).$$

En particulier, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|\partial^\beta(\phi\circ M)\|_{L^\infty}\leq C\sum_{|\beta|=|\alpha|}\sup|\partial^\beta\phi|,$$

et, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$N_p(\phi\circ M)\leq CN_p(\phi).$$

Soit alors $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et $K\subset\mathbb{R}^n$ un compact. Il existe $C>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans K,

$$|\langle T\circ A,\phi\rangle|\leq\frac{1}{|\det A|}|\langle T,\phi\circ A^{-1}\rangle|\leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|\partial^\alpha(\phi\circ A^{-1})|\leq C'\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|\partial^\alpha\phi|,$$

donc $T\circ A$ est une distribution.

Supposons maintenant de plus que $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il existe $C>0$ et $p\in\mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T\circ A,\phi\rangle|\leq\frac{1}{|\det A|}|\langle T,\phi\circ A^{-1}\rangle|\leq CN_p(\phi\circ A^{-1})\leq C'N_p(\phi),$$

donc $T\circ A$ est une distribution tempérée dans ce cas. □

Proposition 5.4.7 Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\mathcal{F}(T\circ A)=\frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(T)\circ{}^tA^{-1}.$$

Preuve.— Soit $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a $\langle\widehat{T\circ A},\phi\rangle=\frac{1}{|\det A|}\langle T,\hat\phi\circ A^{-1}\rangle$. Or

$$\begin{aligned}\hat\phi\circ A^{-1}(\xi)&=\int e^{-ix\cdot A^{-1}\xi}\phi(x)dx=\int e^{-i\,{}^tA^{-1}x\cdot\xi}\phi(x)dx\\&=\int e^{-i\,y\cdot\xi}\phi({}^tAy)|\det A|dy=|\det A|\,\widehat{\phi\circ{}^tA}(\xi).\end{aligned}$$

Donc

$$\langle\widehat{T\circ A},\phi\rangle=\langle\hat T,\phi\circ{}^tA\rangle=|\det A^{-1}|\langle\hat T\circ{}^tA^{-1},\phi\rangle.$$

□

Définition 5.4.8 On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est paire (resp. impaire) lorsque $\check{T} = T$ (resp. $\check{T} = -T$).

Corollaire 5.4.9 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

i) Si T est paire (resp. impaire), alors $\hat{T}$ est paire (resp. impaire).

ii) Si T est homogène de degré p, alors $\hat{T}$ est homogène de degré $-p-n$.

Preuve.— On applique la Proposition 5.4.7 avec $A = A_\lambda = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas, on a

$$\widehat{T \circ A_\lambda} = |\lambda|^{-n}\hat{T} \circ A_{1/\lambda}. \tag{5.4.7}$$

Or $\check{T} = T \circ A_{-1}$. Donc

$$T = \pm\check{T} \iff \hat{T} = \pm\widehat{T \circ A_{-1}} = \pm\hat{T} \circ A_{-1} \iff \hat{T} = \pm\check{\hat{T}},$$

ce qui prouve le point (i).

D'autre part, pour $\lambda > 0$, $\langle T \circ A_\lambda, \phi\rangle = \lambda^{-n}\langle T, \phi(x/\lambda)\rangle$. Donc T est homogène de degré p si et seulement si $T \circ A_\lambda = \lambda^p T$, ce qui, compte tenu de 5.4.7, équivaut à $\hat{T} \circ A_{1/\lambda} = \lambda^{n+p}\hat{T}$, c'est-à-dire à $\hat{T}$ homogène de degré $-n-p$. □

5.4.4 Transformation de Fourier sur L^1 et L^2

On revient rapidement sur les propriétés de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée lorsque cette distribution se trouve être dans L^1 ou L^2.

Proposition 5.4.10 Soit $T = T_f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(T) = T_{\hat{f}}$, et plus précisément

i) $\mathcal{F}(T)$ est la fonction continue donnée par $\mathcal{F}(T)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}dx$. De plus $\mathcal{F}(T)$ tend vers 0 à l'infini.

ii) Si de plus $\mathcal{F}(T)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$ presque partout.

Preuve.— Le fait que $\hat{f}$ soit une fonction continue est une conséquence facile du théorème de continuité sous le signe somme, et le lemme de Riemann-Lebesgue dit que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle\hat{T}, \phi\rangle = \langle T, \hat{\phi}\rangle = \int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi = \int f(\xi)(\int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx)d\xi.$$

Or la fonction $(x,\xi)\mapsto f(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)$ est clairement dans $L^1(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$, donc

$$\langle\hat{T},\phi\rangle=\int\phi(x)(\int e^{-ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi)dx=\langle\hat{f},\phi\rangle,$$

ce qui termine la preuve du point (i). On sait aussi que $\mathcal{F}^{-1}(T_{\hat{f}})=T_f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a donc $T_{\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})}=T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui entraine que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f$ presque partout. □

Exercice 5.4.11 Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que s'il existe $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle T,\phi\rangle=\langle f,\hat{\phi}\rangle$, alors $T=\hat{f}$.

Proposition 5.4.12 L'application $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\mapsto(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}(T)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ induit une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe une suite $(\phi_j)_j$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui tend vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le Corollaire 5.2.7 donne

$$\|\hat{\phi}_p-\hat{\phi}_q\|_{L^2}=(2\pi)^{n/2}\|\phi_p-\phi_q\|_{L^2}.$$

Donc la suite $(\widehat{\phi_j})$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}^n)$, qui converge aussi vers un certain $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Or (ϕ_j) converge vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, donc $\hat{\phi}_j$ converge vers $\hat{f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $\hat{f}=g$, donc $\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. On peut alors passer à la limite dans l'égalité du Corollaire 5.2.7

$$\|\hat{\phi}_j\|_{L^2}=(2\pi)^{n/2}\|\phi_j\|_{L^2},$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Remarque 5.4.13 Il existe des fonctions f de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $x\mapsto e^{-ix\cdot\xi}f(x)$ n'est intégrable pour aucun ξ (par exemple, pour $n=1$, $f(x)=(1+|x|)^{-3/2}$). Par contre, pour $R>0$, la fonction g_R définie par

$$g_R(\xi)=\int_{|x|<R}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$$

tend vers $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ compte tenu de la Proposition 5.4.12, puisque $f1_{|x|<R}\to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On retrouve ainsi la formule de Plancherel : pour $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{f}(\xi)=\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|<R}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx.$$

