# FAISCEAUX EQUIVARIANTS SUR $\mathbb{P}^1$ ET FAISCEAUX AUTOMORPHES

VINCENT PILLONI

Résumé. Inspiré par [Pan22], on définit et étudie un foncteur qui associe à des faisceaux équivariants sur $\mathbb{P}^1$ des faisceaux automorphes sur les courbes modulaires.

Table des matières



## 1. Introduction

Cette note est inspirée par le travail [Pan22]. Dans ce travail, Lue Pan utilise la méthode de Sen (et sa généralisation par Berger-Colmez [BC08], [BC16]) pour décrire le sous-faisceau des vecteurs localement analytiques du faisceau structural des courbes modulaires perfectoides.

Dans cet article, on introduit un foncteur qui associe à des faisceaux équivariants pour l'action infinitésimale de $\mathrm{GL}_2$ sur des ouverts de $\mathbb{P}^1$ (qui est l'espace des périodes de Hodge-Tate pour les courbes modulaires) des faisceaux sur la tour de courbes modulaires. Ce foncteur envoie les faisceaux équivariants cohérents de rang 1 sur $\mathbb{P}^1$ sur les faisceaux des formes modulaires classiques. Il envoie les faisceaux équivariants cohérents de rang 1 sur les strates de Bruhat sur les faisceaux de formes modulaires surconvergentes ([AIS14], [Pil13], [CHJ17], [BP20]). En dérivant le foncteur, on obtient "naturellement" la décomposition de Hodge-Tate de la cohomologie étale des courbes modulaires.

En appliquant ce foncteur au faisceau dual du faisceau des opérateurs différentiels étendus sur $\mathbb{P}^1$, on obtient le faisceau des vecteurs localement analytiques dans le faisceau structural de la courbe modulaire perfectoide. Ce foncteur permet finalement de ramener l'ensemble des calculs de cohomologie sur le faisceau des vecteurs localement analytiques fait dans la section 5 de [Pan22] à des questions simples de théorie des représentations.

Introduisons quelques notations. Soit $G = \mathrm{GL}_2$, $T \subseteq B$ un tore maximal inclus dans un Borel. On pose $U$ le radical unipotent de $B$. On note enfin $\mathcal{FL} = B\backslash G = \mathbb{P}^1$. On fixe un sous-groupe compact ouvert $K^p \subseteq G(\mathbf{A}_f^p)$. Pour tout sous-groupe compact ouvert $K_p \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$, on note $X_{K_pK^p} \to \mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ la courbe modulaire compactifiée de niveau $K_pK^p$, vue comme espace adique sur $\mathbb{C}_p$. On note $X_{K^p} = \lim_{K_p} X_{K_pK^p}$ la courbe perfectoide de niveau modéré $K^p$ construite dans [Sch15]. On considère alors le diagramme (où l'application $\pi_{K_p}$ est la projection vers un niveau fini, et l'application $\pi_{HT}$ est l'application des périodes de Hodge-Tate) :

$$\begin{tikzcd} & X_{K^p} \arrow[dl, "\pi_{K_p}"'] \arrow[dr, "\pi_{HT}"] & \\ X_{K_pK^p} & & \mathcal{FL} \end{tikzcd}$$

Pour tout ouvert $U$ de $\mathcal{FL}$, on note $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ la catégorie des faisceaux cohérents $\mathfrak{g}$-équivariants sur $U$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de $G$.

Soit $\mathfrak{n}^0 \subseteq \mathfrak{b}^0 \subseteq \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathfrak{g}$ les sous-algèbres de Lie nilpotentes et de Borel universelles. Pour tout objet $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, on possède par définition un morphisme $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathscr{F})$ et celui-ci induit un morphisme $\mathfrak{b}^0 \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F})$. La cohomologie de $\mathfrak{n}^0$, notée $\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F})$, est la cohomologie du complexe placé en dégré 0 et 1 :

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_U} \mathfrak{n}^{o\vee}.$$

On note $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0} \subseteq \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ la sous-catégorie pleine des objets vérifiant $\mathrm{H}^0(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Les objets de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$ sont d'ailleurs exactement les objets de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ tels que l'action infinitésimale de $G$ s'étend en une action de l'algèbre des opérateurs différentiels étendus (voir [BB83]) :

$$\mathcal{D} = \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \mathfrak{n}^0 \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

On note $\hat{\mathscr{O}} = (\pi_{HT})_\star \mathscr{O}_{X_{K^p}}$. C'est un faisceau $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On note $\mathscr{O}^{sm} \subseteq \hat{\mathscr{O}}$ le sous-faisceau des vecteurs lisses pour l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$, il admet la description suivante :

$$\mathscr{O}^{sm} = \mathrm{colim}_{K_p} \mathscr{O}_{K_p}, \text{ où } \mathscr{O}_{K_p} = (\pi_{HT})_\star (\pi_{K_p})^{-1} \mathscr{O}_{X_{K_pK^p}}.$$

On introduit alors le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} VB : \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U) & \to & \mathbf{Mod}(\mathscr{O}^{sm}|_U) \\ \mathscr{F} & \mapsto & \mathrm{colim}_{K_p}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U)^{K_p} \end{array}$$

Explicitons la définition. La colimite porte sur les sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout ouvert $V$ affinoide de $U$, on a

$$VB(\mathscr{F})(V) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^0(K_p, \mathscr{F}(V)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}(V)}}\hat{\mathscr{O}}(V)).$$

On montre que l'action de $K_p$ diagonale est bien définie pour tout $K_p$ suffisamment petit.

**Theorem 1.1.** *(1) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, $VB(\mathscr{F})$ est un faisceau localement libre de rang fini de $\mathscr{O}^{sm}|_U$-modules.*

*(2) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^{\circ}}$, on possède un isomorphisme canonique*

$$VB(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}^{sm}|_U}\hat{\mathscr{O}}|_U \to \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U$$

*et le foncteur $VB$ restreint à la catégorie $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^{\circ}}$ est exact.*

*(3) Le foncteur $VB$ est dérivable, et pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, on a $\mathrm{R}^iVB(\mathscr{F}) = VB(\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}))$.*

*Remarque* 1.2. Vu le point (2) du théorème, on pense donc à la condition d'être annulé par $\mathfrak{n}^0$ comme à une condition d'admissibilité.

*Remarque* 1.3. Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}_0}$. Il possède une action du Cartan horizontal $\mathfrak{h} = \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0)$. Supposons que $\mathscr{F}$ soit défini sur une extension finie $L$ de $\mathbb{Q}_p$. On voit que $VB(\mathscr{F})$ possède une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. On possède un opérateur de Sen arithmétique $\Theta_{sen}$ associé à cette action semi-linéaire. Il a la propriété que $\Theta_{sen} = 0$ si et seulement si $VB(\mathscr{F})$ descend en un faisceau sur la tour de courbes modulaires définie sur $L$. Par fonctorialité, le Cartan horizontal $\mathfrak{h}$ agit sur $VB(\mathscr{F})$ et on a (théorème 3.9) $(1, 0) \in \mathfrak{h} = \Theta_{sen}$.

*Exemple* 1.4 (formes modulaires classiques, 3.5.1)*.* Tout caractère algébrique $\kappa$ du tore $T$ de $G$ fournit un faisceau $G$-équivariant sur $\mathcal{FL}$ que nous notons $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$. On peut le voir comme un objet de la catégorie $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{FL})^{\mathfrak{n}^0}$ et on note $\omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}} = VB(\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}})$. C'est un faisceau $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant sur $\mathcal{FL}$. On vérifie qu'on possède un isomorphisme de $G(\mathbb{Q}_p)$-représentations :

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{FL}, \omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}}) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^i(X_{K_pK^p}, \omega^{\kappa}_{K_p})$$

où ce dernier groupe est la limite inductive des cohomologies des faisceaux des formes modulaires de poids $\kappa$ sur les courbes modulaires $X_{K_pK^p}$.

*Exemple* 1.5 (formes modulaires surconvergentes, 3.5.3)*.* Considérons la décomposition de Bruhat $\mathcal{FL} = U_{w_0} \cup \{\infty\}$, où $U_{w_0} = B\backslash Bw_0B$ pour $w_0$ un générateur du groupe de Weyl, et $\infty = B\backslash B$. A tout caractère $\kappa \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$, on peut associer un faisceau inversible $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}$ dans la catégorie $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U_{w_0})$, qui est $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On note $\omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}} = VB(\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}})$. Le groupe de cohomologie

$$\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}})$$

est une représentation de $B(\mathbb{Q}_p)$ qui se relie à l'espace de cohomologie locale qui est considéré dans la théorie de Coleman supérieure pour le $\mathrm{H}^1$ (voir [BP20]).

De même, on peut construire un faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\infty}$ inversible dans la catégorie $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$ (la limite des catégories $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ pour $U$ parcourant les voisinages de $\infty$) qui est $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On note $\omega^{\kappa,sm}_{\infty} = VB(\mathscr{O}^{\kappa}_{\infty})$. Le groupe de cohomologie

$$\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{\kappa,sm}_{\infty})$$

est une représentation de $B(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace se relie à l'espace des formes surconvergentes de poids $\kappa$ (et donc à la théorie de Coleman pour le $\mathrm{H}^0$). Si $\kappa \in X^\star(T)$, on possède une suite longue reliant cohomologie locale et cohomologie classique :

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}}) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{\kappa,sm}_{\infty}) \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}}) \to 0$$

*Exemple* 1.6 (systèmes locaux, 3.5.2). Le point 3) du théorème couplé au théorème de comparaison primitif de [Sch13] implique la décomposition de Hodge-Tate de la cohomologie étale des courbes modulaires avec coefficients. Soit $V_\kappa$ la représentation irréductible du groupe $G$ de plus haut poids $\kappa$, et $\mathcal{V}_{\kappa,K_p,et}$ le faisceau associé sur le site pro-Kummer-étale de $X_{K_pK^p}$. On a

$$\begin{aligned} VB(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes V_\kappa) &= \omega^{w_0\kappa,sm}_{\mathcal{FL}} \\ R^1VB(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes V_\kappa) &= \omega^{\kappa+2\rho,sm}_{\mathcal{FL}} \end{aligned}$$

et on trouve la suite exacte de Hodge-Tate :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega^{w_0\kappa,sm}_{\mathcal{FL}}) &\to \mathrm{colim}_{K_p}(\mathrm{H}^1_{proket}(X_{K_pK^p}, \mathcal{V}_{\kappa,K_p,et}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p) \\ &\to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega^{\kappa+2\rho,sm}_{\mathcal{FL}}) \to 0. \end{aligned}$$

Passons à présent à la description des vecteurs localement analytiques $\mathscr{O}^{la} \subseteq \hat{\mathscr{O}}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $G_n$ le sous-groupe affinoide des éléments de $G$ qui se réduisent sur 1 modulo $p^n$ et $\mathscr{O}_{G_n}$ son anneau de fonctions. C'est un $G_n$-bi-module. Pour tout $f \in \mathscr{O}_{G_n}$ et $g \in G_n$, on pose

$$\begin{aligned} g \star_1 f(-) &= f(g^{-1}-), \\ g \star_2 f(-) &= f(-g). \end{aligned}$$

On considère le faisceau $\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. On possède une action $\star_3$ de $G$ sur $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. Munis de l'action $\star_{1,3}$ (composée des $\star_1$ et $\star_3$), le faisceau $\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ est un faisceau $G_n$-équivariant. Il possède une seconde action $\star_2$ de $G_n$ qui est $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-linéaire. Pour tout $f \in \mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ (vu comme une fonction $G_n \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$), on a

$$\begin{aligned} g \star_{1,3} f(-) &= gf(g^{-1}-),\ \forall g \in G_n, \\ g \star_2 f(-) &= f(-g),\ \forall g \in G_n. \end{aligned}$$

L'action $\star_{1,3}$ se dérive et induit une action de $\mathfrak{g}$ et donc une action ($\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-linéaire)

$$\mathfrak{n}^0 \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}(\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$$

On définit $\mathcal{C}^{n-an} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{n}^0, \mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$. La fibre du faisceau $\mathcal{C}^{n-an}$ en un point $x \in \mathcal{FL}$ est une certaine complétion (dépendant de $n$) du dual du module de Verma universel $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{n}_x)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ce faisceau est stable sous les actions $\star_{1,3}$ et $\star_2$ considérées précédemment. L'action $\star_{1,3}$ induit aussi une action $\star_{hor}$ du Cartan horizontal $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0$. En passant à la limite, on définit l'espace des germes de fonctions analytiques au voisinage de 1 : $\mathscr{O}_{G,1} = \mathrm{colim}_n \mathscr{O}_{G_n}$, et on définit le faisceau

$$\mathcal{C}^{la} = \mathrm{colim}_n \mathcal{C}^{n-an} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{n}_0, \mathscr{O}_{G,1} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}).$$

Le formule $h\star_{1,2,3} f(-) = hf(h^{-1} - h)$ définit une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur les faisceaux $\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ et $\mathcal{C}^{la}$. La formule définissant le foncteur $VB$ s'étend naturellement à tous les faisceaux $G_n$-équivariants, et par passage à la limite à $\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ et $\mathcal{C}^{la}$. Par définition, $\mathscr{O}^{la} = \mathrm{colim}_{K_p}(\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\hat{\mathscr{O}})^{K_p} = VB(\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$. Le théorème qui suit est une formulation agréable de certains résultats de la section 4 de [Pan22]. Cette formulation est inspirée par la section 6 de [BC16] et est implicite dans [Pan22]. On peut le voir comme une généralisation du théorème 1.1 pour un faisceau non-cohérent.

**Theorem 1.7.** *On a $\mathscr{O}^{la} = VB(\mathcal{C}^{la})$ et on possède un isomorphisme canonique, $\hat{\mathscr{O}}$-linéaire, $\mathfrak{g}$ et $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :*

$$\Psi : \mathscr{O}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}^{sm}}\hat{\mathscr{O}} \to \mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$$

Expliquons comment est définie l'application $\Psi$. On possède une application orbite : $\mathscr{O}^{la} \to \mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\hat{\mathscr{O}}$ qui à une section localement analytique $f \in \hat{\mathscr{O}}$, associe un germe de fonction analytique $g \mapsto gf$. Le théorème affirme donc que cette application orbite se factorise à travers le sous-espace $\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$ et que le linéarisé de l'application orbite, pris au dessus des vecteurs lisses, induit un isomorphisme sur $\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$.

