Chapitre 6

Espaces de Sobolev

On veut distinguer parmi les distributions (tempérées) celles qui sont plus régulières, par exemple données par des fonctions $\mathcal{C}^k$. On a vu que plus f est régulière, plus $\hat{f}$ décroit rapidement à l'infini, par exemple puisque

$$\|\xi^\alpha \hat{f}\|_{L^2} = \|\widehat{D^\alpha f}\|_{L^2}.$$

On aurait aussi pu écrire $\|\xi^\alpha \hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{D^\alpha f}\|_{L^1}$, mais on va tirer parti de manière essentielle de la structure d'espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

6.1 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$

6.1.1 Définitions

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$. La fonction $\xi \mapsto \langle \xi \rangle$ est $\mathcal{C}^\infty$, et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C}|\xi| \leq \langle \xi \rangle \leq C|\xi|.$$

Autrement dit $\langle \xi \rangle$ est une version régularisée de $|\xi|$ qui à le même comportement à l'infini.

Définition 6.1.1 Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\hat{u} \in L^1_{loc}$ et $\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 6.1.2 La distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{u} = \langle \xi \rangle^{-s} g$.

Exemple 6.1.3 *i)* $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $s < \frac{-n}{2}$. En effet $\hat{\delta}_0 = 1$ donc $\langle \xi \rangle^s \hat{\delta}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $2s > -n$.

ii) Les fonctions constantes ne sont dans aucun $H^s(\mathbb{R}^n)$, puisque $\hat{C} = C\delta_0$ n'est pas une fonction L^1_{loc}.

Proposition 6.1.4 La forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_s$ sur $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$(u,v)_s = (\langle\xi\rangle^s \hat{u}, \langle\xi\rangle^s \hat{v})_{L^2} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

est un produit scalaire hermitien qui fait de $H^s(\mathbb{R}^n)$ un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_s = \sqrt{(u,u)_s} = \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}\|_{L^2}$$

la norme associée.

Preuve.— Soit (u_j) une suite de Cauchy de $H^s(\mathbb{R}^n)$. La suite $(\langle\xi\rangle^s \hat{u})$ est une suite de Cauchy de L^2, donc converge vers un $v \in L^2$. Soit alors u la distribution tempérée définie par $u = \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}\hat{v})$. On a $\hat{u} = \langle\xi\rangle^{-s} v$ avec $v \in L^2$, donc $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, et

$$\|u_j - u\|_s = \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}_j - v\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } j \to +\infty.$$

Donc (u_j) converge dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Il est important de noter que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, où l'égalité a lieu entre espace de Hilbert. On a aussi

$$s_1 \le s_2 \Rightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$$

puisque $\langle\xi\rangle^{s_1} \le \langle\xi\rangle^{s_2}$, où le symbole $\hookrightarrow$ désigne une injection continue. Les H^s forment donc une famille décroissante d'espaces de Hilbert. En particulier, pour $s \ge 0$, on a $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. On a même la

Proposition 6.1.5 (Interpolation) Soit $s_0 \le s \le s_1$ trois réels. Pour $u \in H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \cap H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, on a $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_s \le \|u\|_{s_0}^{(1-\theta)} \|u\|_{s_1}^{\theta},$$

où $\theta \in [0,1]$ est défini par $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Preuve.— On écrit simplement

$$\|u\|_s^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi = \int \big(\langle\xi\rangle^{2(1-\theta)s_0} |\hat{u}|^{2(1-\theta)}\big)\big(\langle\xi\rangle^{2\theta s_1} |\hat{u}|^{2\theta}\big) d\xi,$$

et on applique l'inégalité de Hölder avec $p = 1/(1-\theta)$ et $q = 1/\theta$. □

On voit apparaître la notion de régularité que l'on cherche dans la proposition qui suit : plus on dérive (donc moins l'objet que l'on considère est régulier), plus l'on descend dans l'échelle des espaces de Sobolev.

Proposition 6.1.6 Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On a $\widehat{\partial_j u} = \xi_j \hat{u}$, donc $\widehat{\partial_j u}$ est une fonction L^1_{loc}. De plus

$$\|\langle\xi\rangle^{s-1}\widehat{\partial_j u}\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^{s-1}\xi_j\hat{u}\|_{L^2} \leq C\|\langle\xi\rangle^s\hat{u}\|_{L^2},$$

ce qui montre que $\partial_j u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Le cas général s'obtient par récurrence sur $|\alpha|$. □

Voici une autre illustration du fait que les éléments des H^s sont de plus en plus singuliers quand s diminue.

Proposition 6.1.7 Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution à support compact. Si $p \geq$ est l'ordre de T, alors $T \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s < -p - \frac{n}{2}$.