5.5 Transformation de Fourier des distributions à support compact

La transformation de Fourier échange la décroissance à l'infini d'une fonction avec la régularité de sa transformée de Fourier, comme le montre par exemple l'inégalité

$$\|D^\alpha \hat{\phi}\|_{L^\infty} = \|\mathcal{F}(x^\alpha \phi)\|_{L^\infty} \leq \|x^\alpha \phi\|_{L^1}, \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On ne peut pas décroitre plus vite à l'infini qu'en étant à support compact. Du coup, on ne devrait pas être surpris par les résultats de cette section.

5.5.1 Régularité

Proposition 5.5.1 Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(T)$ est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

De plus il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ avec

$$|\partial^\alpha \mathcal{F}(T)(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^m.$$

Preuve.— D'après le lemme de dérivation sous le crochet, la fonction $v(\xi)$ définie par

$$v(\xi) = \langle T_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle$$

est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On devrait écrire en fait $v(\xi) = \langle T_x, \chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle$, où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 dans un voisinage du support de T, et l'on voit sur cette expression que les hypothèses du lemme de dérivation sous le crochet sont bien vérifiées. On a aussi

$$\partial^\alpha v(\xi) = \langle T_x, (-ix)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle,$$

d'où, pour une constante $C > 0$, un entier $m \in \mathbb{N}$ et un compact K qui ne dépendent que de T,

$$|\partial^\alpha v(\xi)| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\beta \big((-ix)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\big)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^m$$

Il reste à montrer que $\hat{T} = v$. Or pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a, grâce au lemme d'intégration sous le crochet,

$$\langle \hat{T}, \phi\rangle = \langle T_x, \chi(x) \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(\xi)d\xi\rangle = \int \langle T_x, \chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle \phi(\xi)d\xi,$$

d'où $\hat{T}(\xi) = \langle T_x, \chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle$. □

A titre d'exemple, on calcule la transformée de Fourier de la mesure de surface σ_R de la sphère $\mathcal{S}_R^2$ de rayon R dans $\mathbb{R}^3$. On utilisera ce résultat plus loin.

Proposition 5.5.2 Pour $R > 0$, on a

$$\widehat{\sigma_R}(\xi) = 4\pi R^2 \frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|}.$$

Preuve.— On commence par montrer que σ_R est invariante par rotation : si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale,

$$\langle \sigma_R \circ A, \phi\rangle = \langle \sigma_R, \phi \circ A^{-1}\rangle = \int \phi(A^{-1}x) d\sigma_R(x).$$

Or

$$\int_0^R \int_{|y|=r} \phi(y) d\sigma_r(y) dr = \int_{|x|\leq R} \phi(y) dy = \int_{|x|\leq R} \phi(A^{-1}x) dx = \int_0^R \int_{|x|=r} \phi(A^{-1}x) d\sigma_r(x) dr,$$

donc, en dérivant par rapport à R,

$$\int_{|y|=R} \phi(y) d\sigma_R(y) = \int_{|x|=R} \phi(A^{-1}x) d\sigma_R(x),$$

et $\sigma_R \circ A = \sigma_R$.

On a alors aussi $\widehat{\sigma_R} = \widehat{\sigma_R \circ A} = \frac{1}{|\det A|}\widehat{\sigma_R} \circ {}^tA^{-1} = \widehat{\sigma_R} \circ A$. Donc $\widehat{\sigma_R}$ est également invariante par rotation. Pour $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il existe une rotation qui envoie ξ sur $(|\xi|, 0, 0)$, et

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_R}(\xi) =& \widehat{\sigma_R}(|\xi|, 0, 0) = \int e^{-ix_1|\xi|} d\sigma_R(\xi) \\
=& \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-iR|\xi|\cos\theta} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
=& 2\pi R^2 \int_0^{\pi} e^{-iR|\xi|\cos\theta} \sin\theta d\theta,
\end{aligned}$$

d'où le résultat en posant $t = \cos\theta$. □

5.5.2 Le théorème de Paley-Wiener

On vient de voir que la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On a en fait beaucoup mieux : il s'agit d'une fonction analytique dans $\mathbb{C}^n$, dans le sens suivant.

Définition 5.5.3 Soit $F : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. On suppose que F est $\mathcal{C}^1$ comme fonctions des $2n$ variables réelles $(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1, \dots, \mathrm{Re}\, z_n, \mathrm{Im}\, z_n)$. On dit alors que F est holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ lorsque

$$\forall z \in \Omega, \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \overline{\partial_{z_j}} F(z) = 0,$$

où $\overline{\partial_{z_j}} F = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j})F$.

Les fonctions holomorphes de plusieurs variables sont un vaste sujet d'étude en elles-mêmes. Dans un premier temps, on retiendra qu'il s'agit de fonctions holomorphes de chacune de leur variables, les autres étant fixées.

On commence par étudier le cas de la transformée de Fourier des fonctions régulières à support compact.