Ce théorème a pour corollaire (voir le lemme 4.6) :

**Corollaire 1.8** ([Pan22])**.** *Le faisceau $\mathfrak{n}^0 \subseteq \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes \mathfrak{g}$ agit trivialement sur $\mathscr{O}^{la}$.*

Passons maintenant à la théorie d'Eichler-Shimura. Soit $\hat{\mathrm{H}}^1 = \mathrm{H}^1_{proet}(X_{K^p}, \mathbb{Q}_p)$ la cohomologie complétée rationelle. Soit $\hat{\mathrm{H}}^{1,la}$ le sous-espace des vecteurs localement analytiques pour l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$. D'après [Pan22, thm. 4.4.6], $\mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) = \hat{\mathrm{H}}^{1,la}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p$. Soit $V_\kappa$ la représentation irréductible de plus haut poids $\kappa$ du groupe $G$. D'après [Eme06], on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\kappa, \hat{\mathrm{H}}^{1,la}) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^1_{proket}(X_{K_pK^p}, \mathcal{V}^\vee_{\kappa,K_p,et}).$$

On reformule donc la suite exacte de Hodge-Tate classique comme :

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\kappa,sm}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\kappa, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\kappa+2\rho,sm}) \to 0.$$

où $\mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\kappa,sm})$ a poids $w_0\kappa((1,0))$ et $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\kappa+2\rho,sm})$ a poids $\kappa((1,0))+1$.

Soit maintenant $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$ un caractère de $\mathfrak{b}$. Pan calcule la structure de Hodge-Tate de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))$ qui fait intervenir les espaces de formes surconvergentes.

**Theorem 1.9** ([Pan22], voir le thm 5.12)**.** *Soit $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.*

*(1) Si $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv} \cup \{-2\}$, on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \to 0$$

*(2) Si $\chi \in X^\star(T)$ et $\chi((1,-1)) = -2$, on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to K \to 0$$

*et*

$$0 \to (\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm})/\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm})) \to K \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \to 0$$

(3) *Si* $\chi \in X^\star(T)$ *et* $\chi((1,-1)) = 0$, *on a :*

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to$$

$$\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \oplus (\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi})/\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm})) \to 0$$

(4) *Si* $\chi \in X^\star(T)$ *et* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, *on a :*

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to$$

$$\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \oplus \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi}) \to 0$$

(5) $\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm})$, $\mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm})$ *et* $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi})$ *ont poids de Hodge-Tate* $w_0\chi((1,0))$.

(6) $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm})$ *et* $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm})$ *ont poids de Hodge-Tate* $\chi((1,0))+1$.

Dans la section 5, on donne une preuve de ce résultat. La preuve repose sur le calcul de la cohomologie $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathscr{O}^{la})$. On ramène ces calculs à ceux de $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathcal{C}^{la})$ et donc à un problème de théorie des représentations.

Lorsque le poids est singulier (par définition $\chi((1,-1)) = -1$ ou $w_0\chi = \chi + 2\rho$), la structure de Hodge-Tate dégénère : $\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm})$, et $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm})$ ont même poids. L'opérateur de Sen n'est alors pas semi-simple et le théorème suivant décrit le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))^{ss} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))$ où l'opérateur de Sen est semi-simple.

**Theorem 1.10** ([Pan22], voir thm 6.1)**.** *On possède un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))^{ss} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans la section 6, on donne une preuve de ce résultat en utilisant la théorie des représentations.

1.1. **Le travail de Juan Esteban Rodriguez.** Juan Esteban Rodriguez a étudié le cas des variétés de Shimura générales dans [Cam22]. Le théorème 1.1 est un cas très particulier de [Cam22, thm 4.2.5 et thm 4.3.1] et le théorème 1.7 est un cas très particulier de [Cam22, coro 4.3.5]. Enfin [Cam22, thm 5.2.1] généralise d'une bonne partie du théorème 1.9. Nous utilisons [Cam22, thm 4.2.5] pour justifier certains calculs de cohomologie dans la section 5.

1.2. **Remerciements.** Ce texte est une version détaillée d'un exposé donné lors d'un groupe de travail à l'ENS de Lyon sur le travail de Lue Pan. Je remercie les participants au groupe de travail, et particulièrement A. Bode, G. Boxer, G. Dospinescu, Joaquin Rodrigues, Juan-Esteban Rodriguez et Olivier Taibi. Je remercie également Michael Harris et Yuanyang Jiang pour leurs commentaires. Cette recherche a bénéficié du soutient de l'ERC-2018-COG-818856-HiCoShiVa.

## 2. Faisceaux équivariants sur $\mathcal{FL}$

2.1. **Notations.** Soit $k$ un corps complet de caractéristique 0 pour une valuation de rang 1 étendant la valuation $p$-adique. Soit $\mathcal{O}_k$ son anneau de valuation. On utilise la théorie des espaces adiques de Huber ([Hub94]).

Soit $G = \mathrm{GL}_2$ le groupe analytique sur $\mathrm{Spa}(k, \mathcal{O}_k)$ définit par $G(\mathrm{Spa}(R, R^+)) = \mathrm{GL}_2(R)$. Soit $B$ son Borel supérieur, $\bar{B}$ le Borel opposé, $T$ le tore diagonal, et $U$ le radical unipotent de $B$. Soit $Z$ le centre de $G$. Soit $G^{der} = \mathrm{SL}_2$ le groupe derivé et $T^{der}$ le tore maximal diagonal du groupe dérivé. Soit $G^{ab} = G/G^{der}$ l'abélianisé de $G$. On possède une isogénie $Z \to G^{ab}$ donnée par le determinant. On a un morphisme surjectif $T^{der} \times Z \to T$ de noyau $\mu_2$. On note $X^\star(T)$ le groupe des caractères de $T$. On identifie $X^\star(T)$ a l'ensemble des couples $(k; w) \in \mathbb{Z}^2$, $k = w \mod 2$, via $(zt, t^{-1}z) \mapsto t^k z^w$. On note $X^\star(T)^+ = \{(k; w) \in X^\star(T), k \geq 0\}$ le cone des caractères dominants pour $B$. Soit $w_0$ le générateur du groupe de Weyl. On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B)$, $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(U)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, $\mathfrak{h}^{der} = \mathrm{Lie}(T^{der})$, $\mathfrak{g}^{ab} = \mathrm{Lie}(G^{ab}) = \mathrm{Lie}(Z) = \mathfrak{z}$.

On pose $\mathcal{FL} = B\backslash G$. Le groupe $G$ agit à droite sur $\mathcal{FL}$. On note $\pi : G \to \mathcal{FL}$ la projection et on appelle $\infty$ le point $\pi(1)$ et $U_{w_0} = \pi(w_0 U)$. La décomposition en cellules de Bruhat est $\mathcal{FL} = \{\infty\} \coprod U_{w_0}$. Pour tout point $x \in \mathcal{FL}$, on note $B_x = \mathrm{Stab}_G(x)$. On a $B_x = \tilde{x}^{-1} B \tilde{x}$ pour $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. On pose $U_x$ le radical unipotent de $B_x$, $T_x = B_x/U_x$. On pose $\mathfrak{b}_x = \mathrm{Lie}(B_x)$, $\mathfrak{n}_x = \mathrm{Lie}(U_x)$, $\mathfrak{h}_x = \mathrm{Lie}(T_x)$.

2.2. **Faisceaux équivariants.**

2.2.1. *Faisceaux cohérents.* [[Sta13], def. 01BV] Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé. Un faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_X$-modules est cohérent si :

(1) il est de type fini,

(2) pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, pour tout ouvert $U \subseteq X$, et tout morphisme $\phi : \mathscr{O}_U^i \to \mathscr{F}|_U$, le faisceau $\mathrm{Ker}(\phi)$ est de type fini.

Si $\mathscr{O}_X$ lui-même est cohérent, alors un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules est cohérent si et seulement si il est de présentation finie ([Sta13], lem. 01BZ et lem. 01BW).

On note $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_X)$ la catégorie abélienne des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Si $X$ est un espace adique et $\mathscr{O}_X$ est le faisceau structural on note aussi cette catégorie $\mathbf{Coh}(X)$.

2.2.2. *Faisceaux équivariants.* Soit $S$ un espace adique localement de type fini sur $\mathrm{Spa}(k, \mathcal{O}_k)$. Soit $H$ un $S$-espace adique en groupes localement de type fini, agissant à droite sur un $S$-espace adique $X$. On note $m : H \times_S X \to X$ l'action et $p : H \times_S X \to X$ la seconde projection. Un faisceau cohérent $H$-équivariant sur $X$ est un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ munit d'un isomorphisme $act : m^\star \mathscr{F} \to p^\star \mathscr{F}$ vérifiant les propriétés suivantes.

(1) (L'identité agit trivialement) Soit $e : S \to H$ la section neutre. On a $(e \times Id_X)^\star act = Id_{\mathscr{F}}$.

(2) (L'action est associative) Pour $i = 1, 2, 3$, on définit des applications $m_i : H \times_S H \times_S X \to H \times_S X$ par $m_1((g_1, g_2, x)) = (g_1 g_2, x)$, $m_2((g_1, g_2, x)) =$

$(g_2, xg_1)$ and $m_3((g_1,g_2,x)) = (g_1,x)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
m_1^\star m^\star \mathscr{F} \arrow[rrr, "m_1^\star act"] \arrow[d, equal] & & & m_1^\star p^\star \mathscr{F} \arrow[d, equal] \\
m_2^\star m^\star \mathscr{F} \arrow[r, "m_2^\star act"] & m_2^\star p^\star \mathscr{F} \arrow[r, equal] & m_3^\star m^\star \mathscr{F} \arrow[r, "m_3^\star act"] & m_3^\star p^\star \mathscr{F}
\end{tikzcd}$$

On note $\mathbf{Coh}_H(S)$ la catégorie des faisceaux cohérents $H$-équivariants sur $S$.

2.2.3. *Faisceaux $G$-équivariants sur $\mathcal{FL}$.* Le groupe $G$ agit sur lui-même à droite par translation à gauche via $(g,h) \mapsto g \star_1 h = g^{-1}h$ et translation à droite par $(g,h) \mapsto g \star_2 h = hg$. Ces actions induisent deux structures de faisceaux $G$-équivariant sur $\mathscr{O}_G$.

Notons $\mathbf{Rep}(B)$ la catégorie des représentations de $B$ sur les $k$-espaces vectoriels de dimension fini. On définit un foncteur $F : \mathbf{Rep}(B) \to \mathbf{Coh}_G(\mathcal{FL})$ qui envoie une représentation $(V,\rho)$ sur le faisceau $\mathcal{V}$ donné par $\mathcal{V} = (\pi_\star \mathscr{O}_G \otimes V)^{B, \star_1 \otimes \rho}$ (c'est à dire qu'on prend les invariants sous l'action diagonale de $B$). L'action $\star_2$ sur $\mathscr{O}_G$ induit la structure $G$-équivariante sur $\mathcal{V}$. Notons $i_\infty : \{\infty\} \to \mathcal{FL}$ l'inclusion. Comme $B$ est le stabilisateur du point $\infty$, on définit un foncteur $i_\infty^\star : \mathbf{Coh}_G(\mathcal{FL}) \to \mathbf{Rep}(B)$ qui envoie $\mathscr{F}$ sur $i_\infty^\star \mathscr{F}$.

**Proposition 2.1.** *Le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} i_\infty^\star : \mathbf{Coh}_G(\mathcal{FL}) & \to & \mathbf{Rep}(B) \\ \mathscr{F} & \mapsto & i_\infty^\star \mathscr{F} \end{array}$$

*est une équivalence de catégorie. Un quasi-inverse est donné par le foncteur $F$ : $V \mapsto \mathcal{V}$.*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{Coh}_G(\mathcal{FL})$. La restriction de l'isomorphisme d'action $m^\star \mathscr{F} = p^\star \mathscr{F}$ à $G \times \{\infty\}$ fournit un isomorphisme $\pi^\star \mathscr{F} = \mathscr{O}_G \otimes_k i_\infty^\star \mathscr{F}$. On affirme que $\mathscr{F}$ est le faisceau $G$-equivariant associé à la représentation $i_\infty^\star \mathscr{F}$ de $B$. Considérons l'action $\star_{1,3} : G \times (G \times X) \to (G \times X)$, $(h,(g,x)) \mapsto (h^{-1}g, xh)$. Le morphisme $m : G \times X \to X$ est un $G$-torseur pour l'action $\star_{1,3}$ de $G$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F} & = & (m_\star m^\star(\mathscr{F}))^{\star_{1,3}} \\ & = & (\pi_\star \pi^\star(\mathscr{F}))^{\star_{1,3}|_B} \\ & = & (\pi_\star \mathscr{O}_G \otimes_k i_\infty^\star \mathscr{F})^{\star_{1,3}|_B} \end{array}$$

où l'action $\star_{1,3}$ de $B$ dans la dernière formule est l'action diagonale. De même on vérifie que l'action $G$-equivariante sur $\mathscr{F}$ est induite par l'action $\star_2$ de $G$ sur $\mathscr{O}_G$ dans la dernière formule. □

**Lemme 2.2.** *Si $V \in \mathbf{Rep}(G)$, on possède un isomorphisme de faisceaux $G$-equivariants $\mathcal{V} = V \otimes_k \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ où l'action de $G$ est diagonale sur le second membre de l'égalité.*

*Démonstration.* Considérons l'application $\pi_\star \mathscr{O}_G \otimes V \to \pi_\star \mathscr{O}_G \otimes V$ donnée par $f(g) \mapsto \rho(g)^{-1} f(g)$. Cette application échange l'action $\star_1 \otimes \rho$ et l'action $\star_1 \otimes \mathrm{Id}$ de $B$. □

2.2.4. *Exemples.*

(1) Pour tout caractère algébrique $\kappa = (k; w) \in X^\star(T)$, on note $\mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}} = F(w_0\kappa)$ le faisceau associé à la représentation $w_0\kappa$ de dimension 1 de $B$. C'est un faisceau de degré $k$. Si $\kappa \in X^\star(T)^+$,
$$\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}}) = \{f : G \to \mathbb{A}_1,\ f(bg) = w_0\kappa(b)f(g)\}$$
est la représentation de plus haut poids $\kappa$ de $G$.

