Leçon 205 : Écriture décimale d'un nombre réel.
Cas des nombres rationnels.

Dans toute la leçon, E désigne la fonction partie entière d'un nombre réel.

Approximations décimales d'un nombre réel

Définition : Un nombre rationnel x est dit **décimal** s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Définition : Pour tout réel x, notons $p_n := E(10^n x)$. On appelle $\frac{p_n}{10^n}$ l'**approximation décimale par défaut** de x à l'ordre n (ou à 10^{-n} près). Si $x \neq \frac{p_n}{10^n}$, alors $\frac{p_n+1}{10^n}$ est l'**approximation décimale par excès** de x à l'ordre n.

Remarque : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'entier p_n est l'unique entier tel que $\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n+1}{10^n}$.

Exemple : 1,4142 est l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près, et 1,4143 son approximation décimale par excès au même ordre.

Proposition : Les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Développement décimal d'un nombre réel

Proposition-définition : Soit $x \in [0, 1)$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$, à valeurs dans $\{0, \ldots, 9\}$ et non stationnaire à 9, telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$. On note $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, et on appelle **développement décimal propre** de x cette écriture.

Remarques :

- ▷ De plus, $a_n = p_n - 10p_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
- ▷ Si l'on enlève la contrainte que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est non stationnaire à 9, alors il n'y a plus unicité du développement décimal : par exemple, $1 = 0, 999\ldots$. Plus précisément, dans ce cadre, tout nombre décimal a exactement 2 développements décimaux, et tout nombre non décimal a un unique développement décimal. Le second développement décimal d'un nombre décimal est qualifié d'**impropre**.
- ▷ Soit x un nombre réel positif. Pour obtenir son développement décimal propre, on écrit $E(x)$ en base 10 avant la virgule, et le développement décimal propre de $x - E(x)$ après la virgule.
- ▷ Le développement décimal d'un nombre réel x strictement négatif est $-|x|$, c'est-à-dire le signe $-$ précédant le développement décimal de $|x|$.

Théorème de Cantor [Ska, Théorème I.2.8] : $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Proposition [Ska, Exercice 1.4] [FGN·Alg1, Exercice 1.11] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeur dans $\{0, \ldots, 9\}$ et non stationnaire à 0. Alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n!}$ est un nombre de Liouville, et en particulier est transcendant.

Développements décimaux des nombres rationnels

Définition : Soient p, $q \geq 1$. Une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est **périodique de période p à partir du rang q** si $a_{n+p} = a_n$ pour tout $n \geq q$.

Proposition [Ska, Théorème I.3.1] : Soit x un réel. Alors x est rationnel si et seulement si le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang. Plus précisément, en écrivant $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$ avec p, $2^m 5^n q$ premiers entre eux et n, $m \geq 0$:

- ▷ le développement décimal de x est fini si et seulement si x est décimal, si et seulement s'il existe $q = 1$.

- ▷ sinon, le développement décimal de x a pour plus petite période l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, qui divise $\varphi(q)$; et ce développement décimal est périodique à partir du rang $1 + \max\{n, m\}$.

Exemples :

- ▷ $0,212121\ldots = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. Ici, $p = 7$, $q = 33$ et $m = n = 0$. Le développement décimal est périodique à partir du rang 1, de période 2. Remarquons que $10^2 = 100 \equiv 1$ [33], donc 10 est bien d'ordre 2 dans $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$.
- ▷ $3,5212121\ldots = 3,5 + \frac{7}{330} = \frac{581}{165}$. Ici, $p = 581$, $q = 33$, $m = 0$ et $n = 1$. Le développement décimal est périodique à partir du rang 2, de période 2.

Proposition : Soit x un réel irrationnel. Soit $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers x. Alors $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

Références

[FGN·Alg1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de **[Ska, Chapitre I]**. La plupart des propositions sont reprises dans **[FGN·Alg1]**, mais la structure d'une suite d'exercices, bien qu'idéale pour des développements, manque de cohérence pour concevoir la leçon elle-même.