Proposition 5.5.4 *i)* Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,r)$. Alors $\hat{\phi}$ s'étend en une fonction holomorphe F sur $\mathbb{C}^n$, qui vérifie

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall z \in \mathbb{C}^n,\ |F(z)| \leq C_N(1+|z|)^{-N} e^{r|\operatorname{Im} z|} \tag{5.5.8}$$

ii) Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui vérifie (5.5.8), alors il existe $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,r)$ et $\hat{\phi}(\xi) = F(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 5.5.5 *i)* Si $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas la fonction nulle, sa transformée de Fourier n'est pas à support compact, puisque, comme en une variable, la seule fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ à support compact est la fonction nulle.

ii) Pour $z = \xi \in \mathbb{R}$, (5.5.8) donne

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \hat{\phi}(\xi) = \mathcal{O}((1+|\xi|)^{-N}).$$

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On voit facilement que

$$F(z) = \hat{\phi}(z) = \int e^{-ix\cdot z}\phi(x)dx$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ grâce au théorème de dérivation sous le signe somme. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a aussi

$$z^\alpha F(z) = \int z^\alpha e^{-ix\cdot z}\phi(x)dx = \int (-D_x)^\alpha (e^{-ix\cdot z})\phi(x)dx = \int e^{-ix\cdot z} D^\alpha\phi(x)dx,$$

d'où l'existence, pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'une constante $C_N > 0$ telle que

$$(1+|z|)^N |F(z)| \leq C_N e^{r|\operatorname{Im} z|}.$$

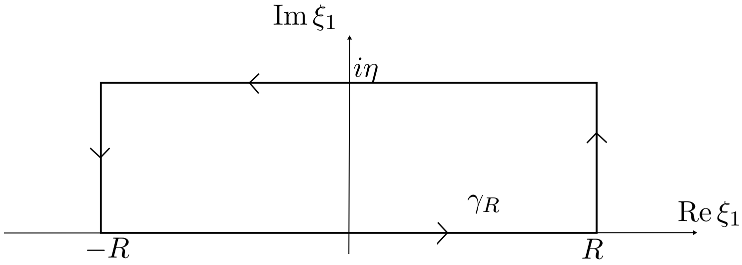
On montre maintenant le point (ii). Supposons que F soit holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et vérifie (5.5.8). Alors $F|_{\mathbb{R}^n} \in L^1$, et la fonction

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}F(\xi)d\xi,$$

est $\mathcal{C}^\infty$. Puisque $\hat{\phi}(\xi) = F(\xi)$, il reste à montrer que $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,r)$.

On admet provisoirement que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi. \tag{5.5.9}$$



En prenant $\eta = \lambda\frac{x}{|x|}$, $\lambda > 0$, on a $x\cdot(\xi+i\eta) = x\cdot\xi + i\lambda|x|$, $|\eta| = \lambda$ et pour $N = n+1$ (5.5.8) donne

$$|e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)| \leq C_n e^{-\lambda|x|}(1+|x|)^{-n-1}e^{r\lambda}.$$

Donc pour tout $\lambda > 0$,

$$|\phi(x)| \leq C_n e^{(r-|x|)\lambda}\int(1+|x|)^{-n-1}dx,$$

ce qui montre que $\phi(x) = 0$ lorsque $|x| > r$.

Revenons à (5.5.9). La fonction $g : z_1 \mapsto e^{ix\cdot z}F(z_1, z')$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, donc

$$\int_{\gamma_R} e^{ix\cdot z}F(z_1,z')dz_1 = 0$$

en particulier lorsque γ_R est le bord du rectangle indiqué sur la figure ci-dessus. Grâce à (5.5.8), on voit facilement que les intégrales sur les côtés du rectangle tendent vers 0 quand $R \to +\infty$, ce qui montre que pour tout $\eta_1 \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot(\xi+i(\eta_1,0,\ldots,0))}F(\xi+i(\eta_1,0,\ldots,0))d\xi.$$

Il suffit alors de répéter cet argument pour la fonction $\phi_1(x)$ définie par le membre de droite de l'égalité ci-dessus. $\square$

5.5.3 Le théorème de Payley-Wiener-Schwartz

La proposition précédente dit que la transformée de Fourier d'une fonction régulière à support compact inclus dans $B(0,r)$ croit "un peu moins vite" que $e^{r|\operatorname{Im} z|}$ quand z s'éloigne de l'axe réel. Dans le cas des distributions à support compact inclus dans $B(0,r)$, la croissance est juste "un peu plus rapide" que $e^{r|\operatorname{Im} z|}$.

Proposition 5.5.6 *i)* Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On note $m \in \mathbb{N}$ son ordre, et $r > 0$ un réel tel que $\operatorname{supp} T \subset B(0,r)$. Alors la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ $\xi \to \hat{T}(\xi)$ s'étend en une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}^n,\ |F(z)| \leq C(1+|z|)^m e^{r|\operatorname{Im} z|} \tag{5.5.10}$$

ii) Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui vérifie (5.5.10), alors il existe $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} T \subset B(0,r)$ et $\hat{T}(\xi) = F(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Preuve.— Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $F(z) = \langle T_x, e^{-iz\cdot x}\rangle$, où $z \cdot x = \sum_{j=1}^n z_j x_j$. Grâce au théorème de dérivation sous le crochet, on voit facilement que $\overline{\partial_{z_j}} F(z) = 0$ pour tout j. D'autre part, puisque $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathring{K}$ voisinage de $\operatorname{supp} T$,

$$|F(z)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial_x^\alpha (e^{-iz\cdot x})|.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut prendre $K = \overline{B(0, R+\epsilon)}$, et on obtient

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^m e^{(R+\epsilon)|\operatorname{Im} z|},$$

et donc (5.5.10).

Réciproquement, supposons que F soit holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et vérifie (5.5.10). Pour $z = \xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^m,$$

donc $F|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On pose alors $T = \mathcal{F}^{-1}(F|_{\mathbb{R}^n}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et l'on doit montrer que $\operatorname{supp} T \subset B(0, r)$.

Soit (ρ_ϵ) une approximation de l'identité. Puisque supp $\rho_\epsilon \subset B(0, \epsilon)$, d'après le point (i) du théorème de Paley-Wiener, $\widehat{\rho_\epsilon}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ avec

$$|\widehat{\rho_\epsilon}(z)| \leq C_N (1+|z|)^{-N} e^{\epsilon|\operatorname{Im} z|}.$$

On pose $F_\epsilon(z) = F(z)\widehat{\rho_\epsilon}(z)$. D'après l'inégalité précédente et (5.5.10), pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$|F_\epsilon(z)| \leq C(1+|z|)^{-N} e^{(r+\epsilon)|\operatorname{Im} z|}.$$

Le point (ii) du théorème de Payley-Wiener dit alors qu'il existe une fonction $\phi_\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \phi_\epsilon \subset B(0, r+\epsilon)$ et $\widehat{\phi_\epsilon} = F_\epsilon$.