(2) On note $\mathfrak{g}^0 = F(\mathfrak{g})$, le faisceau associé à $\mathfrak{g}$ muni de la représentation adjointe. D'après le lemme 2.2, $\mathfrak{g}^0 = \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes \mathfrak{g}$.

(3) On note $\mathfrak{n}^0 = F(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{b}^0 = F(\mathfrak{b})$. On a $\mathfrak{n}^0 \subseteq \mathfrak{b}^0 \subseteq \mathfrak{g}^0$. Pour tout ouvert $U$ de $\mathcal{FL}$, $f \in \mathfrak{g}^0(U)$ est une section de $\mathfrak{b}^0(U)$ (resp. $\mathfrak{n}^0(U)$) si et seulement si pour tout $x \in U$, $f(x) \in \mathfrak{b}_x$ (resp. $\mathfrak{n}_x$).

(4) On a un isomorphisme $\mathfrak{h} = \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0)$. L'image de $\mathfrak{h} \to \mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0$ est appelé Cartan horizontal. Ce morphisme se décrit concrètement comme l'application qui envoie $h \in \mathfrak{h}$ sur la fonction $x \mapsto \tilde{x}^{-1}h\tilde{x}$, où $x \in \mathcal{FL}$ et $\tilde{x} \in G$ est un relèvement de $x$.

(5) Le faisceau localement libre $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{b}^0$ s'identifie canoniquement au faisceau tangent $\mathcal{T}_{\mathcal{FL}}$. En effet $\mathcal{T}_{\mathcal{FL}}$ est un faisceau $G$-equivariant, de fibre en l'infini $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. On peut également procéder plus directement. On possède un morphisme $\mathfrak{g} \to \mathcal{T}_{\mathcal{FL}}$ qui s'obtient en dérivant l'action de $G$ sur $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ (voir la section 2.2.8). On peut l'étendre linéairement en un morphisme $\mathfrak{g}^0 \to \mathcal{T}_{\mathcal{FL}}$. Ce morphisme passe au quotient en un isomorphisme de faisceaux $G$-équivariants $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{b}^0 \to \mathcal{T}_{\mathcal{FL}}$.

(6) Soit $St$ la representation standard de dimension 2 de $G$. Comme $B$-representation, on a une suite exacte $0 \to (1;1)k \to St \to (-1;1)k \to 0$. En appliquant le foncteur $F$ on retrouve la suite exacte fondamentale sur $\mathcal{FL}$ :
$$0 \to \mathscr{O}^{(-1;1)}_{\mathcal{FL}} \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_k St \to \mathscr{O}^{(1;1)}_{\mathcal{FL}} \to 0.$$

2.2.5. *Faisceaux $H$-équivariants.* On considère maintenant un sous-groupe ouvert $H$ de $G$. Si $U$ est un ouvert de $\mathcal{FL}$ stable sous $H$, on possède une catégorie $\mathbf{Coh}_H(U)$ dont les objets sont les faisceaux cohérents, $H$-équivariants sur $U$. Supposons qu'on possède un point $x \in U(k)$ tel que le morphisme $xH \to U$ induise un isomorphisme $x.\mathrm{Stab}_H(x)\backslash H \to U$. Notons $i_x : x \hookrightarrow U$ l'inclusion. Dans cette situation on a :

**Proposition 2.3.** *Le foncteur $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Rep}(\mathrm{Stab}_H(x))$, donné par $\mathscr{F} \mapsto i_x^\star\mathscr{F}$ est une équivalence de catégorie.*

*Démonstration.* C'est identique à la preuve de la proposition 2.1. □

2.2.6. *Faisceaux $\mathfrak{g}$-équivariants.* On note $\hat{G}$ la complétion formelle de $G$ en la section neutre. Si $I$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathscr{O}_G$, alors $\mathscr{O}_{\hat{G}} = \lim_n \mathscr{O}_G/I^n$. Notons $\mathfrak{g} = \mathrm{Hom}_k(I/I^2, k)$ l'algèbre le lie de $G$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Elle s'identifie à l'algèbre des operateurs differentiels invariants à gauche sur $G$ (voir [Jan03], I, 7.10). On possède un isomorphisme $\mathscr{O}_{\hat{G}} = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), k)$.

On peut considérer la catégorie $\mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$ des faisceaux cohérents qui sont $\mathfrak{g}$-équivariant. Un objet de cette catégorie est un faisceau coherent $\mathscr{F}$, muni d'un morphisme d'action $act : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_k \mathscr{O}_{\hat{G}}$ (vérifiant les conditions déduites de celles du numéro 2.2). Par dualité, on possède un morphisme $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ qui est déterminé par sa restriction à $\mathfrak{g}$. Un objet de $\mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$ est donc simplement la donnée d'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ équipé d'un morphisme $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathscr{F})$, vérifiant :

(1) Pour tout ouvert $V$ de $U$, pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, et toute section $f \in \mathscr{F}(V)$, on a : $xyf - yxf = [x, y]f$,

(2) Pour tout ouvert $V$ de $U$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, toute section $f \in \mathscr{F}(V)$, et toute section $h \in \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}(V)$, on a $x(hf) = x(h)f + hx(f)$ [1].

**Lemme 2.4.** *Tout objet de* $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ *est un faisceau localement libre de rang fini sur* $U$.

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. Soit $\mathscr{F}^{tors}$ le sous-faisceau de torsion. Comme $\mathcal{FL}$ est une courbe lisse, il suffit de voir que $\mathscr{F}^{tors} = 0$. Soit $V = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ un ouvert affinoide de $U$. Le $A$-module $\mathscr{F}^{tors}(V)$ est de type fini et de torsion. Soit $I \subseteq A$ son idéal annulateur. Pour tout $g \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathscr{F}^{tors}(V)$ et $i \in I$ on a $g(if) = g(i)f + ig(f)$. Appliquant cette identité à $i \in I^2$, on voit que $g(f)$ est de torsion. Appliquant ceci à $i \in I$, on déduit que $g(i).f = 0$. On voit donc que l'idéal $I$ de $A$ est non nul, et stable sous les dérivations de $A$. C'est donc que $I = A$ et $\mathscr{F}^{tors}(V) = 0$. □

Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. On peut étendre l'action de $\mathfrak{g}$ en une action de $\mathscr{O}_U \otimes_k \mathfrak{g}$ et le sous-faisceau $\mathfrak{b}^0$ agit linéairement d'après 2.2.4, (5). On possède donc un morphisme $\mathfrak{g}$-équivariant $\mathfrak{b}^0 \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F})$.

**Définition 2.5.** *On dit qu'un objet* $\mathscr{F}$ *de* $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ *est de poids* $\chi \in X^\star(T)_k$ *si le morphisme précédent se factorise en un morphisme* $\mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0 \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F})$ *et si le Cartan horizontal* $\mathfrak{h}$ *agit par à travers le caractère* $\chi$.

*Exemple* 2.6. Le faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ est de poids $w_0\kappa$. En effet, dans les notations des exemples 2.2.4 (1) et (4), on a $f(gg^{-1}bg) = f(bg) = w_0\kappa(b)f(g)$. De façon équivalente, si $\kappa \in X^\star(T)$ est une représentation de $B$ de dimension 1, $F(\kappa)$ est de poids $\kappa$.

*Remarque* 2.7. Les objets de poids nul de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ sont les fibrés à connexion intégrable. En effet, dans ce cas le morphism $\mathscr{O}_U \otimes \mathfrak{g} \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathscr{F})$ se factorise en un morphisme : $\mathcal{T}_U \to \underline{\mathrm{End}}_k(\mathscr{F})$. Les conditions (1) et (2) assurent que ce morphisme est équivalent à la donnée d'une connexion intégrable $\nabla : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_U} \Omega^1_{U/k}$.

2.2.7. *Cohomologie de l'algèbre de Lie nilpotente.* On note $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$ la sous-catégorie de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ des faisceaux tués par $\mathfrak{n}^0$. On dispose de foncteurs :

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U) & \to & \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0} \\ \mathscr{F} & \mapsto & \mathscr{F}^{\mathfrak{n}^0} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}) \\ \mathscr{F} & \mapsto & \mathscr{F}_{\mathfrak{n}^0} = \mathrm{coker}(\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes (\mathfrak{n}^0)^\vee) = \mathrm{H}^1(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}) \end{array}$$

2.2.8. *Faisceaux* $H$*-équivariants et faisceaux* $\mathfrak{g}$*-équivariants.* Pour tout sous-groupe ouvert $H$ de $G$ et tout ouvert $U$ qui est $H$-stable, on possède un foncteur : $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ obtenu en "dérivant" l'action de $H$. A tout objet $\mathscr{F}$, muni de son action $H$-équivariante, on associe l'objet $\mathscr{F}$ muni du morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_H \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\hat{G}}$ déduit de l'application $\mathscr{O}_H \to \mathscr{O}_{\hat{G}}$. On déduit au passage que le foncteur $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ est fidèle dès que $H$ est connexe.

1. $x(h)$ est défini au numéro 2.2.4, (5)

*Remarque* 2.8. Voici une autre manière de décrire l'action de $\mathfrak{g}$ sur un faisceau $\mathscr{F}$ qui est $H$-équivariant. On note $H^{(1)}$ le fermé de $H$ défini par le carré de l'idéal d'augmentation $I_H^2$. On a $\mathscr{O}_{H^{(1)}} = k \oplus \epsilon \mathfrak{g}^\vee$. On restreint le morphisme $m_H$ en un morphisme $m_{H^{(1)}} : H^{(1)} \times U \to U$ et la projection $p_H$ en une projection $p_{H^{(1)}} : H^{(1)} \times U \to U$ Considérons le morphisme composé $\mathscr{F} \to m^\star_{H^{(1)}}\mathscr{F} \to p^\star_{H^{(1)}}\mathscr{F} = \mathscr{F} + \epsilon\mathfrak{g}^\vee \otimes \mathscr{F}$. La projection sur $\mathfrak{g}^\vee \otimes \mathscr{F}$ fournit une action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{F}$.

2.2.9. *Integration de l'action infinitésimale.* On va maintenant montrer qu'on peut toujours "intégrer" une action infinitesimale sur un ouvert quasi-compact. Commençons par quelques préliminaires. Soit $\mathfrak{g}^+ = \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_k)$ l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{GL}_2/\mathcal{O}_k$. Pour tout $n \geq 0$, on défini un sous-groupe $G_n \hookrightarrow G$ dont les points sont les matrices entières de reductions triviale modulo $p^n$. Le spectre formel de $\mathscr{O}^+_{G_n}$ est un schéma formel $p$-adique en groupes lisse. Concrètement, on a $\mathscr{O}^+_{G_n} = \mathcal{O}_k\langle X_{i,j}, i,j \in \{1,2\}\rangle$ et la matrice universelle vaut

$$1 + p^n \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On voit que si $n \geq 1$, la fibre spéciale de Spf $\mathscr{O}^+_{G_n}$ est un groupe additif. Soit $I^+_{G_n}$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{O}^+_{G_n}$ (engendré par les $\{X_{i,j}, i,j \in \{1,2\}\}$). On note $\mathfrak{g}_n^+ = \mathrm{Hom}(I^+_{G_n}/(I^+_{G_n})^2, \mathscr{O}_k)$. On possède un morphisme $\mathfrak{g}^+_n \to \mathfrak{g}$ qui induit un isomorphisme $\mathfrak{g}^+_n = p^n\mathfrak{g}^+$. Notons $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^+_n) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante sur $\mathcal{O}_k$ de $\mathfrak{g}^+_n$. C'est la sous $\mathcal{O}_k$-algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{g}^+_n$. Notons $Dist(\mathscr{O}^+_{G_n}) = \mathrm{colim}_m \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_k}(\mathscr{O}^+_{G_n}/(I^+_{G_n})^m, \mathcal{O}_k)$. Pour $n \geq 1$, il resulte de [Jan03], I, 7.8 que c'est la sous $\mathcal{O}_k$-algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments

$$\{\frac{x^m}{m!},\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x \in \mathfrak{g}^+_n\}.$$

On possède alors la suite d'inclusions pour tout $n \geq 1$ :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}^+_n) \hookrightarrow Dist(\mathscr{O}^+_{G_n}) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}^+_{n-1}).$$

**Proposition 2.9.** *Soit $U$ un ouvert quasi-compact, et soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. Alors il existe un sous-groupe ouvert $H$ de $G$ tel que $\mathscr{F}$ soit dans l'image du foncteur $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$.*

*Démonstration.* On va trouver $H$ de la forme $G_n$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Vue la fidélité de $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ pour $H$ connexe, on peut supposer que $U = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est affinoide. On pose $M = \mathscr{F}(U)$. On fixe un sous $A^+$-module ouvert et borné $M^+$ de $M$. On affirme qu'il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que le morphisme $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ induise un morphisme $p^n\mathfrak{g}^+ \to \mathrm{End}_{\mathscr{O}_k}(M^+)$. En effet, on commence par trouver $n_0$ tel que $p^{n_0}\mathfrak{g}^+(A^+) \subseteq A^+$ (ce qui est possible car $A^+$ est topologiquement de type fini sur $\mathcal{O}_k$). Puis, on peut trouver $n \geq n_0$ tel que pour une famille finie génératrice $\mathcal{M}$ d'éléments de $M^+$ comme $A^+$-module, on ait $p^n\mathfrak{g}^+(\mathcal{M}) \subseteq M^+$. On possède alors un morphisme $M^+ \to M^+ \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_k}(\mathcal{U}(p^n\mathfrak{g}^+), \mathcal{O}_k)$. On possède des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_k}(\mathcal{U}(p^n\mathfrak{g}^+), \mathcal{O}_k) \to \lim_k \mathscr{O}^+_{G_{n+1}}/I^k_{G_{n+1}} \to \mathscr{O}^+_{G_{n+2}}$. Ceci induit donc un morphisme $M \to M \otimes \mathscr{O}_{G_{n+2}}$. □

2.2.10. *Faisceaux $(\mathfrak{g}, M)$-équivariants.* Soit $M$ un sous-groupe localement profini de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $U$ un ouvert stable sous $M$. Soit $m_M : M \times U \to U$ la projection, et $p_M : M \times U \to U$ l'action. Soit un $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. On suppose que $\mathscr{F}$ est aussi $M$-équivariant : on possède un isomorphisme $act_M : m^\star_M\mathscr{F} = p^\star_M\mathscr{F}$ qui vérifie la condition de cocycle du numéro 2.2. Considérons maintenant les deux conditions de compatibilité suivantes entre les actions de $\mathfrak{g}$ et de $M$. Pour tout ouvert $V$ de $U$, on a (fonctoriellement en $V$) :

(1) Pour tout $(f, g, m) \in \mathscr{F}(V) \times \mathfrak{g} \times M$, avec $mV \subseteq V$ on a $\mathrm{Ad}_m(g)f = m(g(m^{-1}f))$.
(2) Si $V$ est quasi-compact, il existe un sous-groupe ouvert $H \subseteq G$ tel que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{F}|_V$ s'intègre en une action $act_H$ de $H$ et tel que les actions $act_H$ et $act_M$ coincident sur $M \cap H$.