Preuve.— Pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on sait que $\hat{T} \in \mathcal{C}^\infty \subset L^1_{loc}$. De plus

$$|\langle\xi\rangle^s\hat{T}(\xi)| = |\langle\xi\rangle^s\langle T_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle| \leq C\langle\xi\rangle^s \sum_{|\alpha|\leq p} \sup|\partial_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})| \leq C\langle\xi\rangle^{s+p}$$

Donc $T \in H^s(\mathbb{R}^n)$ dès que $2(s+p) > -n$. □

6.1.2 Densité des fonctions régulières

Proposition 6.1.8 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— D'abord, l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \langle\xi\rangle^s\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle\xi\rangle^s\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

Soit alors $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ telle que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^\perp$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$0 = (u, \phi)_s = (\langle\xi\rangle^s\hat{u}, \langle\xi\rangle^s\hat{\phi})_{L^2}.$$

Donc pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\langle\xi\rangle^s\hat{u}, \psi)_{L^2} = 0$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. le Corollaire 5.1.8), cela entraine $u = 0$. Ainsi

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H^s(\mathbb{R}^n).$$

□

Remarque 6.1.9 On a donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$, mais l'inclusion inverse est fausse. Par exemple, en dimension 1, si $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on a $\hat{u}(\xi) = e^{-|\xi|}$, donc $u \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, mais $u \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 6.1.10 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $H^s(\mathbb{R}^n)$. On raisonne par troncature : soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0,1)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\chi_k(x) = \chi(x/k)$. On a

$$\begin{aligned}
\|\phi_k - \phi\|_s \leq & \Big(\int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{\phi}_k(\xi) - \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\
\leq & \sup \big(\langle\xi\rangle^{s+(n+1)/2} |\hat{\phi}_k(\xi) - \hat{\phi}(\xi)|\big)\Big(\int \langle\xi\rangle^{-(n+1)} d\xi\Big)^{1/2} \\
\leq & \, CN_p(\widehat{\phi_k - \phi}) \leq CN_{p+n+1}(\phi_k - \phi),
\end{aligned}$$

où $p \in \mathbb{N}$ est tel que $p \geq s + (n+1)/2$. On a vu dans la preuve de la Proposition 5.1.9 que, pour tout q, $N_q(\phi_k - \phi) \to 0$ quand $k \to +\infty$. □

6.1.3 Multiplicateurs de H^s

Proposition 6.1.11 Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La multiplication par ϕ est une opération continue dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, on a $\phi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et, d'après la Proposition 5.6.6,

$$\widehat{\hat{\phi} * \hat{u}} = \hat{\hat{\phi}}\hat{\hat{u}} = (2\pi)^{2n} \check{\phi}\check{u}.$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\check{\mathcal{F}}$, et en multipliant par $\langle\xi\rangle^s$, on obtient

$$\langle\xi\rangle^s \widehat{\phi u} = (2\pi)^{-n} \langle\xi\rangle^s \hat{\phi} * \hat{u}.$$

Donc pour $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \langle\xi\rangle^s \widehat{\phi u}, \psi\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{\phi} * \hat{u}, \langle\xi\rangle^s \psi\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{u}, \check{\hat{\phi}} * (\langle\xi\rangle^s \psi)\rangle.$$

Or $\langle\eta\rangle^s \hat{u}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et $\langle\eta\rangle^{-s}(\check{\hat{\phi}} * (\langle\xi\rangle^s\psi)$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\langle \langle\xi\rangle^s \widehat{\phi u}, \psi\rangle = (2\pi)^{-n} \int \langle\eta\rangle^s \hat{u}(\eta) \Big(\int \langle\eta\rangle^{-s} \check{\hat{\phi}}(\xi - \eta) \langle\xi\rangle^s \psi(\xi) d\xi\Big) d\eta. \tag{6.1.1}$$

On veut échanger les intégrales. Pour cela on doit montrer que la fonction

$$g : (\xi, \eta) \mapsto \langle\eta\rangle^s \hat{u}(\eta) \langle\eta\rangle^{-s} \check{\hat{\phi}}(\xi - \eta) \langle\xi\rangle^s \psi(\xi)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. On a besoin du

Lemme 6.1.12 (Lemme de Peetre) Pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|/2} \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \langle \eta \rangle^s.$$

Preuve.— (du Lemme de Peetre) En échangeant ξ et η on voit qu'il suffit de prouver l'inégalité pour $s \geq 0$. Or dans ce cas

$$\langle \xi \rangle^s = (1 + |\xi|^2)^{s/2} = (1 + |\xi - \eta + \eta|^2)^{s/2} \leq (1 + 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2)^{s/2} \leq 2^{s/2} \langle \xi - \eta \rangle^s \langle \eta \rangle^s,$$

par exemple en développant le terme de droite. □

Revenons à la proposition. Avec le lemme de Peetre, on a

$$|g(\xi, \eta)| \leq 2^{|s|/2} \langle \eta \rangle^s |\hat{u}(\eta)| \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} |\hat{\phi}(\xi - \eta)| \, |\psi(\xi)|.$$