Pour $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \psi \cap B(0, r) = \emptyset$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\operatorname{supp} \psi \subset B(0, R+\epsilon_0)^c$. On a donc

$$\begin{aligned}
\langle T, \psi\rangle =& \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(\psi)\rangle = \int F(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\psi)(\xi)d\xi \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int F_\epsilon(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\psi)(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int \widehat{\phi_\epsilon}(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\psi)(\xi)d\xi \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int \phi_\epsilon(x)\psi(x)dx = 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\operatorname{supp} T \subset B(0, r)$. □

5.6 Convolution et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

On revient maintenant sur la convolution de deux distributions lorsque l'une d'entre elle est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On va en particulier définir la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.6.1 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 5.6.1 Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

i) Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p > 0, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ N_p(\phi * T) \leq C_p N_{p+k}(\phi)$$

ii) Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{\phi * S}(\xi) = \hat{\phi}(\xi)\hat{S}(\xi)$.

Preuve.— Puisque ϕ est $\mathcal{C}^\infty$, on sait que $T * \phi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et que

$$x^\alpha \partial^\beta (T * \phi)(x) = \langle T_y, x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x-y)\rangle.$$

Puisque T est à support compact, T est d'ordre fini k, et il existe $C > 0$ tel que, si $\operatorname{supp} T \subset B(0,R)$,

$$\begin{aligned}
|x^\alpha \partial^\beta (T * \phi)(x)| &\leq C \sum_{|\mu|\leq k} \sup_{|y|\leq R} |\partial_y^\mu (x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x-y))| \\
&\leq C \sum_{|\mu|\leq k} \sup_{|y|\leq R} |x^\alpha \partial^{\beta+\mu} \phi(x-y)| \\
&\leq C \sum_{|\mu|\leq k} \sup_{|y|\leq R} |((x-y)+y)^\alpha \partial^{\beta+\mu} \phi(x-y)| \\
&\leq C N_{p+k}(\phi),
\end{aligned}$$

pour $|\alpha|, |\beta| \leq p$, où la dernière inégalité s'obtient par exemple par la formule du binôme. On a donc prouvé le point (i). Pour le point (ii), on utilise le lemme d'intégration sous le crochet :

$$\begin{aligned}
\widehat{T * \phi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \langle T_y, \phi(x-y)\rangle dx \\
&= \langle T_y, \int e^{-ix\cdot\xi} \phi(x-y) dx\rangle = \langle T_y, \int e^{-i(y+z)\cdot\xi} \phi(z) dz\rangle \\
&= \langle T_y, e^{-iy\cdot\xi}\rangle \hat{\phi}(\xi) = \hat{T}(\xi)\hat{\phi}_j(\xi).
\end{aligned}$$

Seule difficulté, il faut justifier le passage de la première à la seconde ligne alors que $(x,y) \mapsto \phi(x-y)$ n'est pas supposée à support compact. Soit donc (ϕ_j) une suite de fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui tend vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le calcul précédent montre que

$$\widehat{T * \phi_j}(\xi) = \hat{T}(\xi)\hat{\phi}_j(\xi).$$

Or d'après (i), $T * \phi_j \to T * \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque la transformation de Fourier est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (cf. la Proposition 5.2.5), on a donc $\widehat{T * \phi_j} \to \widehat{T * \phi}$. Enfin on voit facilement que $\hat{T}(\xi)\hat{\phi}_j(\xi) \to \hat{T}(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

5.6.2 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

> **Proposition 5.6.2** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On a $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{T * S} = \hat{S}(\xi)\hat{T}$.

Preuve.— Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il existe une suite (ψ_j) de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_j \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La Proposition 4.3.16 donne $\langle T * \psi_j, \phi\rangle = \langle T, \check{\psi}_j * \phi\rangle$. Or $T * \psi_j \to T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ grâce à la Proposition 4.3.13, et $\check{\psi}_j * \phi \to \check{S} * \phi$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc

$$\langle T * S, \phi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T, \check{\psi}_j * \phi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T * \psi_j, \phi\rangle = \langle T, \check{S} * \phi\rangle.$$

Or, puisque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il existe $C, C' > 0$ et $p, k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \check{S} * \phi\rangle| \leq C N_p(\check{S} * \phi) \leq C' N_{p+k}(\phi),$$

où la dernière inégalité provient de la Proposition 5.6.1. Cela montre que $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Enfin pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \widehat{T * S}, \phi\rangle &= \langle T * S, \hat{\phi}\rangle = \langle T, \check{S} * \hat{\phi}\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\widehat{\check{T}}}, \check{S} * \hat{\phi}\rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\check{T}}, \widehat{\check{S}}\widehat{\hat{\phi}}\rangle = \langle \widehat{\check{T}}, \widehat{\check{S}}\check{\phi}\rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{S}\phi\rangle = \langle \hat{S}\hat{T}, \phi\rangle,\end{aligned}$$

donc $\widehat{T * S} = \hat{S}\hat{T}$. □

5.6.3 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a vu que $T * \phi$ est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie par

$$T * \phi(x) = \langle T_y, \phi(x - y)\rangle.$$

Lorsque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, le membre de droite de cette égalité garde un sens pourvu que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément

> **Proposition 5.6.3** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La fonction $x \mapsto \langle T_y, \phi(x - y)\rangle$ est bien définie et appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— On commence par montrer que pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\psi : y \mapsto \phi(x - y)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, avec $|\alpha|, |\beta| \leq p$.

$$y^\alpha \partial_y^\beta \psi(y) = (-1)^{|\beta|}(y - x + x)^\alpha (\partial^\beta \phi)(x - y) = (-1)^{|\beta|} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} x^\gamma (y - x)^{\alpha-\gamma} (\partial^\beta \phi)(x - y)$$

Donc

$$N_p(\psi) \leq \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |x^\gamma| N_p(\phi) \leq C(1 + |x|)^p N_p(\phi), \tag{5.6.11}$$

et $g : x \mapsto \langle T_y, \phi(x-y)\rangle$ est bien définie.