**Définition 2.10.** *On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ est $(\mathfrak{g}, M)$-équivariant, si les actions de $\mathfrak{g}$ et $M$ vérifient la condition* (1). *On note $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)}(U)$ la catégorie des faisceaux $(\mathfrak{g}, M)$-équivariants.*

*On dit que le faisceau $\mathscr{F}$ est $(\mathfrak{g}, M)$-fortement équivariant, si les actions de $\mathfrak{g}$ et $M$ vérifient les conditions* (1) *et* (2). *On note $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)^f}(U)$ la catégorie des faisceaux $(\mathfrak{g}, M)$-fortement équivariants.*

*Remarque* 2.11. La condition (1) signifie que le morphisme d'action $\mathfrak{g} \otimes_k \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est $M$-équivariant (où l'action de $M$ est celle sur les deux facteurs dans le terme de gauche).

*Remarque* 2.12. La condition (2) signifie que l'action de $M$ est localement analytique, et que l'action infinitesimale de $M$ est induite par celle de $\mathfrak{g}$. Même si cette condition est naturelle, nous allons rencontrer des exemples où elle n'est pas satisfaite.

*Remarque* 2.13. Soit $H$ un sous-groupe ouvert de $G$ et $M$ un sous-groupe localement profini de $H \cap G(\mathbb{Q}_p)$. On possède alors un foncteur naturel : $\mathbf{Coh}_H(U) \to \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)^f}(U)$.

2.3. **Faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants.** On se propose de déterminer les faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants sur $\mathcal{FL}$, $\mathcal{FL} \setminus \{\infty\}$, et au voisinage du point $\{\infty\}$.

2.3.1. *Faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants sur $\mathcal{FL}$.* Soit $Z$ le centre de $G$ et $T^{der}$ le tore maximal diagonal du groupe dérivé de $G$. Soit $G^{ab}$ l'abélianisé de $G$. On possède une isogénie $Z \to G^{ab}$ donnée par le determinant. On a un morphisme surjectif $T^{der} \times Z \to T$ de noyau $\mu_2$. On a donc $X^\star(T) \hookrightarrow X^\star(T^{der}) \times X^\star(Z)$ et le conoyau de ce morphisme est un groupe d'ordre 2. Ce morphisme induit un isomorphisme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{der} \oplus \mathfrak{g}^{ab}$.

Pour tout caractère $\kappa \in X^\star(T)$, on possède un faisceau inversible $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ (voir la section 2.2.4, (1)). Pour tout $\mu \in X^\star(Z)_k$ vu comme un caractère $\mu : \mathfrak{g} \to k$, on note $k(\mu)$ le $k$-espace vectoriel de dimension 1, avec action de $\mathfrak{g}$ par $\mu$.

Soit $\kappa \in X^\star(T^{der}) \times X^\star(Z)_k \hookrightarrow X^\star(T)_k$. Ecrivons $\kappa = \kappa' + \mu$ avec $\kappa' \in X^\star(T)$ et $\mu \in X^\star(Z)_k$. On définit $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}} = \mathscr{O}^{\kappa'}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu)$.

**Lemme 2.14.** *Le faisceau $\mathfrak{g}$-équivariant $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ ne dépend que de $\kappa$ (comme la notation l'indique), et pas de la décomposition $\kappa = \kappa' + \mu$.*

*Démonstration.* Supposons que $\kappa = \kappa' + \mu = \kappa'' + \mu'$. Supposons que $\mathscr{O}^{\kappa'}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu) \simeq \mathscr{O}^{\kappa''}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu')$ comme faisceaux $\mathfrak{g}$-equivariants. Quitte à tordre, on peut supposer $\kappa'' = \mu' = 0$. Comme $\mathscr{O}^{\kappa'}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu')$ est le faisceau constant de degré nul, cela signifie que $\kappa' \in X^\star(G^{ab})$ (c'est-à-dire que $\kappa'$ est un caractère de $G$ tout entier). L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{\kappa'}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu)) \simeq k$ se fait via $\kappa' + \mu$ et donc $\kappa' + \mu = 0$. $\square$

**Lemme 2.15.** *Tout faisceau $\mathfrak{g}$-équivariant inversible sur $\mathcal{FL}$ est isomorphe à un faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ pour un unique $\kappa \in X^\star(T_{der}) \times X^\star(Z)_k$.*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un faisceau $\mathfrak{g}$-équivariant inversible. En tordant par un faisceau convenable $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$, $\kappa \in X^\star(T)$, on se ramène au cas où le faisceau sous-jacent à $\mathscr{F}$ est le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$ se fait via un caractère $\mu : \mathfrak{g} \to k$. □

On détermine à présent les objets inversibles de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},G(\mathbb{Q}_p))}(\mathcal{FL})$. Pour tout $\kappa \in X^\star(T)$, le faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ est $G$-equivariant et définit donc un objet de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},G(\mathbb{Q}_p))^f}(\mathcal{FL})$ par la remarque 2.13.

Soit $\mu \in X^\star(Z)_k$ et $\chi : G(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$ un caractère continu. On note $k(\mu,\chi)$ le $k$-espace vectoriel de dimension 1, muni des action de $\mathfrak{g}$ via $\mu$ et de $G(\mathbb{Q}_p)$ via $\chi$. On note que ces actions sont compatibles au sens où $\mathrm{Ad}_g(h).e = ghg^{-1}.e$ pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, $h \in \mathfrak{g}$, $e \in k(\mu,\chi)$.

Pour tout $\kappa \in X^\star(T)$, $\mu \in X^\star(Z)_k$ et $\chi : G(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$, on possède donc un faisceau $(\mathfrak{g}, G(\mathbb{Q}_p))$-équivariants $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu,\chi)$.

**Lemme 2.16.** *Tout faisceau inversible $(\mathfrak{g}, G(\mathbb{Q}_p))$-équivariant est isomorphe à un faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu,\chi)$ pour $(\kappa,\mu,\chi) \in X^\star(T) \times X^\star(Z)_k \times \mathrm{Hom}(G(\mathbb{Q}_p), k^\times)$. On possède un isomorphisme de faisceaux $(\mathfrak{g}, G(\mathbb{Q}_p))$ équivariants $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu,\chi) = \mathscr{O}^{\kappa'}_{\mathcal{FL}} \otimes_k k(\mu',\chi')$ si et seulement si :*

*(1) $\kappa - \kappa' = \delta \in X^\star(G^{ab})$,*
*(2) $\mu = \mu' + \delta$,*
*(3) $\chi = \chi' + \delta$.*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un faisceau $(\mathfrak{g}, G(\mathbb{Q}_p))$-équivariant inversible. En tordant par un faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ pour $\kappa \in X^\star(T)$, on se ramène au cas où le faisceau sous-jacent est $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. On a alors $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{F}) = k(\mu,\chi)$. On vérifie facilement que $(\kappa,\mu,\chi)$ est unique modulo la relation d'équivalence décrite. □

2.3.2. *Faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants sur $\mathcal{FL} \setminus \{\infty\}$.* On veut maintenant déterminer les faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants sur l'ouvert $B\backslash Bw_0B = U_{w_0} = \hat{B}\backslash\hat{B}w_0U$

Commençons par décrire deux constructions.

(1) Considérons le morphisme :
$$\pi : \hat{U}\backslash\hat{B}w_0U \to \hat{B}\backslash\hat{B}w_0U.$$
Pour tout $\kappa \in X^\star(T)_k$, on pose :
$$\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}(V) = \{f : \pi^{-1}(V) \to \mathbb{A}^1, f(bg) = w_0\kappa(b)f(g)\ \forall b \in \hat{B}\}.$$
L'action par translation à droite de $\hat{G}$ fournit une structure $\mathfrak{g}$-équivariante.

(2) Soit $\xi \in \Omega^1_{U_{w_0}/k}$. On note $\mathscr{O}_{U_{w_0}}[\xi]$ le faisceau trivial muni de la connection $\nabla$ donnée par $\nabla(1) = \xi$. La connexion définit, via le morphisme $g \in \mathfrak{g} \mapsto \nabla_g$, une structure $\mathfrak{g}$-équivariante. Voir la remarque 2.7.

On note $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}[\xi] = \mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}} \otimes_{\mathscr{O}_{U_{w_0}}} \mathscr{O}_{U_{w_0}}[\xi]$.

**Lemme 2.17.** *(1) Le faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}[\xi]$ est de poids $w_0\kappa$,*

(2) *Tout objet de rang* 1 *de* $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U_{w_0})$ *est isomorphe à un faisceau* $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}[\xi]$ *pour un unique* $\kappa$ *et une forme différentielle* $\xi$ *unique à un scalaire près.*

*Démonstration.* Le premier point résulte de l'exemple 2.6 et de la remarque 2.7. Passons au second point. Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U_{w_0})$. Rappelons pour commencer que tout faisceau inversible sur $U_{w_0}$ est trivial ([KST20], thm 4). On possède un morphisme $\mathfrak{g}$-équivariant $\mathfrak{b}^0 \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_{U_{w_0}}}(\mathscr{F}) = \mathscr{O}_{U_{w_0}}$. Le morphisme $\mathfrak{n}^0 \to \mathscr{O}_{U_{w_0}}$ est nul car le faisceau $\mathfrak{n}^0$ est de poids $2\rho$. Le morphisme $\mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0 \to \mathscr{O}_{U_{w_0}}$ est $\mathfrak{g}$-équivariant et donc induit par un caractère $\kappa \in X^\star(T)_k$. En tordant par $\mathscr{O}^{-w_0\kappa}_{U_{w_0}}$ on peut supposer que $\kappa = 0$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{F}$ induit donc un morphism : $\mathcal{T}_{U_{w_0}} \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ (par la remarque 2.7) ou de façon équivalente, une connexion $\nabla : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_U} \Omega^1_{U_{w_0}/k}$. Il en résulte que le faisceau $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}[\xi]$.

□

On s'intéresse à présent aux objets de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(U_{w_0})$. Pour tout $\kappa \in X^\star(T)_k$, on peut définir une structure $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-équivariante sur le faisceau $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}$ de la façon suivante. Pour toute section $f$ de $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}}$ (vue comme une fonction $f(bw_0u)$ pour $b \in \hat{B}$ et $u \in U$), on pose :

(1) $u'f(bw_0u) = \kappa(b)f(bw_0uu')$ pour tout $u' \in U(\mathbb{Q}_p)$,
(2) $tf(bw_0u) = f(bw_0t^{-1}ut)$ pour tout $t \in T(\mathbb{Q}_p)$.

Pour tout caractère continu $\lambda : T(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$, on note $k(\lambda)$ le $k$-espace vectoriel munit de l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ par $\lambda$.

**Proposition 2.18.** *Tout objet inversible de* $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(U_{w_0})$ *est isomorphe à un faisceau* $\mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}} \otimes_k k(\lambda)$ *pour un unique* $\kappa \in X_\star(T)_k$ *et un unique* $\lambda : T(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$.

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(U_{w_0})$ de rang 1. Quitte à tordre, on peut le supposer de poids 0. On peut aussi fixer un isomorphisme $\mathscr{F} \simeq \mathscr{O}_{U_{w_0}}$. Pour tout $m \in B(\mathbb{Q}_p)$ on a $m.1 = f_m.1$ où $f_m$ est une fonction inversible sur $U_{w_0}$, donc une constante (en considérant le polygone de Newton de $f_m$ on voit que si $f_m$ est non constante, elle possède un zéro). Il en résulte que l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur 1 est donnée par un caractère $\lambda : B(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$. L'action de $\mathfrak{g}$ est donnée par une connection $\nabla$. La compatibilité entre l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de $\mathfrak{g}$ signifie que le morphisme $\nabla : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \Omega^1_{U_{w_0}/k}$ est $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariant (voir la remarque 2.11). Soit $z$ la coordonnée naturelle sur $U_{w_0}$. Posons $\nabla(1) = \xi(z) = f(z)dz$. L'invariance par l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ signifie que $f(z)dz = bf(z)dbz$ pour tout $b \in B(\mathbb{Q}_p)$. Si on l'applique à la matrice unipotente standard, on trouve que $f(z+1) = f(z)$, donc $\xi = rdz$ avec $r \in k$. Si on l'applique à $t = \mathrm{diag}(t, 1) \in B(\mathbb{Q}_p)$, on trouve que $rdz = trdz$. Il en résulte que $r = 0$. Ainsi, les objets inversibles de poids zero de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(U_{w_0})$ sont bien de la forme $\mathscr{O}_{U_{w_0}} \otimes_k k(\lambda)$, ce qui termine la démonstration. □

*Remarque* 2.19. Soit $\kappa \in X^\star(T)$. D'après les résultats de la section 2.3.1, on possède un faisceau fortement $(\mathfrak{g}, G(\mathbb{Q}_p))$-équivariant $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ et on vérifie qu'on possède un isomorphisme canonique de faisceaux $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-équivariants :

$$\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}|_{U_{w_0}} \simeq \mathscr{O}^{\kappa}_{U_{w_0}} \otimes_k k(\kappa).$$

2.3.3. *Faisceaux inversibles $\mathfrak{g}$-équivariants au voisinage de l'infini.* Notons $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$ la limite inductive des catégories $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ où $U$ parcourt les voisinages du point $\infty$.