Donc

$$\iint |g(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq 2^{|s|/2} \int |\psi(\xi)| (\langle \eta \rangle^s |\hat{u}| * \langle \eta \rangle^{|s|} |\hat{\phi}|)(\xi) d\xi. \tag{6.1.2}$$

Comme $\langle \eta \rangle^s |\hat{u}| \in L^2$ et $\langle \eta \rangle^{|s|} |\hat{\phi}| \in L^1$ (entre autres), l'inégalité de Young dit que le produit de convolution de ces fonctions est dans L^2, et, puisque $\psi \in L^2$, on a bien $g \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

L'équation (6.1.1) donne donc

$$\langle \langle \xi \rangle^s \widehat{\phi u}, \psi \rangle = (2\pi)^{-n} \int \psi(\xi) \Big(\int \langle \eta \rangle^{-s} \hat{u}(\eta) \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{-s} \hat{\phi}(\xi - \eta) d\eta \Big) d\xi,$$

et

$$\langle \xi \rangle^s \widehat{\phi u}(\xi) = \int \langle \eta \rangle^{-s} \hat{u}(\eta) \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{-s} \hat{\phi}(\xi - \eta) d\eta,$$

que l'on vient de montrer être une fonction L^2. Donc $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, et on extrait facilement de (6.1.2) que

$$\|\phi u\|_s \leq 2^{|s|/2} \| \langle \eta \rangle^{|s|} \hat{\phi} \|_{L^1} \|u\|_s.$$

□

6.1.4 Injections de Sobolev

Les résultats ci-dessous peuvent être vus comme une réponse à la question "qu'est-ce qui n'est pas dans $H^s(\mathbb{R}^n)$", ou encore comme un pas supplémentaire dans la description de la régularité des distributions tempérées.

On note $\mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq k$.

Proposition 6.1.13 Si $s > \frac{n}{2} + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.— Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$, on a $\xi^\alpha \hat{u} \in L^1$. En effet

$$\|\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\| = \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{\langle \xi \rangle^s} \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi)| \leq \langle \xi \rangle^{k-s} \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi)|,$$

et $\langle \xi \rangle^{k-s} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ puisque $-2(k-s) > n$. On a donc, par Cauchy-Schwartz,

$$\|\xi^\alpha \hat{u}\|_{L^1} \leq C_{s,n} \|u\|_s. \tag{6.1.3}$$

Ainsi $D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \hat{u}) \in \mathcal{C}^0_{\to 0}$ d'après la Proposition 5.4.10, et la continuité de l'injection de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$ n'est qu'une autre manière de formuler les inégalités

$$\forall |\alpha| \leq k, \ \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq \|\xi^\alpha \hat{u}\|_{L^1} \leq C_{s,n} \|u\|_s.$$

□

Proposition 6.1.14 Soit $s > \frac{n}{2}$. Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $C_s > 0$, telle que, pour tout $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\|uv\|_s \leq C_s \|u\|_s \|v\|_s.$$

Preuve.— La proposition précédente dit que u et v sont des fonctions continues, donc le produit uv est bien défini. On a d'abord $u, v \in L^2 \cap L^\infty$, puisque $s \geq 0$ d'une part, et puisque u et v sont des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Du coup $f = uv$ est une fonction de $L^1 \cap L^\infty$, et on a $\hat{f} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{v}$. Donc

$$\|f\|_s^2 = (2\pi)^{-2n} \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u} * \hat{v}(\xi)| d\xi \leq (2\pi)^{-2n} \int \Big(\int \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi - \eta)| \, |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi.$$

Or puisque $s > 0$, on a $(a+b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^+$. En écrivant l'inégalité triangulaire, on obtient facilement

$$\langle \xi \rangle^s \leq 2^s(\langle \xi - \eta \rangle^s + \langle \eta \rangle^s).$$