On veut montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il s'agit encore une fois de dériver sous le crochet, alors que $(x,y) \mapsto \phi(x-y)$ n'est pas à support compact en y - même si l'on suppose que x varie dans un compact, ce que l'on peut toujours faire pour montrer la régularité de g.

Soit donc $K \subset \mathbb{R}^n_x$ un compact, et (ϕ_j) une suite de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il résulte du lemme de dérivation sous le crochet que la fonction $g_j(x) = \langle T_y, \phi_j(x-y)\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur K et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha g_j(x) = \langle T_y, (\partial^\alpha \phi_j)(x-y)\rangle$$

L'inégalité (5.6.11) ci-dessus montre que $y \mapsto (\partial^\alpha\phi_j)(x-y)$ tend vers $y \mapsto (\partial^\alpha\phi)(x-y)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uniformément par rapport à $x \in K$. Ainsi

$$\partial^\alpha g_j \to \langle T_y, (\partial^\alpha \phi)(x-y)\rangle$$

uniformément sur K, ce qui montre que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur K et que

$$\partial^\alpha g(x) = \langle T_y, (\partial^\alpha \phi)(x-y)\rangle.$$

$\square$

Définition 5.6.4 Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on appelle produit de convolution de T et ϕ la fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par $T * \phi(x) = \langle T_y, \phi(x-y)\rangle$.

Exercice 5.6.5 Montrer que si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\langle T * \phi, \psi\rangle = \langle T, \check{\phi} * \psi\rangle.$$

On remarque d'abord que puisque $T * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T * \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et le membre de droite a bien un sens. Il suffit ensuite d'écrire

$$\begin{aligned}\langle T * \phi, \psi\rangle =& \langle \langle T_y, \phi(x-y)\rangle, \psi(x)\rangle = \langle \psi(x) \otimes T_y, \phi(x-y)\rangle \\ =& \langle T_y, \langle \psi(x), \phi(x-y)\rangle\ \rangle = \langle T_y, \int \psi(x)\phi(x-y)dx\rangle = \langle T, \check{\phi} * \psi\rangle.\end{aligned}$$

Proposition 5.6.6 Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus $\widehat{T * \phi} = \hat{\phi}(\xi)\hat{T}$.

Preuve.— Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Puisque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T * \phi, \psi\rangle| \leq |\langle T, \check{\phi} * \psi\rangle| \leq C N_p(\check{\phi} * \psi) \leq C N_{p+n+1}(\phi) N_p(\psi),$$

où la dernière inégalité n'est autre que (5.2.5). Donc $T * \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Enfin en utilisant le point (ii) de la Proposition 5.2.9, on a, pour $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widehat{T * \phi}, \psi \rangle = \langle T * \phi, \hat{\psi} \rangle = \langle T, \check{\phi} * \hat{\psi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T, \widehat{\hat{\phi}} * \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{T}, \hat{\phi}\psi \rangle = \langle \hat{\phi}\hat{T}, \psi \rangle.$$

□

Exercice 5.6.7 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $\phi_j \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $T * \phi_j \to T * \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5.7 L'équation des ondes

On s'intéresse ici à l'équation des ondes $\Box u = 0$ dans $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, où le D'Alembertien $\Box$ est l'opérateur différentiel

$$\Box u(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x) - \sum_{j=1}^n \partial_{jj}^2 u(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x) - \Delta u(t,x).$$

Les physiciens considèrent que les solutions de cette équation décrivent correctement les ondes qui se déplacent à vitesse 1 au cours du temps t dans l'espace $\mathbb{R}^n$. On va voir que le matériel développé dans les paragraphes précédents permet d'établir des propriétés particulièrement importantes (des solutions) de l'équation des ondes.

Cette équation fait partie de la famille des équations d'évolution : la variable t joue un rôle particulier. On commence par introduire une transformation de Fourier adaptée à ce genre d'équations.

5.7.1 Transformation de Fourier partielle

Définition 5.7.1 Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. La transformée de Fourier partielle (par rapport aux q dernières variables) de ϕ est la fonction $\widetilde{\phi}(t,\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(\phi(t,x))$ définie sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ par

$$\widetilde{\phi}(t,\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} \phi(t,x) dx.$$

En raisonnant à $t \in \mathbb{R}^q$ fixé, la Proposition 5.2.5 donne immédiatement la

Proposition 5.7.2 La transformation de Fourier partielle $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}$ donné par

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\phi(t,\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int e^{-ix\cdot\xi} \phi(t,\xi) d\xi.$$

De plus la transformation de Fourier partielle est continue, dans le sens où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q),\ N_k(\widetilde{\phi}) \leq C N_{k+q+1}(\phi).$$

On définit la transformation de Fourier partielle des distributions tempérées par dualité :

Définition 5.7.3 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. La transformée de Fourier partielle de T est la forme linéaire $\widetilde{T} = \mathcal{F}_{\xi \to x}(T)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ définie par

$$\langle \mathcal{F}_{\xi \to x}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_{x \to \xi}\phi \rangle.$$

Proposition 5.7.4 La transformation de Fourier partielle $\mathcal{F}_{\xi \to x}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, d'inverse

$$\mathcal{F}_{\xi \to x}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^q} \widecheck{\mathcal{F}_{\xi \to x}}.$$

De plus si $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, alors $\widetilde{T_j} \to \widetilde{T}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$.