Commençons par une construction sur l'ouvert $B\backslash Bw_0Bw_0 = U_1$. Considérons le morphisme :

$$\pi : \hat{U}\backslash\hat{B}w_0Uw_0 \to \hat{B}\backslash\hat{B}w_0Uw_0.$$

Pour tout $\kappa \in X^\star(T)_k$, on pose :

$$\mathscr{O}^\kappa_{U_1}(V) = \{f : \pi^{-1}(V) \to \mathbb{A}^1, f(bg) = w_0\kappa(b)f(g)\ \forall b \in \hat{B}\}.$$

L'action par translation à droite de $\hat{G}$ fournit une structure $\mathfrak{g}$-équivariante sur $\mathscr{O}^\kappa_{U_1}$.

*Remarque* 2.20. On a donc construit des faisceaux $\mathfrak{g}$-équivariants, $\mathscr{O}^\kappa_{U_1}$ et $\mathscr{O}^\kappa_{U_{w_0}}$ pour tout $\kappa \in X^\star(T)_k$. Ces deux faisceaux se recollent en le faisceau $\mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}}$ si $\kappa \in X^\star(T^{der}) \times X^\star(Z)_k$.

On note $\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$ l'anneau local de $\mathcal{FL}$ en $\infty$. Soit $i_\infty : \{\infty\} \to \mathcal{FL}$ l'inclusion. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathcal{FL}$, on note $i_\infty^{-1}\mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}_\infty$ la tige du faisceau $\mathscr{F}$ en le point $\infty$.[2]. Ainsi, $\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty} = i_\infty^{-1}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. On pose $\mathscr{O}^\kappa_\infty = i_\infty^{-1}(\mathscr{O}^\kappa_{U_1}) = \mathscr{O}^\kappa_{U_1,\infty}$. C'est un objet de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$.

**Lemme 2.21.** *(1) Le faisceau $\mathscr{O}^\kappa_\infty$ est de poids $\omega_0\kappa$.*

*(2) Tout objet de rang 1 de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$ est isomorphe à un unique faisceau $\mathscr{O}^\kappa_\infty$.*

*Démonstration.* Le premier point est évident. Pour le second point, soit $\mathscr{F}$ un objet de rang 1 de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$. Le morphisme $\mathfrak{n}^0_\infty \to \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}(\mathscr{F})$ est $\mathfrak{g}$-équivariant, donc nul. On possède donc un morphisme $(\mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0)_\infty \to \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}(\mathscr{F})$ qui est $\mathfrak{g}$-equivariant, et donc le Cartan horizontal $\mathfrak{h}$ agit à travers un caractère $\chi \in X^\star(T)_k$. Quitte à tordre, on peut supposer que $\chi = 0$. D'après la remarque 2.7, $\mathscr{F}$ est un fibré à connection de rang 1 sur $\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$. On vérifie sans peine que $\mathscr{F}$ possède un générateur horizontal et donc $\mathscr{F} \simeq \mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$ [3]. □

Le groupe $B(\mathbb{Q}_p)$ stabilise le point $\infty$ et agit sur l'ensemble des voisinages $U$ de $\infty$. Notons $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$ la catégorie dont les objets sont des modules de types finis sur $\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$, munis d'une action de $\mathfrak{g}$ et d'une action de $B(\mathbb{Q}_p)$ compatibles au sens des points (1) et (2) de la section 2.2.10. On définit une structure $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariante sur $\mathscr{O}^\kappa_\infty$. Pour toute section $f$ de $\mathscr{O}^\kappa_\infty$ (vue comme une fonction $f(bw_0uw_0)$ pour $b \in \hat{B}$ et $u \in U$ arbitrairement proche de 1), on pose :

(1) $u'f(bw_0uw_0) = f(bw_0uw_0u')$ pour tout $u' \in U(\mathbb{Q}_p)$,
(2) $tf(bw_0uw_0) = f(bt^{-1}w_0uw_0t)$ pour tout $t \in T(\mathbb{Q}_p)$.

On vérifie immédiatement que $\mathscr{O}^\kappa_\infty$ est bien un objet de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$.

Rappelons que pour tout caractère continu $\lambda : T(\mathbb{Q}_p) \to k^\times$, on note $k(\lambda)$ le $k$-espace vectoriel muni de l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ par $\lambda$.

---

2. On ne confondra pas le foncteur $i_\infty^{-1}$ avec le foncteur $i_\infty^\star$ qui est définit pour les faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-modules.

3. Soit $z$ la coordonnée au voisinage de l'infini. Supposons que $\nabla(1) = f(z)dz$. On cherche à résoudre l'equation $dg(z) + g(z)f(z)dz$. Soit $F(z)$ un primitive de $f(z)$. On voit que $g(z) = \exp(-F(z))$ est une section horizontale

**Lemme 2.22.** *Tout objet de rang 1 de* $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$ *est isomorphe à un faisceau* $\mathscr{O}^{\kappa}_{\infty}\otimes_k k(\lambda)$ *pour un unique* $\kappa\in X_\star(T)_k$ *et* $\lambda : T(\mathbb{Q}_p)\to k^\times$.

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un objet de rang 1 de $\mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$. Quitte à tordre, on peut supposer que $\mathscr{F}$ est de poids nul donc isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$ (et l'action de $\mathfrak{g}$ correspond à la connection triviale). L'action de $b\in B(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par la multiplication par une fonction $f_b\in\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}$ et la compatibilité entre l'action de $\mathfrak{g}$ et de $B(\mathbb{Q}_p)$ entraine que $d(f_b)=bd(1)=0$. Ainsi, $f_b$ est constante, et l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ est bien donnée par un caractère continu $\lambda : T(\mathbb{Q}_p)\to k^\times$. □

*Remarque* 2.23. Soit $\kappa\in X^\star(T)$. D'après les résultats de la section 2.3.1, on possède un faisceau fortement $(\mathfrak{g},G(\mathbb{Q}_p))$-équivariant $\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL}}$ et on vérifie qu'on possède un isomorphisme canonique de faisceaux $(\mathfrak{g},B(\mathbb{Q}_p))$-équivariants :

$$\mathscr{O}^{\kappa}_{\mathcal{FL},\infty}\simeq\mathscr{O}^{\kappa}_{\infty}\otimes_k k(w_0\kappa).$$

## 3. Faisceaux automorphes

### 3.1. Catégories de faisceaux cohérents sur les courbes modulaires.

3.1.1. *Courbes modulaires perfectoides.* Soit $K^p$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f^p)$. Soit $K_p$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $X_{K_pK^p}$ la courbe modulaire adique de niveau $K_pK^p$ sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$. Soit $X_{K^p}=\lim_{K_p}X_{K_pK^p}$ la courbe modulaire perfectoide ([Sch15]). Soit $\pi_{K_p}: X_{K^p}\to X_{K_pK^p}$ la projection vers la courbe modulaire de niveau $K_pK^p$. Si $U$ est un ouvert quasi-compact de $X_{K^p}$ alors $U$ est de la forme $\pi_{K_p}^{-1}(U_{K_p})$ où $U_{K_p}$ est un ouvert quasi-compact de $X_{K_pK^p}$ pour tout $K_p$ assez petit. On note $\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}=\mathrm{colim}_{K_p}\pi_{K_p}^{-1}\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}}$. La complétion du faisceau $\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}$ est le faisceau structural $\mathscr{O}_{X_{K^p}}$ de $X_{K^p}$. On possède une morphisme d'espaces annelés $\pi^{sm}_{K_p}:(X_{K^p},\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}})\to(X_{K_pK^p},\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}})$ (ne pas confondre avec $\pi_{K_p}$ !). On a donc un foncteur

$$\begin{array}{rcl}(\pi^{sm}_{K_p})^\star:\mathbf{Coh}(X_{K_pK^p}) & \to & \mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}})\\ \mathscr{F} & \mapsto & \pi_{K_p}^{-1}\mathscr{F}\otimes_{\pi_{K_p}^{-1}\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}}}\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}\end{array}$$

L'énoncé qui suit exprime entre autre que la catégorie $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}})$ est la limite inductive des catégories $\mathbf{Coh}(X_{K_pK^p})$.

**Proposition 3.1.** *(1) Le faisceau* $\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}$ *est cohérent dans* $\mathbf{Mod}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}})$.

*(2) Soit* $U=\lim_{K_p}U_{K_p}$ *un ouvert quasi-compact de* $X_{K_p}$ *et* $\mathscr{F}\in\mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_U)$. *Alors il existe un sous-groupe ouvert compact* $K_p$ *est* $\mathscr{F}_{K_p}\in\mathbf{Coh}(U_{K_p})$ *tel que* $\mathscr{F}=(\pi^{sm}_{K_p})^\star\mathscr{F}_{K_p}$.

*(3) Soit* $\phi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ *un morphisme dans* $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_U)$. *Alors il existe un sous-groupe ouvert compact* $K_p$ *et un morphisme* $\phi_{K_p}:\mathscr{F}_{K_p}\to\mathscr{G}_{K_p}$ *dans* $\mathbf{Coh}(U_{K_p})$ *tel que* $\phi=(\pi^{sm}_{K_p})^\star\phi_{K_p}$.

*(4) Soit* $\phi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ *un morphisme dans* $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_U)$. *Alors* $\phi$ *est un isomorphisme si et seulement si, pour tout* $\mathbb{C}_p$*-point* $x$ *de* $U$, $\phi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Montrons que le faisceau $\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}$ est cohérent (voir le numéro 2.2). Le premier point de la définition est évident. Pour le second point, on peut supposer que l'ouvert $U\subseteq X_{K_p}$ est quasi-compact. Soit $s_1,\cdots,s_i\in\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}(U)$. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact $K_p$ et un ouvert $U_{K_p}$ de $X_{K_pK^p}$ tel que $U = \pi_{K_p}^{-1}(U_{K_p})$ et tel que $s_1, \cdots, s_i \in \mathscr{O}_{X_{K_pK^p}}(U_{K_p})$. Le noyau du morphisme $\mathscr{O}_{U_{K_p}}^i \to \mathscr{O}_{U_{K_p}}$ est de type fini comme $\mathscr{O}_{U_{K_p}}$-module. Le noyau du morphisme $(\mathscr{O}_U^{sm})^i \to \mathscr{O}_U^{sm}$ est donc de type fini. Le reste resulte du lemme 01ZR de [Sta13] (énoncé pour des schémas). Le dernier point, se déduit du résultat analogue dans $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}})$. $\square$

3.1.2. *Application des périodes de Hodge-Tate.* Soit

$$0 \to \mathrm{Lie}(E)(1) \to T_pE \otimes \mathscr{O}_{X_{K^p}} \to \omega_{E^t} \to 0$$

la décomposition de Hodge-Tate relative du module de Tate du schéma semi-abélien universel. Soit $\pi_{HT} : X_{K^p} \to \mathcal{FL}$ l'application des périodes de Hodge-Tate ([Sch15]). Par construction,

$$\begin{aligned} \pi_{HT}^\star(0 \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(-1;1)} \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_k St \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(1;1)} \to 0) = \\ 0 \to \mathrm{Lie}(E)(1) \to T_pE \otimes \mathscr{O}_{X_{K^p}} \to \omega_{E^t} \to 0. \end{aligned}$$

On rappelle que l'image inverse d'un ouvert affinoide standard [4] de $\mathcal{FL}$ via $\pi_{HT}$ est affinoide.

On note $\mathscr{O}_{K_p} = (\pi_{HT})_\star \pi_{K_p}^{-1}(\mathscr{O}_{X_{K_p}})$, $\mathscr{O}^{sm} = (\pi_{HT})_\star \mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm} = \mathrm{colim}_{K_p} \mathscr{O}_{K_p}$ et $\hat{\mathscr{O}} = (\pi_{HT})_\star \mathscr{O}_{X_{K^p}}$.

On considère le morphisme d'espaces annelés $\pi_{HT}^{sm} : (X_{K^p}, \mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}) \to (\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{sm})$ (ne pas confondre avec $\pi_{HT}$ !). On possède donc un foncteur $(\pi_{HT}^{sm})_\star = (\pi_{HT})_\star$ : $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}) \to \mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm})$ et un foncteur

$$\begin{aligned} (\pi_{HT}^{sm})^\star : \mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm}) &\to \mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}) \\ \mathscr{F} &\mapsto \pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}^{sm}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm} \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.** *(1) Le faisceau $\mathscr{O}^{sm}$ est cohérent dans* $\mathbf{Mod}(\mathscr{O}^{sm})$,

*(2) Les foncteurs $(\pi_{HT})_\star$ et $(\pi_{HT}^{sm})^\star$ induisent des équivalences entre les catégories* $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm})$ *et* $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm})$.