L'inégalité précédente donne alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_s^2 &\leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s} \int \Big(\int \langle \xi - \eta \rangle^s |\hat{u}(\xi - \eta)| \, |\hat{v}(\eta)| + |\hat{u}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s+1} \int \Big(\int \langle \xi - \eta \rangle^s |\hat{u}(\xi - \eta)| \, |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 + \Big(\int |\hat{u}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^s |\hat{v}(\eta)| d\eta \Big)^2 d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-2n} 2^{2s+1} \big(\|\langle \eta \rangle^s |\hat{u}| * |\hat{v}|\|_{L^2}^2 + \||\hat{u}| * \langle \eta \rangle^s |\hat{v}|\|_{L^2}^2 \big)
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young dit que, pour le premier terme par exemple,

$$\|\langle \eta \rangle^s |\hat{u}| * |\hat{v}|\|_{L^2}^2 \leq \|\langle \eta \rangle^s |\hat{u}|\|_{L^2}^2 \|\hat{v}\|_{L^1}^2 \leq C_s \|u\|_s^2 \|v\|_s^2,$$

en utilisant aussi (6.1.3). Le second terme se traite de le même manière, et l'on obtient bien

$$\|f\|_s^2 \leq C\|u\|_s^2\|v\|_s^2.$$

□

Proposition 6.1.15 Pour $p \geq 2$ et $s \geq n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, on a $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$. Précisément, il existe une constante $C_{n,s,p} > 0$ telle que

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L^p} \leq C_{n,s,p}\|u\|_s.$$

Remarque 6.1.16 *i)* Une façon équivalente de formuler les conditions ci-dessus liant s, p et n est

$$0 \leq s < \frac{n}{2},\ 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2s}.$$

Autrement dit, les deux propositions précédentes donnent ensemble une idée de la nature des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \geq 0$.

ii) Ces énoncés sont les meilleurs possibles. En particulier, $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (donc pas dans $\mathcal{C}^0_{\to 0}$), ce qui est la cause d'un certain nombre de difficultés techniques.

Preuve.— On l'admet. □

6.1.5 Dualité $H^s(\mathbb{R}^n)/H^{-s}(\mathbb{R}^n)$

On s'intéresse maintenant de plus près aux espaces de Sobolev d'ordre négatif. Une façon souvent commode de traiter l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$, consiste à le considérer l'espace des formes linéaires continues sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. On a effet la

Proposition 6.1.17 Soit $s \in \mathbb{R}$, et $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire L_u définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$L_u(\phi) = \langle u, \phi\rangle,$$

se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. De plus l'application $L : u \mapsto L_u$ est un isomorphisme bicontinu de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ dans $(H^s(\mathbb{R}^n))'$.

Preuve.— Tout d'abord, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|L_u(\phi)| = |\langle u, \phi\rangle| \leq (2\pi)^{-n}\|u\|_{-s}\|\phi\|_s \tag{6.1.4}$$

ce qui, compte tenu de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ donne le premier point.

On montre maintenant que L est bijective. Elle est clairement injective, puisque

$$\begin{aligned}\forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), L_u(\phi)=0 \Longleftrightarrow & \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \int\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}(\xi)\langle\xi\rangle^{s}\hat{\phi}(\xi)d\xi=0\\ \Longleftrightarrow & \forall\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \int\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}(\xi)\psi(\xi)d\xi=0\\ \Longleftrightarrow & u=0.\end{aligned}$$

Soit $\Phi\in(H^s(\mathbb{R}^n))'$; on cherche $u\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ telle que $L_u=\Phi$. Soit Ψ la forme linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\Psi(f)=\Phi(\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}f)).$$

On a, pour tout $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$|\Psi(f)|\leq C\|\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}f)\|_s\leq C\|f\|_{L^2},$$

donc Ψ est continue sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Riesz, il existe $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(f)=(g,\bar{f})_{L^2}$, et on pose $u=\mathcal{F}(\langle\xi\rangle^{s}g)$. On a

$$\langle\xi\rangle^{-s}\hat{u}=(2\pi)^n\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}\check{g}\in L^2(\mathbb{R}^n),$$

donc $u\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. De plus pour $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$L_u(\phi)=\langle u,\phi\rangle=\int\langle\xi\rangle^{s}g(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi=\Psi(\langle\xi\rangle^{s}\hat{\phi})=\Phi(\phi).$$

Donc L est surjective. Enfin la continuité de $L : u\mapsto L_u$ provient de (6.1.4) :

$$\|L_u\|=\sup_{\phi\in H^s,\|\phi\|_s=1}|L_u(\phi)|\leq(2\pi)^{-n}\|u\|_{-s},$$

et celle de L^{-1} est automatique puisque l'on travaille dans des espace de Banach. □

6.1.6 Trace d'un élément de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>1/2$

Lorsqu'une fonction f est continue, il n'y a aucune difficulté pour définir sa restriction à une hypersurface, par exemple en utilisant une paramétrisation de celle-ci : la restriction de f à l'hypersurface $x_n=0$ de $\mathbb{R}^n$ est la fonction $\gamma(f):\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\gamma(f)(x_1,\ldots,x_{n-1})=f(x_1,\ldots,x_{n-1},0). \tag{6.1.5}$$

Il n'y a à priori rien d'équivalent pour les fonctions définies presque partout, puisqu'une hypersurface est de mesure nulle. Lorsque u est dans un espace de Sobolev d'ordre pas trop petit, sans pour autant être une fonction continue, on peut néanmoins donner un sens à cette restriction.