On a enfin les propriétés

$$\widetilde{D_x^\alpha T} = \xi^\alpha \widetilde{T},\ \widetilde{x^\alpha T} = (-D_\xi)^\alpha \widetilde{T},\ \text{et } \widetilde{D_t^\alpha T} = D_t^\alpha \widetilde{T}.$$

Exercice 5.7.5 $\mathcal{F}_{\xi \to x}(\delta_{t=0,\xi=0}) = \delta_{t=0} \otimes 1_x$. En effet, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$,

$$\langle \mathcal{F}_{\xi \to x}(\delta_{t=0,\xi=0}), \phi \rangle = \langle \delta_{t=0,\xi=0}, \mathcal{F}_{x \to \xi}(\phi) \rangle = \langle \delta_{t=0,\xi=0}, \int e^{-ix\cdot\xi} \phi(t,x) dx \rangle = \int \phi(0,x) dx.$$

5.7.2 Solution élémentaire de l'équation des ondes

On cherche $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+n})$ telle que $\square E = \delta$. Pour des raisons qui vont apparaître dans la discussion, on cherche E à support dans le futur, c'est-à-dire telle que

$$\operatorname{supp} E \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n. \tag{5.7.12}$$

Supposons que E satisfait ces conditions. On doit avoir $\widetilde{\square E} = \delta_{t=0} \otimes 1$, ou encore

$$\partial_{tt}^2 \widetilde{E} - |\xi|^2 \widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi. \tag{5.7.13}$$

Sur $\{(t,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}, t\neq 0\}$, on doit donc avoir

$$\partial^2_{tt}\widetilde{E}-|\xi|^2\widetilde{E}=0.$$

Pour chaque ξ fixé, les solutions réelles de cette équation sont les fonctions

$$t\mapsto a_\xi\cos(t|\xi|)+b_\xi\sin(t|\xi|),$$

où $a_\xi, b_\xi\in\mathbb{R}$. Compte tenu de la condition (5.7.12), on cherche donc $\widetilde{E}$ sous la forme

$$\widetilde{E}=(a(\xi)\cos(t|\xi|)+b(\xi)\sin(t|\xi|))H(t).$$

Pour une telle distribution $\widetilde{E}$, on calcule facilement

$$\begin{aligned}\partial_t\widetilde{E}=&(a(\xi)\cos(t|\xi|)+b(\xi)\sin(t|\xi|))\delta_{t=0}+(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|)+b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|))H(t)\\ =&\delta_{t=0}\otimes a(\xi)+(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|)+b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|))H(t),\end{aligned}$$

et

$$\partial^2_{tt}\widetilde{E}=\delta'_{t=0}\otimes a(\xi)+\delta_{t=0}\otimes b(\xi)|\xi|-|\xi|^2(a(\xi)\cos(t|\xi|)+b(\xi)\sin(t|\xi|))H(t).$$

Donc, à condition que les calculs précédents aient un sens, $\widetilde{E}$ vérifie (5.7.12) et (5.7.13) pour $a=0$ et $b(\xi)=1/|\xi|$, c'est-à-dire quand

$$\widetilde{E}=\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}H(t).$$

La fonction $(t,\xi)\mapsto\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc les calculs qui précèdent sont valides pour ce choix de $\widetilde{E}$. Elle est aussi bornée, donc l'expression ci-dessus définit bien une distribution tempérée. On a donc prouvé une bonne partie de la

Proposition 5.7.6 L'équation des ondes admet une unique solution élémentaire dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+n})$ supportée dans le futur. Il s'agit de la distribution

$$E(t,x)=\mathcal{F}^{-1}_{x\to\xi}\big(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}H(t)\big).$$

Preuve.— Il reste à montrer l'unicité. Supposons que E_1 et E_2 soient deux telles distributions, et posons $G=E_1-E_2$. On a $\Box G=0$ et $\operatorname{supp}G\subset\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$. Or

$$\Box G=0\iff\partial^2_{tt}\widetilde{G}-|\xi|^2\widetilde{G}=0\iff(\partial_t-i|\xi|)(\partial_t+i|\xi|)\widetilde{G}=0\iff\partial_t(e^{2it|\xi|}\partial_t(e^{-it|\xi|})\widetilde{G})=0.$$

On a donc $e^{2it|\xi|}\partial_t(e^{-it|\xi|}\widetilde{G})=Cste=0$ compte tenu de la condition sur le support de G, puis $e^{-it|\xi|}\widetilde{G}=Cste=0$ encore une fois parce que $\operatorname{supp}G\subset\{t>0\}$. Donc $\widetilde{G}=0$, et $G=0$. □

Exercice 5.7.7 Reprendre ce qui précède pour *i)* l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$. On trouve

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

ii) l'équation de Schrödinger $i\partial_t u - \Delta u = 0$. On trouve

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{i|x|^2/4t}.$$

On notera que dans ces deux cas on a une expression explicite grâce au résultat sur la transformée de Fourier des gaussiennes.

5.7.3 Support de la solution fondamentale

Pour $n = 3$, la Proposition 5.5.2 donne

$$\widehat{\sigma}_t(\xi) = 4\pi t \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|},$$

où σ_t désigne la mesure de surface sur la sphère $\mathbb{S}^2_t \subset \mathbb{R}^3$ de rayon t. On en déduit une expression plus simple de la solution élémentaire E. Pour $\phi = \widetilde{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+3})$, on a en effet

$$\begin{aligned}
\langle E^{(3)}, \phi(t,\xi)\rangle =& \langle \widetilde{E}_3, \psi(t,\xi)\rangle = \int_{R^{1+3}} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} H(t)\psi(t,\xi) dt d\xi \\
=& \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi t} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\sigma}_t(\xi)\psi(t,\xi) d\xi \Big) dt \\
=& \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi t} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \sigma_t(\xi)\widetilde{\psi}(t,\xi) d\xi \Big) dt \\
=& \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi t} \langle \sigma_t, \phi(t,\cdot)\rangle dt. \qquad (5.7.14)
\end{aligned}$$

Sur cette expression, on voit en particulier qu'en dimension 3 d'espace

$$\operatorname{supp} E^{(3)}(t,x) = \{(t,x), |x| = t\}.$$

Exercice 5.7.8 Pour $n = 2$, montrer que

$$E^{(2)}(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} & \text{pour } x^2 + y^2 \leq t^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera qu'en dimension 2 d'espace,

$$\operatorname{supp} E^{(2)}(t,x) = \{(t,x), |x| \leq t\}.$$

De manière générale, on ne peut donc pas faire mieux que la

Proposition 5.7.9 Soit $E^{(n)}$ la solution élémentaire de l'équation des ondes dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+n})$ à support dans le futur. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\operatorname{supp} E^{(n)} \subset \{(t,x), |x| \leq t\}.$$