*(3) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm})$, on a $\mathrm{R}^i(\pi_{HT})_\star\mathscr{F} = 0$ pour tout $i > 0$.*

*(4) Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm})$. Soit $U$ un ouvert rationnel d'un affinoide standard de $\mathcal{FL}$. On a $\mathrm{H}^i(U, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i > 0$.*

*Démonstration.* Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathbf{Coh}(\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm})$. Soit $U$ un ouvert affinoide de $X_{K^p}$. Il résulte de la proposition 3.1 et du théorème 2.5 de [Hub94] que $\mathrm{H}^i(U, \mathscr{F}) = 0$ pour $i \geq 1$ et que pour tout ouvert rationnel $V$ de $U$, $\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}(U)} \mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}(V)$. Inversement, si $M$ est un $\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}(U)$-module de présentation fini, il existe un unique faisceau cohérent $\mathcal{M}$ sur $U$ tel que $\mathcal{M}(V) = M \otimes_{\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}(U)} \mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}(V)$. On possède une base d'ouverts affinoides $U$ de $\mathcal{FL}$ tel que $\pi_{HT}^{-1}(U) = \lim_{K_p} U_{K_p}$ où $U_{K_p}$ est un ouvert affinoide de $X_{K_pK^p}$ pour tout sous-groupe compact ouvert $K_p$ assez petit. Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}(\mathscr{O}^{sm})$. On déduit donc que $(\pi_{HT}^{sm})^\star\mathscr{F}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}$ est le faisceau associé au module $\mathscr{F}(U)$. On déduit également que le morphisme $(\pi_{HT})_\star$ est exact et que les morphismes d'adjonction $(\pi_{HT}^{sm})^\star(\pi_{HT})_\star \Rightarrow Id$ et $Id \Rightarrow (\pi_{HT})_\star(\pi_{HT}^{sm})^\star$ sont des isomorphismes. Vérifions la cohérence de $\mathscr{O}^{sm}$. Soit $s_1, \cdots, s_i \in \mathscr{O}^{sm}(U)$. Considérons le morphisme $\phi : \mathscr{O}^{sm}|_U^i \to \mathscr{O}^{sm}|_U$. On déduit que $(\pi_{HT}^{sm})^\star\mathrm{Ker}(\phi)$

4. Les ouverts affinoides standards sont les boules de rayon 1 et de centre $\infty$ et $\infty w_0$.

est de type fini, et donc $\mathrm{Ker}(\phi)$ est de type fini. Vérifions le dernier point. On a $\mathrm{H}^i(U,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(U,(\pi_{HT})_\star(\pi_{HT}^{sm})^\star\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(\pi_{HT}^{-1}(U),(\pi_{HT}^{sm})^\star\mathscr{F})$. On a vu que $\mathrm{H}^i(\pi_{HT}^{-1}(U),(\pi_{HT}^{sm})^\star\mathscr{F}) = 0$ si $i > 0$. $\square$

3.2. **Le foncteur $VB$ sur la catégorie $\mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$.** Soit $U$ un ouvert de $\mathcal{FL}$. On définit un foncteur :

$$\begin{array}{rcl} VB : \mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U) & \to & \mathbf{Mod}(\mathscr{O}^{sm}|_U) \\ \mathscr{F} & \mapsto & \mathrm{colim}_{K_p}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U)^{K_p} \end{array}$$

Explicitons la définition. Pour tout ouvert affinoide $V$ de $U$, on a $VB(\mathscr{F})(V) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^0(K_p,\mathscr{F}(V)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}(V)}}\hat{\mathscr{O}}(V))$. On observe que l'action de $K_p$ diagonale est bien défini pour tout $K_p$ suffisamment petit. En effet, d'après le lemme 2.4, l'action de $\hat{G}$ sur $\mathscr{F}(V)$ est induite par l'action d'un sous-groupe ouvert $H$ de $G$, qui contient un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$.

**Theorem 3.3.** *(1) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$, $VB(\mathscr{F})$ est un faisceau localement libre de rang fini.*

*(2) Si $U$ est quasi-compact, et $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$, il existe un sous-groupe compact ouvert $K_p$ et un faisceau localement libre canonique de $(\mathscr{O}_{K_p})|_U$-modules, noté $VB_{K_p}(\mathscr{F})$, et un isomorphisme $VB(\mathscr{F}) = VB_{K_p}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{K_p}|_U} \mathscr{O}^{sm}|_U$.*

*(3) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)^{\mathfrak{n}^\circ}$, on possède un isomorphisme canonique*

$$VB(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}^{sm}|_U}\hat{\mathscr{O}}|_U \to \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U$$

*et le foncteur $VB$ restreint à la catégorie $\mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)^{\mathfrak{n}^\circ}$ est exact.*

*(4) Le foncteur $VB$ est dérivable, et pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_\mathfrak{g}(U)$, on a $\mathrm{R}^iVB(\mathscr{F}) = VB(\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0,\mathscr{F}))$.*

*Remarque* 3.4. Si $U$ est quasi-compact, et $K_p$ est suffisamment petit comme au (2), l'isomorphisme du point (3) précédent s'écrit

$$VB_{K_p}(\mathscr{F})\otimes_{(\mathscr{O}_{K_p})|_U}\hat{\mathscr{O}}|_U \to \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U.$$

On peut de plus supposer que l'action de $\hat{G}$ sur $\mathscr{F}$ induit une action de $K_p$ (quitte à rapetisser $K_p$). On peut alors supposer que l'isomorphisme est $K_p$-équivariant pour l'action de $K_p$ sur $\hat{\mathscr{O}}|_U$ sur le membre de gauche, et l'action de $K_p$ diagonale sur le membre de droite.

*Remarque* 3.5. Soit $M$ un sous-groupe localement profini qui stabilise $U$ et $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)}(U)$, alors $VB(\mathscr{F})$ est un faisceau $M$-équivariant [5]. Il en résulte que les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(U,\mathrm{R}^jVB(\mathscr{F}))$ sont des représentations de $M$.

**Lemme 3.6.** *Soit $U$ un ouvert quasi-compact de $\mathcal{FL}$. Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)^f}(U)$, alors $\mathrm{H}^i(U,\mathrm{R}^jVB(\mathscr{F}))$ est une representation lisse de $M$.*

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque que $\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0,\mathscr{F}) \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)^f}(U)$ (car $\mathfrak{n}^0 \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g},M)^f}(U)$). Il suffit donc de considerer $\mathrm{H}^i(U,VB(\mathscr{F}))$. Soit $V$ un ouvert quasi-compact de $U$. Soit $M_V$ un sous-groupe ouvert de $M$ qui stabilise $V$. On affirme que $VB(\mathscr{F})(V)$ est une représentation lisse de $M_V$. En effet, $VB(\mathscr{F})(V) =$

5. En effet, $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U$ est $M$-équivariant, et le sous faisceau $VB(\mathscr{F})$ hérite d'une structure $M$-équivariante

$\mathrm{colim}_{K_p} \mathrm{H}^0(K_p, \mathscr{F}(V) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}(V)}} \hat{\mathscr{O}}(V))$. La forte équivariance implique l'existence d'un compact ouvert $K_p$ tel que les action de $M_V \cap K_p$ déduite par restriction de l'action de $K_p$ ou de $M_V$ sur $\mathscr{F}(V) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}(V)}} \hat{\mathscr{O}}(V)$ sont les mêmes. D'après la proposition 3.2, (5), $\mathrm{H}^i(U, VB(\mathscr{F}))$ se calcule à l'aide d'un recouvrement de Chech fini par des ouverts affinoides quasi-compacts de $U$, il en résulte que $\mathrm{H}^i(U, VB(\mathscr{F}))$ est une représentation lisse. $\square$

3.3. **Le foncteur $\tilde{VB}$.** Il est parfois plus simple de travailler sur $X_{K^p}$. On définit donc une variante du foncteur précédent :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{VB} : \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U) & \to & \mathbf{Mod}(\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_U) \\ \mathscr{F} & \mapsto & \mathrm{colim}_{K_p} \left(\pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}\right)^{K_p} \end{array}$$

On va démontrer

**Theorem 3.7.** *(1) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ est un faisceau localement libre de rang fini de $\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_U$-modules.*

*(2) Supposons que $U$ est quasi-compact. Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, il existe un sous-groupe compact ouvert $K_p$ et un ouvert $U_{K_p} \subseteq X_{K_p K^p}$ tel que $\pi_{K_p}^{-1}(U_{K_p}) = \pi_{HT}^{-1}(U)$, et un faisceau localement libre canonique de $\mathscr{O}_{U_{K_p}}$-modules, noté $\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F})$ muni d'un isomorphisme canonique*

$$\tilde{VB}(\mathscr{F}) = \tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{U_{K_p}}} \mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}.$$

*(3) Pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^\circ}$, on a*

$$\tilde{VB}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K_p}}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U = \pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U$$

*et le foncteur $\tilde{VB}$ restreint à la catégorie $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^\circ}$ est exact.*

*(4) Le foncteur $\tilde{VB}$ est dérivable, et pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$, on a $\mathrm{R}^i\tilde{VB}(\mathscr{F}) = \tilde{VB}(\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}))$.*

**Lemme 3.8.** *Le théorème 3.7 implique le théorème 3.3.*

*Démonstration.* On démontre que $VB(\mathscr{F}) = (\pi_{HT})_\star \tilde{VB}(\mathscr{F})$. En effet, on trouve que

$$\begin{aligned} &(\pi_{HT})_\star \mathrm{colim}_{K_p} \left(\pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}\right)^{K_p} = \\ &\mathrm{colim}_{K_p} \left((\pi_{HT})_\star \left(\pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}\right)\right)^{K_p} \end{aligned}$$

et la formule de projection donne un isomorphisme

$$(\pi_{HT})_\star(\pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(U)}) \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_U} \hat{\mathscr{O}}|_U$$

qui induit un isomorphisme $(\pi_{HT})_\star \tilde{VB}(\mathscr{F}) = VB(\mathscr{F})$. Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^\circ}$. Appliquons le foncteur $(\pi_{HT})_\star$ a l'identité

$$\tilde{VB}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K_p}}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U = \pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U.$$

Comme $\tilde{VB}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K_p}}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U = \pi_{HT}^{-1} VB(\mathscr{F}) \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}^{sm}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U$ la formule de projection implique que :

$$(\pi_{HT})_\star \tilde{VB}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K_p}}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U = VB(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}|_U} \hat{\mathscr{O}}|_U.$$

Il en résulte que

$$VB(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}^{sm}|_U}\hat{\mathscr{O}}|_U \to \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_U}\hat{\mathscr{O}}|_U$$

est un isomorphisme.

On voit similairement que $(\pi_{HT})_\star \tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F}) = VB_{K_p}(\mathscr{F})$. Le dernier point suit de l'exactitude de $(\pi_{HT})_\star$. $\square$

3.4. **Rationalité et opérateur de Sen arithmétique.** On a pour l'instant considéré la variété de drapeau et les courbes modulaires sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$. Comme le corps reflexe de la variété de Shimura est $\mathbb{Q}$, on peut travailler au dessus d'une extension finie $L$ de $\mathbb{Q}_p$. Notons $G_L = \mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. On note $\mathcal{FL}_L$ la variété de drapeaux sur $\mathrm{Spa}(L, \mathcal{O}_L)$. On note $X_{K_pK^p,L}$ la courbe modulaire sur $\mathrm{Spa}(L, \mathcal{O}_L)$. On note $X_{K^p,L} = \lim_{K_p} X_{K_pK^p,L}$ la courbe modulaire perfectoide. Notons que l'accouplement de Weil fournit un morphisme structural $X_{K^p,L} \to \mathrm{Spa}(L^{cycl}, \mathcal{O}_{L^{cycl}})$. On a $X_{K^p} = \lim_L X_{K^p,L}$. Il en résulte que $\hat{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}_{X_{K^p}}$ possèdent une action semi-linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$, qui commute avec l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $U$ un ouvert de $\mathcal{FL}_L$ et soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. Par construction, $VB(\mathscr{F})$ et $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ ont une action semi-linéaire de $G_L$. D'après le théorème 3.7, $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ provient d'un faisceau localement libre $\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F})$ sur $X_{K_pK^p}$. On peut donc appliquer la théorie de Sen "classique" de [BC16] au morphisme profini étale $X_{K_pK^p} \to X_{K_pK^p,L}$ de groupe de Galois $G_L$, et on possède un opérateur $\Theta_{sen} \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{X_{K^pK_p}}}(\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F}))$. En poussant via $\pi_{HT}$, on écrit aussi abusivement $\Theta_{sen} \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}^{sm}}(VB(\mathscr{F}))$. Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$, on possède une action du Cartan horizontal $\mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathcal{FL}}}(\mathscr{F})$ qui induit par fonctorialité un action sur $VB(\mathscr{F})$.

**Theorem 3.9.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathcal{FL}_L$ et soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$. On possède une action du Cartan horizontal $\mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}^{sm}}(VB(\mathscr{F}))$. Alors $(1,0) \in \mathfrak{h}$ s'envoie sur $\Theta_{sen} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}^{sm}}(VB(\mathscr{F}))$.*

*Remarque* 3.10. Si $\Theta_{sen} = 0$, alors le faisceau $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ descend en un faisceau $\tilde{VB}(\mathscr{F})_L$ sur $X_{K^p,L}$.

*Remarque* 3.11. Ce théorème est à rapprocher de [Pan22], thm 5.5.1. Il faut noter que dans cette référence la représentation standard de $\mathrm{GL}_2$ correspond à $T_pE^\vee$.

3.5. **Exemples.** On va illustrer ce théorème dans quelques exemples simples.