Proposition 6.1.18 Pour tout $s>\frac{1}{2}$, l'opérateur $\gamma:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ défini par (6.1.5) s'étend de manière unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Preuve.— On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\gamma(\phi)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1.6}$$

L'existence de l'unique prolongement continu de γ découlera alors de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\gamma(\phi)(x') = \phi(x',0) =& \mathcal{F}^{-1}_{(\xi',\xi_n)\to(x',0)}(\hat{\phi}(\xi',\xi_n)) = (2\pi)^{-n}\iint e^{ix'\cdot\xi'}\hat{\phi}(\xi',\xi_n)d\xi' d\xi_n \\ &= (2\pi)^{-(n-1)}\int e^{ix'\cdot\xi'}\left(\frac{1}{(2\pi)}\int \hat{\phi}(\xi',\xi_n)d\xi_n\right)d\xi'.\end{aligned}$$

Donc, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\widehat{\gamma(\phi)}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)}\int \hat{\phi}(\xi',\xi_n)d\xi_n.$$

En particulier

$$|\widehat{\gamma(\phi)}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{(4\pi)^2}\int \langle\xi\rangle^s|\hat{\phi}(\xi',\xi_n)|\langle\xi\rangle^{-s}d\xi_n \leq \frac{1}{(4\pi)^2}\int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{\phi}(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n \times \int\langle\xi\rangle^{-2s}d\xi_n.$$

Or, en posant $\xi_n = (1+|\xi'|^2)^{1/2}$ on obtient

$$\begin{aligned}\int\langle\xi\rangle^{-2s}d\xi_n =& \int\frac{1}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^s}d\xi_n \\ =& \int\frac{1}{(1+t^2)^s(1+|\xi'|^2)^s}(1+|\xi'|^2)^{1/2}dt \\ =& \langle\xi'\rangle^{-2s+1}\int\frac{dt}{(1+t^2)^s} = C_s\langle\xi'\rangle^{-2s+1}.\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Ainsi

$$\int\langle\xi'\rangle^{2s-1}|\widehat{\gamma(\phi)}(\xi')|^2 d\xi' \leq \frac{C_s}{(4\pi)^2}\int\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi,$$

c'est-à-dire (6.1.6).

Il reste à montrer la surjectivité. On va exhiber pour cela un inverse à droite R de γ. Pour $v \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, on pose

$$u(x) = Rv(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(K_N\frac{\langle\xi'\rangle^{2N}}{\langle\xi\rangle^{2N+1}}\hat{v}(\xi')\right),$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $K_N > 0$ seront fixés plus loin.

On a

$$\begin{aligned}\|u\|_s^2 =& \int\langle\xi\rangle^{2s}K_N^2\frac{\langle\xi'\rangle^{4N}}{\langle\xi\rangle^{4N+2}}|\hat{v}(\xi')|^2 d\xi \leq K_n^2\int\langle\xi'\rangle^{4N}|\hat{v}(\xi')|^2(\int\langle\xi\rangle^{2s-4N-2}d\xi_n)d\xi' \\ \leq& K_n^2 C\int\langle\xi'\rangle^{2s-1}|\hat{v}(\xi')|^2 d\xi' \leq K_n^2 C\|v\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (6.1.7), en choisissant $N > s/2 - 1/4$ pour que l'intégrale converge. Donc R envoie bien $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

On calcule alors

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma(Rv)}(\xi') =& \frac{1}{(2\pi)}\int \widehat{R\phi}(\xi', \xi_n)d\xi_n = \frac{K_N}{(2\pi)}\int \frac{\langle \xi'\rangle^{2N}}{\langle \xi\rangle^{2N+1}}\hat{v}(\xi')d\xi_n \\ =& \hat{v}(\xi')\frac{K_N}{(2\pi)}\langle \xi'\rangle^{2N}\int \langle \xi\rangle^{-(2N+1)}d\xi_n = \frac{CK_N}{2\pi}\hat{v}(\xi') = \hat{v}(\xi'),\end{aligned}$$

en choisissant $K_N = 2\pi/C_N$, où C_N est la constante dans (6.1.7). Donc $\gamma \circ R = Id$. □