Preuve.— C'est une conséquence du théorème de Paley-Wiener-Schwartz ! On sait en effet que $E = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|})$. Soit alors $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$F(z) = \frac{\sin(t|z|)}{|z|}.$$

On remarque que

$$F(z) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{h(z)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

où $z \mapsto h(z) = |z|^2 = \sum_{1\leq j\leq n} z_j^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Donc F est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. De plus un calcul simple montre qu'il existe $C = C_t > 0$ tel que

$$|F(z)| \leq (1 + C(t))e^{t|\operatorname{Im} z|}.$$

Le point (ii) de la proposition 5.5.6 donne donc $\operatorname{supp} E_n \subset \{(t,x), |x| \leq t\}$. □

5.7.4 Le problème de Cauchy

On s'intéresse enfin aux solutions éventuelles du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. En raison encore une fois du rôle particulier que joue la variable t, on est conduit à la

Définition 5.7.10 Soit $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $(T_t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ lorsque pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction

$$t \mapsto \langle T_t, \phi\rangle$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note alors $(\dot{T}_t)$ et $(\ddot{T}_t)$ les familles de distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$\langle \dot{T}_t, \phi\rangle = \partial_t \langle T_t, \phi\rangle,\ \langle \ddot{T}_t, \phi\rangle = \partial^2_{tt}\langle T_t, \phi\rangle, \dots\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Soit $E = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}H(t)\big)$ la solution fondamentale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^{1+n}$. E définit clairement une famille (E_t). Puisque $E_t = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}H(t))$, E_t appartiennent à $\mathcal{S}'(R^n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle E_t, \phi\rangle = \langle \widehat{E_t}, \mathcal{F}^{-1}(\phi)\rangle = H(t)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\mathcal{F}^{-1}(\phi)(\xi)d\xi,$$

donc $t \mapsto \langle E_t, \phi\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ (et aussi bien sûr sur $]-\infty,0]$, mais pas sur $\mathbb{R}$). Autrement dit $E \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, et

$$\dot{E}_t = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\cos(t|\xi|)),\ \ddot{E}_t = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(-|\xi|\sin(t|\xi|)).$$

En particulier $E_0 = 0$, $\dot{E}_0 = \delta_{x=0}$, et $\ddot{E}_0 = 0$. Notons enfin que pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+n})$,

$$\langle E,\phi\rangle = \langle H(t)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \widetilde{\phi}(t,\xi)\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} H(t)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\widetilde{\phi}(t,\xi)d\xi dt = \int_{\mathbb{R}}\langle E_t,\phi(t,\cdot)\rangle dt.$$

De manière générale, on a la

Proposition 5.7.11 Soit (T_t) une famille de distributions dans $\mathcal{C}^\infty(I,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La forme linéaire T sur $\mathcal{C}_0^\infty(I\times\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\langle T,\phi\rangle = \int_I \langle T_t,\phi(t,.)\rangle dt \tag{5.7.15}$$

est une distribution de $\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^n)$.

On revient à l'équation des ondes. Puisqu'elle est invariante par renversement du temps, on peut se concentrer sur la résolution du problème de Cauchy pour les temps $t \geq 0$. On cherche donc les distributions T associées à des familles $(T_t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ telles que, pour $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ données,

$$\begin{cases} \Box T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n),\\ T_0 = F,\\ \dot{T}_0 = G. \end{cases} \tag{5.7.16}$$

Proposition 5.7.12 Le problème (5.7.16) admet une unique solution T dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. Elle est donnée par (5.7.15) avec

$$T_t = E_t * G + \dot{E}_t * F, \tag{5.7.17}$$

où $E = (E_t)$ est la solution élémentaire du D'Alembertien définie dans la Proposition 5.7.6.

Preuve.— Compte tenu de l'exemple ci-dessus, on a bien $T_0 = E_0 * G + \dot{E}_0 * F = F$. De plus $\dot{T}_0 = \dot{E}_0 * G + \ddot{E}_0 * F = G$. On a aussi, pour $t>0$, $\ddot{T}_t = \ddot{E}_t * G + \dddot{E}_t * F$. Donc

$$\widehat{\ddot{T}_t} = -|\xi|\sin(t|\xi|)\hat{G} - |\xi|^2\cos(t|\xi|)\hat{F} = -|\xi|^2\widehat{T}_t,$$

d'où $\ddot{T}_t = \Delta T_t$. On veut montrer pour toute $\phi(t,x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$, on a $\langle \Box T,\phi\rangle = 0$. Or

$$\begin{aligned}\langle \Box T,\phi\rangle =& \langle T,\Box\phi\rangle = \int_0^{+\infty}\langle T_t,\Box\phi(t,\cdot)\rangle dt = \int_0^{+\infty}\langle T_t,\partial^2_{tt}\phi(t,\cdot)\rangle dt - \int_0^{+\infty}\langle T_t,\Delta\phi(t,\cdot)\rangle dt\\ &= \int_0^{+\infty}\langle T_t,\partial^2_{tt}\phi(t,\cdot)\rangle dt - \int_0^{+\infty}\langle \ddot{T}_t,\phi(t,\cdot)\rangle dt.\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le résultat suivant

Lemme 5.7.13 Soit $(T_t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, et $\psi(t,x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$. La fonction $t \mapsto \langle T_t, \psi(t,\cdot)\rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\partial_t(\langle T_t, \psi(t,\cdot)\rangle) = \langle \dot{T}_t, \psi(t,\cdot)\rangle + \langle T_t, \partial_t\psi(t,\cdot)\rangle.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \langle T_t, \partial_{tt}^2\phi(t,\cdot)\rangle dt = \int_0^{+\infty} \partial_t\langle T_t, \partial_t\phi(t,\cdot)\rangle dt - \int_0^{+\infty} \langle \dot{T}_t, \partial_t\phi(t,\cdot)\rangle dt = -\int_0^{+\infty} \langle \dot{T}_t, \partial_t\phi(t,\cdot)\rangle dt,$$

puisque ϕ est à support compact. En répétant le même argument on trouve

$$\int_0^{+\infty} \langle T_t, \partial_{tt}^2\phi(t,\cdot)\rangle dt = \int_0^{+\infty} \langle \ddot{T}_t, \phi(t,\cdot)\rangle dt,$$

d'où $\Box T = 0$.

