L3MATH — Université Paris Saclay, Orsay

M203-Algèbre — 2023-2024

Interrogation 1 : Matrices équivalentes, matrices semblables

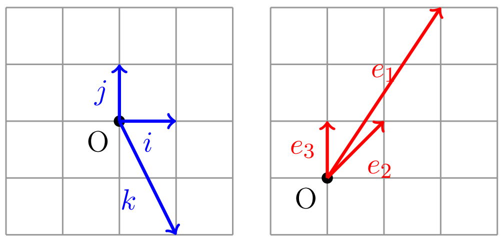
Durée : 30 minutes - 4 questions.

Mardi 26 septembre 2023

Question 1. On fixe un entier n. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : “On peut trouver des matrices $n \times n$ semblables qui ont le même rang.” L’adjectif “semblables” devra être développé.

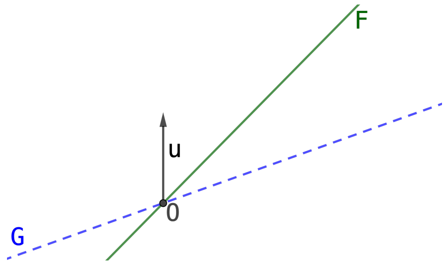
Question 2. Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Il existe au plus une application linéaire telle que les images de i, j, k soient respectivement e_1, e_2, e_3.



2. Soient A et B deux matrices carrées. Si A^2 et B^2 sont semblables, alors A et B sont semblables.

Question 3. Soient F, G les deux sous-espaces vectoriels représentés ci-dessous. Soit s la symétrie d'axe F parallèlement à G.
Donnez une définition (de votre choix) de s.



Construisez graphiquement $s(u)$. Explicitez votre construction sur le schéma **et** à l'écrit.

Question 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On définit dans $F = \mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{F}$ constituée des vecteurs $f_1 = (4, 2, 2)$, $f_2 = (2, 1, 1)$ et $f_3 = (1, -1, 0)$.

1. Justifiez pourquoi il existe une unique application linéaire $f \in L(E, F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Écrivez sa matrice dans des bases que vous préciserez.

2. Déterminez le rang de f. Déduisez-en sa matrice réduite (par équivalence).

3. Expliquez à partir de l'exemple les grandes étapes du raisonnement permettant de déterminer des bases dans lesquelles la matrices f est réduite. Explicitez ces bases.