6.2 Espaces de Sobolev sur Ω

6.2.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur $\mathbb{R}^n$

On commence par quelques remarques simples : pour $k \in \mathbb{N}$ les éléments de $H^k(\mathbb{R}^n)$ peuvent être caractérisés par

$$u \in H^k(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

En effet

$$\begin{aligned}\|\langle \xi\rangle^k \hat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 =& \int (1+|\xi|^2)^k|\hat{u}(\xi)|^2d\xi = \sum_{|\alpha|\leq k}\frac{k!}{\alpha!}\int \xi^{2\alpha}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi \\ =& \sum_{|\alpha|\leq k}\frac{k!}{\alpha!}\int \xi^\alpha\hat{u}(\xi)\overline{\xi^\alpha\hat{u}(\xi)}d\xi \\ =& \sum_{|\alpha|\leq k}\frac{k!}{\alpha!}\|\widehat{D^\alpha u}\|_{L^2}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k}\frac{k!}{\alpha!}\|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \qquad (6.2.8)\end{aligned}$$

Donc $\langle \xi\rangle^k\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\|D^\alpha u\|_{L^2} < +\infty$ pour tout $|\alpha| \leq k$.

L'égalité (6.2.8) dit même davantage :

Proposition 6.2.1 Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Hilbert $(H^k(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_s)$ est égal à l'espace

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha u \in L^2\mathbb{R}^n\}$$

muni du produit scalaire

$$((u,v))_k = \sum_{|\alpha|\leq k}(\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

On notera $\|u\|_{H^k} = \sqrt{((u,u))_k}$ la norme associée, qui est donc équivalente à la norme $\|\cdot\|_k$.

Pour les entiers négatifs, en utilisant la Proposition 6.1.17, et la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $H^k(\mathbb{R}^n)$, on obtient la caractérisation suivante :

Proposition 6.2.2 Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des formes linéaires u sur $H^k(\mathbb{R}^n)$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), |\langle u, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{H^k}.$$

6.2.2 Espaces de Sobolev d'ordre entier sur Ω

Un des intérêts principaux de ces remarques, est qu'elles permettent de définir une échelle d'espaces de Hilbert, qui doit permettre de mesurer la régularité des distributions, sans recours à la transformation de Fourier. En particulier, pour $k \in \mathbb{Z}$, on peut parler d'espace de Sobolev d'ordre k sur n'importe quel ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 6.2.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $k \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace $H^k(\Omega)$ lorsque pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On note $(\cdot,\cdot)_k$ la forme bilinéaire définie sur $H^k(\Omega) \times H^k(\Omega)$ par

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

Proposition 6.2.4 Muni du produit scalaire hermitien $(\cdot,\cdot)_k$, l'espace $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve.— Soit (u_j) une suite de Cauchy de $H^k(\Omega)$. Pour chaque $|\alpha| \leq k$, la suite $(\partial^\alpha u_j)$ est une suite de Cauchy de L^2, donc converge vers un $v_\alpha \in L^2$. En particulier $u_j \to v_0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha v_0 = v_\alpha \in L^2(\Omega)$, et $(u_j) \to v_0$ dans $H^k(\Omega)$ □

Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions test $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ n'est pas toujours dense dans $H^k(\Omega)$. On est donc conduit à la

Définition 6.2.5 On note $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert.

Exemple 6.2.6 Soit $I =]-a, a[\in \mathbb{R}$. On va décrire $H^1(I)$ et $H_0^1(I)$.

- Pour $f \in H^1(I)$, on a $f' \in L^2(I) \subset L^1(I)$. Donc la fonction $g : I \to \mathbb{C}$ définie par
$$g(x) = \int_{-a}^{x} f'(t)dt$$
est continue. De plus $g' - f' = 0$ donc la distribution $g - f$ est constante. Comme g se prolonge en une fonction continue sur $[-a, a]$, f aussi.
- La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est continue sur $[-a, a]$, donc atteint son minimum en $b \in [-a, a]$. Comme
$$2a|f(b)|^2 = \int_{-a}^{a} |f(b)|^2 dt \leq \int_{-a}^{a} |f(t)|^2 dt,$$
on a $\sqrt{2a}|f(b)| \leq \|f\|_{L^2}$. Enfin puisque
$$f(x) = f(b) + \int_{b}^{x} f'(t)dt,$$
on obtient
$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\|f\|_{L^2} + \sqrt{2a}\|f'\|_{L^2} \leq C\|f\|_{H^1}.$$
En particulier la forme linéaire δ_x est continue sur $H^1(I)$.
- $H^1_0(I) = \{f \in H^1(I),\ f(-a) = f(a) = 0\}$. En effet on a vu que les formes linéaires $\delta_{\pm a}$ sont continues sur $H^1(I)$, et sont nulles sur $\mathcal{C}^\infty_0(I)$. Donc si $f \in H^1_0(I)$, on a $f(-a) = f(a) = 0$. Réciproquement, soit $f \in H^1(I)$ vérifiant $f(a) = f(-a) = 0$. Soit aussi g la fonction qui vaut f sur $[-a, a]$ et 0 ailleurs. On a $g' = f' 1_{[} - a, a]$, donc $g' \in L^2(\mathbb{R})$, et $g \in H^1(\mathbb{R})$. Pour $\lambda < 1$, la suite $g_\lambda = g(x/\lambda)$ tendent vers f dans $H^1(I)$ quand $\lambda \to 1$, et sont à support dans $[-a\lambda, a\lambda] \subset I$. Si (χ_ϵ) est une approximation de l'identité, $g_\lambda * \chi_\epsilon$ appartient à $\mathcal{C}^\infty_0(I)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit, et converge vers g_λ dans $H^1(\mathbb{R})$. Donc $g_\lambda \in H^1_0(I)$ et $f \in H^1_0(I)$.