3.5.1. *Fibrés vectoriels automorphes.* On note $\mathcal{T}_{dR,K_p} \to X_{K_pK^p}$ le $T$-torseur des trivialisations de $\omega_{E^t} \oplus Lie(E)$. On note $\mathcal{T}_{HT} = U\backslash G \to \mathcal{FL}$ le $T$-torseur canonique sur $\mathcal{FL}$. L'isomorphisme

$$\pi_{HT}^\star(0 \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(-1;1)} \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{C}_p} St \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(1;1)} \to 0) =$$

$$0 \to \mathrm{Lie}(E)(1) \to T_pE \otimes \mathscr{O}_{X_{K^p}} \to \omega_{E^t} \to 0.$$

induit un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de $T$-torseurs sur $X_{K^p}$ :

$$\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K^p} = \mathcal{T}_{HT} \times_{\mathcal{FL}} X_{K^p}$$

*Remarque* 3.12. L'isomorphisme

$$\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K^p} = \mathcal{T}_{HT} \times_{\mathcal{FL}} X_{K^p}$$

n'est pas $G_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant, à cause du twist de Tate dans la suite exacte de Hodge-Tate. On note $\mu$ le cocaractère de Hodge, donné par $\mu(t) = \mathrm{diag}(t,1)$. On considère le $\mathbb{Z}_p^\times$-torsor $\mathbb{Z}_p(1)$. On a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)\times G_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant :

$$\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K^p} = \mathbb{Z}_p(1) \times^{\mu,\mathbb{Z}_p^\times} \mathcal{T}_{HT} \times_{\mathcal{FL}} X_{K^p}\,{}^{6}.$$

Le $T$-torseur $\mathcal{T}_{dR,K_p}$ induit une application

$$\begin{array}{rcl} X^\star(T) & \to & \mathbf{Coh}(X_{K_pK^p}) \\ \kappa & \mapsto & \omega^\kappa_{K_p} \end{array}$$

normalisée par la formule

$$\omega^\kappa_{K_p} \otimes_{\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}} = \mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}.$$

*Remarque* 3.13. Ainsi $\omega^\kappa_{K_p}$ est "le faisceau des formes modulaires de poids $\kappa$" sur $X_{K_pK^p}$. Plus précisément, soit $\omega_E$ le faisceau conormal du schéma semi-abélien universel sur $X_{K_pK^p}$. On a $\omega_E = \omega^{(1;-1)}_{K_p}$ et $\omega_E^{\otimes k} = \omega^{(k;-k)}_{K_p}$.

Notons $\omega^{\kappa,sm} = \mathrm{colim}_{K_p}\omega^\kappa_{K_p}$. On déduit :

**Corollaire 3.14.** *On a* $\tilde{VB}(\mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}}) = \omega^{\kappa,sm}$.

On note aussi $VB(\mathscr{O}^\kappa_{\mathcal{FL}}) = \omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}} = (\pi_{HT})_\star\omega^{\kappa,sm}$. On possède alors un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{FL},\omega^{\kappa,sm}_{\mathcal{FL}}) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^i(X_{K_pK^p},\omega^\kappa_{K_p}) = \mathrm{H}^i(X_{K^p},\omega^{\kappa,sm}).$$

3.5.2. *Systèmes locaux et décomposition de Hodge-Tate.* Soit $\kappa \in X^\star(T)^+$ un poids $B$-dominant. Soit $V_\kappa$ la représentation de $G$ de plus haut poids $\kappa$. Notons $\mathcal{V}_{\kappa,K_p}$ le système local dans la topologie pro-Kummer étale induit sur $X_{K_pK^p}$. Notons $\mathcal{V}_\kappa$ le système local sur $X_{K^p}$. On a

$$\mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma(K_p,\mathrm{R}\Gamma_{proket}(X_{K^p},\mathcal{V}_\kappa)) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma_{proket}(X_{K_pK^p},\mathcal{V}_{K_p,\kappa}).$$

On voit facilement que :

$$\begin{array}{rcl} (V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}})^{\mathfrak{n}^0} & = & \mathscr{O}^{\omega_0\kappa} \\ (V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}})_{\mathfrak{n}^0} & = & \mathscr{O}^\kappa\otimes(\mathfrak{n}^0)^\vee. \end{array}$$

On rappelle l'isomorphisme de Kodaira-Spencer :

$$KS : \tilde{VB}((\mathfrak{n}^0)^\vee) = \mathrm{colim}_{K_p}\Omega^1_{X_{K_pK^p}}(\log(cusp)).$$

Donc $\tilde{VB}(\mathscr{O}^{\omega_0\kappa}) = \omega^{\omega_0\kappa,sm}$, $\tilde{VB}(\mathscr{O}^\kappa\otimes(\mathfrak{n}^0)^\vee) = \omega^{\kappa,sm}\otimes\tilde{VB}((\mathfrak{n}^0)^\vee)$.

On observe que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{colim}_{K_p}(\mathrm{R}\Gamma_{proket}(X_{K_pK^p},V_{\kappa,et})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p) & = & \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma\big(K_p,\mathrm{R}\Gamma_{proket}(X_{K^p},\mathcal{V}_\kappa)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p\big) \\ & = & \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma(K_p,\mathrm{R}\Gamma_{proket}(X_{K^p},V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{X_{K^p}})) \\ & = & \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma(K_p,\mathrm{R}\Gamma_{an}(X_{K^p},V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{X_{K^p}})) \end{array}$$

d'après le théorème de comparaison primitif de [Sch13]. On a donc :

$$\mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{R}\Gamma(K_p,\mathrm{R}\Gamma_{an}(X_{K^p},V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{X_{K^p}})) = \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{FL},\mathrm{R}VB(V_\kappa\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}))$$

6. On fait agir $\mathbb{Z}_p^\times$ via $\mu$ sur $\mathcal{T}_{HT}$. On note $\mathbb{Z}_p(1)\times^{\mu,\mathbb{Z}_p^\times}\mathcal{T}_{HT}$ le quotient de $\mathbb{Z}_p(1)\times\mathcal{T}_{HT}$ par l'action diagonale de $\mathbb{Z}_p^\times$.

et il résulte du théorème 4.4.1 de [Gro57] et du théorème 3.7 qu'on possède une suite exacte (de Hodge-Tate) :

$$0 \to \mathrm{H}^1(X_{K^p}, \omega^{w_0\kappa, sm}) \to \mathrm{colim}_{K_p}(\mathrm{H}^1_{proket}(X_{K_pK^p}, \mathcal{V}_{\kappa, K_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p)$$
$$\to \mathrm{H}^0(X_{K^p}, \omega^{\kappa, sm} \otimes \tilde{VB}((\mathfrak{n}^0)^\vee)) \to 0.$$

*Remarque* 3.15. Si $\kappa = (k; w) \in X^\star(T)^+$, il résulte du théorème 3.9 que $\mathrm{H}^1(X_{K^p}, \omega^{w_0\kappa, sm})$ a poids de Hodge-Tate $-\frac{k+w}{2}$ et $\mathrm{H}^0(X_{K^p}, \omega^{\kappa, sm} \otimes \tilde{VB}((\mathfrak{n}^0)^\vee))$ a poids de Hodge-Tate $1 + \frac{w-k}{2}$ [7].

3.5.3. *Formes modulaires surconvergentes.* D'après la section 2.3.2, pour tout caractère $\kappa \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$, on possède un faisceau $\mathscr{O}^\kappa_{U_{w_0}} \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))}(U_{w_0})$ et un faisceau $\mathscr{O}^\kappa_\infty \in \mathbf{Coh}_{(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty})$. On note :

$$\begin{aligned} \omega^{\kappa, sm}_{U_{w_0}} &= VB(\mathscr{O}^\kappa_{U_{w_0}}) \\ \omega^{\kappa, sm}_\infty &= VB(\mathscr{O}^\kappa_\infty) \end{aligned}$$

**Lemme 3.16.** *Les groupes de cohomologie* $\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa, sm}_{U_{w_0}})$ *et* $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{\kappa, sm}_\infty)$ *sont des représentations localement analytiques de* $B(\mathbb{Q}_p)$ *de poids respectifs* $-\kappa$ *et* $-w_0\kappa$ *(c'est à dire que l'action de* $\mathfrak{b}$ *se factorise à travers les caractères* $-\kappa$ *et* $-w_0\kappa$*) .*

*Démonstration.* Fixons un caratère $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C}_p^\times$ de differentielle $\mathrm{d}\chi = \kappa \in X^\star(T)$. On voit d'après la remarque 2.19 que $\mathscr{O}^\kappa_{U_{w_0}} \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi)$ est un objet fortement $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-équivariant et donc sa cohomologie est une représentation lisse d'après le lemme 3.6. Il en va de même pour $\mathscr{O}^\kappa_\infty \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(w_0\chi)$ □

Nous allons maintenant faire le lien avec les espaces de formes surconvergentes classiques de [Col96]. Prenons $K_p$ le sous-groupe d'Iwahori. Soit $X^{ord,m}_{K_pK^p}$ le lieu ordinaire-multiplicatif de $X_{K_pK^p}$. Soit $\chi$ un caractère $T(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{C}_p^\times$. Sur le dagger space $X^{ord,m,\dagger}_{K_pK^p}$, on possède un faisceau des formes surconvergentes de poids $\chi$ ([Pil13], [AIS14]) : $\omega^{\chi,\dagger}_{K_p}$. On note $M^\dagger_\chi = \mathrm{H}^0(X^{ord,m,\dagger}_{K_pK^p}, \omega^{\chi,\dagger}_{K_p})$, l'espace des formes surconvergentes de poids $\kappa$. Cet espace est muni d'un opérateur $U_p$. On peut étendre $\chi$ en un caractère de $T(\mathbb{Q}_p)$ en posant $\chi(\mathrm{diag}(p,1)) = \chi(\mathrm{diag}(1,p)) = 1$. Posons $\kappa = \mathrm{d}\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.

**Proposition 3.17.** *On a*

$$\left(\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{\kappa, sm}_\infty) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\omega_0\chi)\right)^{B(\mathbb{Z}_p)} = M^\dagger_\chi$$

*et* $U_p = B(\mathbb{Z}_p)\mathrm{diag}(1, p^{-1})B(\mathbb{Z}_p)$.

*Démonstration.* Le faisceau $\omega^{\chi,\dagger}_{K_p}$ provient d'un faisceau inversible $\omega^\chi_{K_p}$ sur un voisinage strict $U_{K_p}$ de $X^{ord,m}_{K_pK^p}$. On rappelle que $\pi_{K_p}(\pi^{-1}_{HT}(\{\infty\})) = \overline{X^{ord,m}_{K_pK^p}} \subseteq U_{K_p}$ et que $M^\dagger_\chi = \mathrm{H}^0(\overline{X^{ord,m}_{K_pK^p}}, \omega^\chi_{K_p})$. Par construction, on possède un isomorphisme $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\omega^\chi_{K_p} \otimes_{\mathscr{O}_{U_{K_p}}} \mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_{\pi^{-1}_{HT}(\infty)} = \omega^{\kappa, sm}_\infty \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(w_0\chi) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}} \mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}$$

□

7. Par convention, le caractère cyclotomique a poids de Hodge-Tate $-1$.

Sur le dagger space $X^{ord,et,\dagger}_{K_pK^p}$, on possède un faisceau des formes surconvergentes de poids $\chi$ : $\omega^{\chi,\dagger}_{K_p}$ (voir [BP20]). On note $N^\dagger_\chi = \mathrm{H}^1_c(X^{ord,et,\dagger}_{K_pK^p}, \omega^{\chi,\dagger}_{K_p})$. Cet espace est muni d'un opérateur $U_p$ qui est compact. Utilisons l'exposant $fs$ pour désigner la partie de pente finie pour l'opérateur $U_p$.

**Proposition 3.18.** *On possède un isomorphisme :*

$$(\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi))^{B(\mathbb{Z}_p),fs} \to N^{\dagger,fs}_\chi$$

*et* $U_p = B(\mathbb{Z}_p)\mathrm{diag}(1, p^{-1})B(\mathbb{Z}_p)$.

*Démonstration.* On a $\pi_{K_p}(U_{w_0}) = X_{K_pK^p} \setminus \overline{X^{ord,m}_{K_pK^p}}$. On possède un voisinage strict $V_{K_p}$de $X^{ord,et}_{K_pK^p}$ et un faisceau $\omega^\chi_{K_p}$ sur $V_{K_p}$ tel que

$$\omega^\chi_{K_p} \otimes_{\mathscr{O}_{V_{K_p}}} \mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_{\pi^{-1}_{K_p}(V_{K_p})} = \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}} \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}} \mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}|_{\pi^{-1}_{K_p}(V_{K_p})}.$$

On possède donc un morphisme $N^\dagger_\chi \to \mathrm{H}^1_c(V_{K_p}, \omega^\chi_{K_p}) \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}})$ et il est clair que ce morphisme se factorise à travers $(\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi))^{B(\mathbb{Z}_p)}$. Notons $K_{p,n}$ le sous-groupe de $K_p$ des éléments qui sont dans le Borel modulo $p^n$. Notons $V_{K_{p,n}}$ l'image inverse de $V_{K_p}$ dans $X_{K_{p,n}K^p}$. On voit que le morphisme : $\mathrm{colim}_n \mathrm{H}^1_c(V_{K_p,n}, \omega^\chi_{K_{p,n}}) \to (\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{\kappa,sm}_{U_{w_0}}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi))^{B(\mathbb{Z}_p)}$ est un isomorphisme sur la partie de pente finie en utilisant un argument de prolongement analytique. On voit que le morphisme $\mathrm{H}^1_c(V_{K_p}, \omega^\chi_{K_p}) \to \mathrm{colim}_n \mathrm{H}^1_c(V_{K_p,n}, \omega^\chi_{K_{p,n}})$ est un isomorphisme sur la partie de pente finie (en utilisant que $U_p$ décroit le niveau en $p$). On voit finalement que $N^\dagger_\chi \to \mathrm{H}^1_c(V_{K_p}, \omega^\chi_{K_p})$ induit un isomorphisme sur la partie de pente finie en utilisant un argument de prolongement analytique. □

3.6. **Preuve du théorème.** Cette section est dédiée à la preuve du théorème 3.7. On fixe donc $\mathscr{F}$, un objet de $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$.

3.6.1. *Un lemme péliminaire.*

**Lemme 3.19.** *Pour tout ouvert affinoide* $V = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ *de* $U$ *tel que* $\mathscr{F}|_V$ *soit libre, il existe un sous* $C^+$*-module libre et ouvert* $\mathscr{F}(V)^+ \subseteq \mathscr{F}(V)$*, et un sous-groupe ouvert* $H_V$ *de* $G$ *tel que l'action de* $\hat{G}$ *s'étende en une action* $\rho : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{H_V}$*, et telle que* $\rho|_{\mathscr{F}(V)^+} : \mathscr{F}(V)^+ \to \mathscr{F}(V)^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}^+_{H_V}$*. De plus, il existe un sous-groupe compact ouvert* $K_p \subseteq H_V(\mathbb{Q}_p)$ *dépendant uniquement de* $H_V$ *tel que l'action de* $K_p$ *sur* $\mathscr{F}(V)^+/p\mathscr{F}(V)^+$ *soit triviale.*

*Démonstration.* Soit $V = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ un ouvert affinoide de $U$. Posons $F = \mathscr{F}(V)$, c'est un $C$-module libre. D'après la proposition 2.9, il existe un sous-groupe ouvert affinoide $H$ de $G$ tel que $F$ est un $H$-comodule.