Il reste à démontrer l'unicité. Supposons donc que $U = (U_t)$ et $V = (V_t)$ soient deux solutions du problème (5.7.16), et posons $G_t = H(t)(U_t - V_t)$. On a $\Box G = 0$, et $\operatorname{supp} G \subset \{t \geq 0\}$. En particulier, compte tenu de ce que l'on sait du support de E, E et G sont convolables comme distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$, et

$$0 = E * \Box G = \Box(E * G) = (\Box E) * G = \delta_0 * G = G,$$

Donc $U = V$. $\square$

Proposition 5.7.14 Soit $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ la solution du problème de Cauchy (5.7.16), avec $F, G \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $T_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$, et la quantité

$$E(t) = \|\partial_t T_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla T_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ne dépend pas de t.

Preuve.— Le fait que $T_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se lit directement sur (5.7.17). On note $u = (T_t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$, et on calcule

$$\begin{aligned}\partial_t E(t) =& \partial_t(\partial_t u, \partial_t u)_{L^2} + \partial_t \sum_{j=1}^n (\partial_j u, \partial_j u)_{L^2} = 2\operatorname{Re}(\partial_{tt}^2 u, \partial_t u)_{L^2} + 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^n (\partial_t\partial_j u, \partial_j u)_{L^2}\\ =& 2\operatorname{Re}(\partial_{tt}^2 u, \partial_t u)_{L^2} - 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^n (\partial_t\partial_{jj}^2 u, \partial_t u)_{L^2} = 2\operatorname{Re}(\Box u(t,x), \partial_t u(t,x))_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Pour conclure, on énonce quelques propriétés de la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Tout d'abord les ondes se propagent à vitesse finie, et vérifient le célèbre Principe de Huygens (fort) en dimension 3 d'espace. Précisément

Proposition 5.7.15 Si F, G sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $B(0,R)$, alors, pour $t>0$,

i) $\operatorname{supp} T_t \subset \overline{B(0,R+|t|)}$.

ii) De plus, en dimension 3, T_t est nulle dans $\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+3}, |t|>R, |x|<t-R\}$.

Preuve.—(i) se lit sur la formule (5.7.17), compte tenu de la Proposition 5.7.9. On a par exemple

$$\operatorname{supp} E_t * G \subset \operatorname{supp} E_t + \operatorname{supp} G \subset \overline{B(0,R)} + \overline{B(0,|t|)} \subset \overline{B(0,R+|t|)}$$

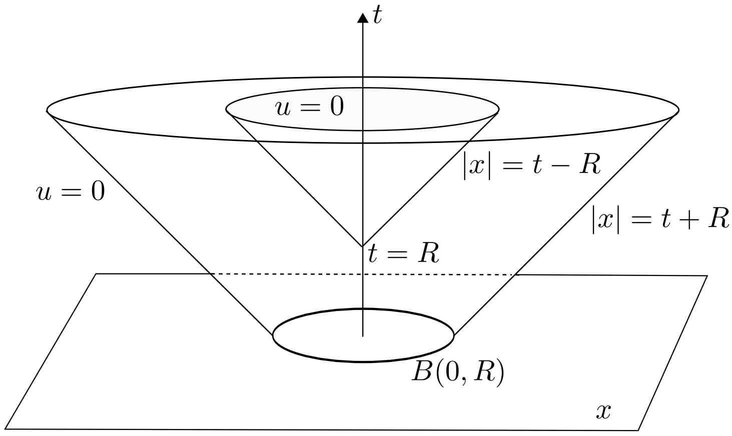
(ii) En dimension 3 d'espace, on sait que $\operatorname{supp} E_t = \{|x| = t\}$. Supposons $t>R$, et $|x|<t-R$. Pour $\omega\in\mathbb{S}^2$, on a

$$|x-t\omega| \geq t-|x| > R,$$

donc $G(x-t\omega)=0$. De ce fait $\int_{\mathbb{S}^2} G(x-t\omega)d\omega = 0$ et

$$E_t * G(x) = \langle E_t, G(x-\cdot)\rangle = \frac{1}{4\pi t}\langle \sigma_t, G(x-\cdot)\rangle = 0.$$

On a aussi $\dot{E}_t * F(x) = \langle \dot{E}_t, F(x-\cdot)\rangle = \partial_t\langle E_t, F(x-\cdot)\rangle = 0$ par le même raisonnement. □



Finalement, on énonce une conséquence de la propagation à vitesse finie :

Proposition 5.7.16 Soit F, G des fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$, et $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ la solution du problème de Cauchy 5.7.16 correspondant. La valeur de u en $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$ ne dépend que des valeurs de F et G dans $\{t=0\}\cap C(t_0,x_0)$, où $C(t_0,x_0)$ est le "cône rétrograde" défini par

$$C(t_0,x_0) = \{(t,x),\ t<t_0, |x-x_0|\leq t_0-t\}.$$

Preuve.— Il s'agit de montrer que si $F=G=0$ dans $C(t_0,x_0)\cap\{t=0\}$, alors $u(t_0,x_0)=0$. Or dans ce cas, $\operatorname{supp} G\subset\{|x-x_0|\geq t_0\}$, donc

$$\operatorname{supp} E_t * G \subset \{|x|\leq t\} + \{|x-x_0|\geq t_0\} \subset \{|x-x_0|\geq t_0-t\}.$$

On a la même inclusion pour $\operatorname{supp} \dot{E}_t * F$, donc u est nulle dans $C(t_0,x_0)$. Par continuité, on a donc bien $u(t_0,x_0)=0$. □