Remarque 6.2.7 L'orthogonal F de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est le sous-espace constitué des fonctions f telles que
$$(1 - \Delta)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$
En effet la fonction f appartient à F si et seulement si pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$, et par densité pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$,
$$0 = (f, \bar{u})_{H^1} = \int_\Omega fudx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \partial_j f \partial_j u dx = \langle f - \Delta f, u\rangle.$$

Définition 6.2.8 Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace $H^{-k}(\Omega)$ est l'espace des formes linéaires u sur $H^k_0(\Omega)$ telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle
$$\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega), |\langle u, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{H^k}.$$
On note $\|u\|_{H^{-k}}$ la plus petite constante C possible dans l'inégalité ci-dessus.

Exemple 6.2.9 Si $f \in L^2(\Omega)$, on a $\partial_j f \in H^{-1}(\Omega)$. En effet, pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$|\langle \partial_j f, \phi \rangle| = |\langle f, \partial_j \phi \rangle| \ \leq \int |f|\ |\partial_j \phi| dx \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}.$$

On a d'ailleurs au passage $\|\partial_j f\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}$.

On peut en fait démontrer le résultat suivant

Proposition 6.2.10 Soit $k \in \mathbb{N}$. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à $H^{-k}(\Omega)$ si et seulement si il existe des fonctions $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ telles que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f_\alpha.$$

6.2.3 L'inégalité de Poincaré

Proposition 6.2.11 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné dans une direction. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Preuve.— L'hypothèse signifie qu'il existe $R > 0$ tel que, par exemple $\Omega \subset \{|x_n| < R\}$. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a alors

$$\phi(x', x_n) = \int 1_{[-R, x_n]}(t) \partial_n \phi(x', t) dt.$$

En utilisant Cauchy-Schwartz, on a alors

$$|\phi(x', x_n)|^2 \leq 2R \int_{-R}^R |\partial_n \phi(x', t)|^2 dt.$$

On intègre cette inégalité sur Ω, et on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\phi(x', x_n)|^2 dx &\leq 2R \int_{-R}^R \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^R |\partial_n \phi(x', t)|^2 dt dx_n dx' \\ &\leq 4R^2 \int |\partial_n \phi(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int |\nabla \phi(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat dans $H_0^1(\Omega)$ par densité. □

Remarque 6.2.12 L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour les u constantes non-nulles, qui n'appartiennent donc pas à $H_0^1(\Omega)$ pour Ω borné (dans une direction).

On notera que l'inégalité de Poincaré entraine que pour un ouvert borné (au moins dans une direction), l'application

$$u \mapsto \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2},$$

est une norme sur $H_0^k(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^k}$.

6.2.4 Le problème de Dirichlet

On termine par la résolution du très classique problème de Dirichlet dans un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $(a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de fonctions de $L^\infty(\Omega)$. On suppose que la matrice $A=(a_{ij})$ est symétrique, i.e. que $a_{ij}=a_{ji}$, et qu'il existe une constante $c>0$ telle que

$$\forall x\in\Omega, \forall \xi\in\mathbb{C}^n,\ c|\xi|^2 \leq \mathrm{Re}(\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j}) \leq \frac{1}{c}|\xi|^2$$

On note alors Δ_a l'opérateur différentiel

$$\Delta_a(f) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j f)$$

Lorsque $A = Id$, Δ_a n'est autre que le Laplacien habituel.

Pour $f\in H_0^1(\Omega)$, $\Delta_a f$ a bien un sens et appartient à $H^{-1}(\Omega)$, puisque $\partial_j f\in L^2$ et $a_{ij}\partial_j f\in L^2$, donc $\partial_i(a_{ij}\partial_j f)\in H^{-1}(\Omega)$. On va montrer que, pour Ω borné, Δ_a est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Pour prouver ce résultat, on va utiliser un résultat général abstrait qui à un intérêt en lui-même.

Proposition 6.2.13 (Théorème de Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et $a(x,y)$ une forme sesquilinéaire sur H (anti-linéaire par rapport à x et linéaire par rapport à y). On suppose que

i) la forme sesquilinéaire a est continue, i.e. il existe $M>0$ tel que $|a(x,y)|\leq M\|x\|\,\|y\|$ pour tout $x,y\in H$.

ii) la forme sesquilinéaire a est coercive, i.e. il existe $c>0$ tel que $|a(x,x)|>c\|x\|^2$ pour tout $x\in H$.

Alors pour tout forme linéaire continue Φ sur H, il existe un unique $x\in H$ tel que

$$\forall y\in H,\ \Phi(y)=a(x,y).$$

De plus $\|x\|\leq\|\Phi\|/c$.

Preuve.— Pour tout $x\in H$, la forme linéaire $y\mapsto a(x,y)$ est continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $A(x)\in H$ tel que

$$\forall y\in H,\ a(x,y)=A(x)\cdot y.$$

L'application $A : x \mapsto A(x)$ est anti-linéaire puisque, pour tout $y \in H$,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot y = a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \overline{\alpha_1} a(x_1, y) + \overline{\alpha_2} a(x_2, y) = (\overline{\alpha_1} A(x_1) + \overline{\alpha_2} A(x_2)) \cdot y.$$

L'application A est aussi continue puisque $\|A(x)\| \leq M\|x\|$.

Soit maintenant Φ une forme linéaire continue sur H. Encore avec le théorème de Riesz, il existe $z \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \Phi(y) = z \cdot y.$$

Donc il s'agit de résoudre l'équation $A(x) = z$ pour $z \in H$ donné, et on va montrer que A est une bijection sur H.

Puisque a est coercive, on a

$$c\|x\|^2 \leq |A(x) \cdot x| \leq \|A(x)\| \, \|x\|,$$

donc

$$\|A(x)\| \geq c\|x\|, \tag{6.2.9}$$

ce qui montre que A est injectif.

De plus $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace fermé de H. En effet, si $(y_j) \in \operatorname{Im} A$ converge vers y dans H, notant $y_j = Ax_j$, on a grâce à (6.2.9)

$$c\|x_p - x_q\| \leq \|y_p - y_q\|,$$

donc (x_j) est une suite de Cauchy. Puisque H est un Hilbert, elle converge vers un certain $x \in H$ et puisque A est continue, on a

$$y = \lim_{j \to +\infty} y_j = \lim_{j \to +\infty} A(x_j) = A(\lim_{j \to +\infty} x_j) = Ax.$$

Donc $y \in \operatorname{Im} A$.

Maintenant si $x \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, on a $0 = |A(x) \cdot x| \geq c\|x\|^2$, donc $(\operatorname{Im} A)^\perp = \{0\}$, et $\operatorname{Im} A = H$. □

Proposition 6.2.14 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, l'équation $\Delta u = f$ admet dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ une unique solution.

Preuve.— L'équation $\Delta_a u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ signifie

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \langle \Delta_a u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle. \tag{6.2.10}$$

ou encore

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j} \langle u, \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j \phi) \rangle = \langle f, \phi \rangle.$$

Pour $u \in H_0^1(\omega)$, cela équivaut à

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j \phi(x) dx = -\langle f, \phi \rangle.$$

On note alors $a(u,v)$ la forme sesquilinéaire sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a(u,v)=\sum_{i,j}\int_\Omega a_{ij}(x)\overline{\partial_i u(x)}\partial_j v(x)dx,$$

et Φ la forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ donnée par $\Phi(v)=-\langle f,v\rangle$. L'équation (6.2.10) s'écrit

$$\forall\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), a(\overline{u},\phi)=\Phi(\phi),$$

et l'on veut montrer qu'elle admet une unique solution $u\in H_0^1(\Omega)$. Il suffit pour cela de prouver que a est continue et coercive.

La continuité découle facilement du fait que les a_{ij} sont bornées. Pour la coercivité, on a, d'abord pour $u\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, puis, par densité, pour $u\in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(u,u)|\geq \operatorname{Re} a(u,u)=\int_\Omega \operatorname{Re}\left(\sum_{i,j}a_{i,j}\overline{\partial_j u}\partial_i u\right)dx\geq c\int_\Omega\sum_j|\partial_j u|^2dx.$$

Il reste donc à établir que

$$\int_\Omega\sum_j|\partial_j u|^2dx\geq\|u\|_{H^1}^2,$$

ce qui est une conséquence immédiate du Lemme de Poincaré. □