Pour fixer les idées, on va supposer que $H = G_m$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et donc $\mathscr{O}_{G_m} = \mathbb{C}_p\langle p^{-m}X_1, p^{-m}X_2, p^{-m}X_3, p^{-m}X_4\rangle$ (où l'élément universel de $G_m$ est $1 + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$). On possède donc pour tout $r \geq m$ des morphisms $\rho_{F,r} : F \to F \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{G_r}$ qui sont compatibles avec le morphisme $\rho_{C,r} : C \to C \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{G_r}$ (et tous induits par le morphisme $\rho_{F,m}$). On observe que $\rho_{C,m}(C^+) \subseteq C^+ \hat{\otimes} \mathscr{O}^+_{G_m}$ Considérons une base $v_1, \cdots, v_t$ du $C$-module $F$ et notons $F^+ = \oplus C^+ v_i$. Pour tout $v \in F$, on a $\rho_{F,m}(v) = \sum_{(i,j,k,l)\in\mathbb{Z}^4_{\geq 0}} v_{i,j,k,l} p^{-m(i+j+k+l)} X_1^i X_2^j X_3^k X_4^l$ où $v_{0,0,0,0} = v$ et il existe $s_v \geq 0$ tel que $v_{i,,j,k,l} \in p^{-s_v} F^+$. On déduit donc qu'il existe $r \geq m$ tel que

$\rho_{F,r}(F^+) \subseteq F^+ \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \mathscr{O}^+_{G_r}$ (par exemple $r = m + \max\{s_{v_i}, i = 1, \cdots, t\}$). De plus, on voit que si on prend $K_p = G_{r+1}(\mathbb{Q}_p)$ alors l'action de $K_p$ sur $\mathscr{F}(V)^+/p\mathscr{F}(V)^+$ est triviale. □

3.6.2. *Le méthode de Sen.* Soit $K_p$ un sous-groupe ouvert compact. Soit $W_{K_p} = \mathrm{Spa}(B_{K_p}, B^+_{K_p}) \hookrightarrow X_{K_pK^p}$ un ouvert. Pour tout $K'_p \subseteq K_p$ on pose $W_{K'_p} = \mathrm{Spa}(B_{K'_p}, B^+_{K'_p}) = W_{K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K'_pK^p}$.

On suppose que $B_{K_p}$ est *petit*. Cela signifie :

(1) Dans le cas où $W_{K_p}$ ne rencontre pas de pointes, on possède un morphisme $\mathbb{C}_p\langle T^{\pm 1}\rangle \to B_{K_p}$ qui est un composé de morphismes finis étales et d'inclusion d'ouverts rationnels.

(2) Dans le cas où $W_{K_p}$ rencontre les pointes, on possède un morphisme $\mathbb{C}_p\langle T\rangle \to B_{K_p}$ qui est un composé de morphismes finis étales et d'inclusion d'ouverts rationnels tel que $T = 0$ soit le diviseur des pointes dans $W_{K_p}$.

On vérifie sans peine que $X_{K_pK^p}$ possède une base d'ouverts affinoides petits. On rappelle maintenant la construction de la double tour $\{B_{K'_p,n}\}$ de [Pan22], sect. 3.2.

On note $R_n = \mathbb{C}_p\langle T^{\pm p^{-n}}\rangle$ dans le cas 1) et $R_n = \mathbb{C}_p\langle T^{p^{-n}}\rangle$ dans le cas 2) et $R_\infty = \mathbb{C}_p\langle T^{\pm p^{-\infty}}\rangle$ dans le cas 1) et $R_\infty = \mathbb{C}_p\langle T^{p^{-\infty}}\rangle$ dans le cas 2). On note $\Gamma = \mathbb{Z}_p(1)$. Le groupe $\Gamma$ agit naturellement sur $R_\infty$, via $(\zeta_{p^n}).T^{1/p^n} = \zeta_{p^n}T^{1/p^n}$. On fixe un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \simeq \Gamma$.

Pour tout $K'_p \subseteq K_p$, on construit $B_{K'_p,n}$, le normalisé de $B_{K'_p}\hat{\otimes}_{R_0}R_n$ (dans le cas 1) le produit tensoriel est déjà normal) et $B_{K'_p,\infty}$ est la complétion de $\mathrm{colim}_n B_{K'_p,n}$ pour la norme spectrale. Cela signifie que $B_{K'_p,\infty} = \widehat{\mathrm{colim}_n B^+_{K'_p,n}}[1/p]$. On pose $B_n$ la completion de $\mathrm{colim}_{K'_p} B_{K'_p,n}$ et $B_\infty$ la completion de $\mathrm{colim}_{n,K'_p} B_{K'_p,n}$ (pour la norme spectrale). D'après le lemme d'Abhyankar ([DLLZ19], lem. 4.2.2, 4.2.3), $B_{K_p,\infty} \to B_{K'_p,\infty}$ est finie étale, et $B_n \to B_m$ (pour $m \geq n$) est aussi finie étale.

On note $B^+_\infty$ le sous-anneau de $B_\infty$ des éléments à puissance bornée. Les anneaux $B^+_\infty$ et $B_\infty$ sont munis d'une action de $K_p \times \Gamma$.

**Proposition 3.20.** *Soit $0 < c < 1$. Soit $M$ un $B^+_\infty$ module libre de rang fini, muni d'une action semi-linéaire de $K_p \times \Gamma$. On suppose qu'il existe un base $(f_1, \cdots, f_n)$ de $M$ telle que $\sigma f_i - f_i \in pM$ pour tout $\sigma \in K_p \times \Gamma$. Alors il existe une constante $n(K_p, c)$ (qui ne dépend pas de $M$ mais qui dépend de la double tour $\{B_{K'_p,n}\}_{K'_p,n}$) tels que pour tout $n \geq n(K_p, c)$, on possède un unique $B^+_{K_p,n}$-module libre $D^+_{K_p,n}(M)$, qui est un sous-module de $M$ et tel que*

*(1) $D^+_{K_p,n}(M)$ est invariant sous $K_p$, et stable sous l'action de $\Gamma$,*

*(2) Le morphisme $B^+_\infty \otimes_{B^+_{K_p,n}} D^+_{K_p,n}(M) \to M$ est un isomorphisme $K_p \times \Gamma$-équivariant,*

*(3) il existe une base $\mathcal{B}$ de $D^+_{K_p,n}(M)$ tel que $(\gamma - 1)(\mathcal{B}) \subseteq p^c D^+_{K_p,n}(M)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

*Démonstration.* La tour $\{B_{K'_p,n}\}_{K'_p,n}$ vérifie les conditions de Tate-Sen ([BC08], def. 3.1.3) d'après [Pan22], sect. 3.2. On peut donc appliquer [BC08], prop. 3.2.6. □

Pour $K'_p \subseteq K_p$ et $m \geq n$, on a $D^+_{K'_p,m}(M) = D^+_{K_p,n}(M) \otimes_{B^+_{K_p,n}} B^+_{K'_p,m}$. On pose $D_{K'_p,m}(M) = D^+_{K'_p,m}(M)[1/p]$. L'action de $\Gamma$ est localement analytique sur

$D_{K_p,n}(M)$ d'après le point (3) de la proposition 3.20. On note $\Theta_M \in \mathrm{End}_{B_{K_p,n}}(D_{K_p,n}(M))$ l'opérateur de Sen donné par la formule $\Theta_M(f) = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\gamma f - f}{\gamma}$. C'est un endomorphisme qui commute à l'action de $\Gamma$.

3.6.3. *Application de la théorie de Sen à $\mathscr{F}$.* Soit $V = \mathrm{Spa}(C, C^+) \subseteq U \subseteq \mathcal{FL}$ un ouvert quasi-compact qui est stable sous l'action d'un sous-groupe ouvert $H$ de $G$. Posons $F = \mathscr{F}(V)$, c'est un $C$-modules. Quitte à rapetisser $V$, on peut supposer $F$ libre. Il résulte du lemme 3.19 qu'on possède un sous $C^+$-module libre $F^+$ de $F$ qui engendre $F$ et un sous-groupe compact ouvert $K_p$ assez petit qui preserve $F^+$ et qui agit trivialement sur $F^+/pF^+$. Considérons un ouvert quasi-compact $W = \mathrm{Spa}(B, B^+) \subseteq \pi_{HT}^{-1}(V)$ qui est affinoide perfectoide. Quitte à rapetisser $K_p$, on peut supposer que $W = \pi_{K_p}^{-1}(W_{K_p})$ avec $W_{K_p} = \mathrm{Spa}(B_{K_p}, B_{K_p}^+)$. Pour tout $K_p' \subseteq K_p$ on pose $W_{K_p'} = \mathrm{Spa}(B_{K_p'}, B_{K_p'}^+) = \pi_{K_p'}(W)$. On peut supposer (en remplaçant $W_{K_p}$ par un ouvert rationnel) que $B_{K_p}$ est *petit*. On peut appliquer la théorie de Sen rappelée au numéro 3.6.2 à la représentation semi-linéaire de $K_p \times \Gamma$ : $B_\infty^+ \otimes_{C^+} F^+$.

**Lemme 3.21.** *Fixons une constante $0 < c < 1$. Pour tout $n \geq n(K_p, c)$, on possède un unique $B_{K_p,n}^+$-module libre $D_{K_p,n}^+(F)$, qui est un sous-module de $B_\infty \otimes_C F$ et tel que*

*(1) $D_{K_p,n}^+(F)$ est fixé par $K_p$ et stable sous $\Gamma$,*

*(2) Le morphisme $B_\infty^+ \otimes_{B_{K_p,n}^+} D_{K_p,n}^+(F) \to B_\infty^+ \otimes_{C^+} F^+$ est un isomorphisme $K_p \times \Gamma$-équivariant,*

*(3) il existe une base $\mathcal{B}$ de $D_{K_p,n}^+(F)$ tel que $(\gamma - 1)(\mathcal{B}) \subseteq p^c D_{K_p,n}^+(F)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

*Démonstration.* On applique la proposition 3.20 à $M = B_\infty^+ \otimes_{C^+} F^+$ et on pose $D_{K_p,n}^+(F) := D_{K_p,n}^+(M)$ dans les notations de la proposition. □

L'action de $\Gamma$ est localement analytique, donc on possède un opérateur de Sen $\Theta_F \in \mathrm{End}_{B_{K_p,n}}(D_{K_p,n}(F))$ (et par extension dans $\mathrm{End}_{B_{K_p,n'}}(D_{K_p,n'}(F))$ pour tout $n' \geq n$) qui commute avec l'action de $\Gamma$. Etudions d'avantage l'opérateur $\Theta_F$. On a $\Theta_F \in \mathrm{End}_{B_{K_p,n}}(D_{K_p,n}(M)) \to \mathrm{End}_{B_\infty}(B_\infty \otimes_C F)$. Comme $\Theta_F$ commute avec l'action de $\Gamma \times K_p$, on peut aussi voir

$$\Theta_F \in (\tilde{B} \otimes_C F \otimes_C F^\vee)^{K_p}.$$

**Corollaire 3.22.** *La méthode de Sen nous permet de construire un recouvrement ouvert $\pi_{HT}^{-1}(U) = \cup W_i$ et pour chaque $W_i$, un opérateur de Sen $\Theta_i \in \tilde{VB}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}^\vee)(W_i)$.*

A la proposition 3.34 on va déterminer l'opérateur de Sen.

**Lemme 3.23.** *On a $\mathrm{H}^i(K_p, B \otimes_C F) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F)))$.*

*Démonstration.* On va montrer la suite d'isomorphismes (pour tout $n'$ assez grand) :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(K_p, B \otimes_C F) &= \mathrm{H}^i(\Gamma \times K_p, B_\infty \otimes_C F) \\ &= \mathrm{H}^i(\Gamma, (B_\infty \otimes_C F)^{K_p}) \\ &= \mathrm{H}^i(\Gamma, D_{K_p,n'}(F)) \\ &= \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F)) \end{aligned}$$

L'isomorphisme $\mathrm{H}^i(K_p, B\otimes_C F) = \mathrm{H}^i(\Gamma\times K_p, B_\infty\otimes_C F)$ se déduite de $\mathrm{H}^i(\Gamma, B_\infty) = 0$ si $i > 0$ et $\mathrm{H}^0(\Gamma, B_\infty) = B$ qui résulte de la presque pureté ([Sch12]) appliquée à $B \to B_\infty$. L'isomorphisme $\mathrm{H}^i(\Gamma \times K_p, B_\infty \otimes_C F) = \mathrm{H}^i(\Gamma, (B_\infty \otimes_C F)^{K_p})$ résulte de $\mathrm{H}^i(K_p, B_\infty \otimes_C F) = 0$ si $i > 0$ qui résulte de la presque pureté pour l'extension $B_{K_p,\infty} \to B_\infty$. On montre l'isomorphisme $\mathrm{H}^i(\Gamma, (B_\infty \otimes_C F)^{K_p}) = \mathrm{H}^i(\Gamma, D_{K_p,n}(F))$ en suivant la méthode du lemme 3.6.6 de [Pan22]. On a $(B_\infty \otimes_C F)^{K_p} = B_{K_p,\infty} \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(F)$. Il existe $m \geq 1$ tel que $(\gamma - 1)^m D^+_{K_p,n}(F) \subseteq pD^+_{K_p,n}(F)$. On possède des traces de Tate : $\mathrm{Tr}_{n'} : B_{K_p,\infty} \to B_{K_p,n'}$ pour tout $n'$ assez grand qui ont la propriété que $\gamma - 1$ est inversible sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{n'})$ et $|(\gamma - 1)^{-1}| \leq p^{\frac{1}{2m}}$. Il suffit de démontrer que $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{n'}) \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(F)) = 0$. Soit $a \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{n'}) \cap B^+_{K_p,\infty}$. Soit $b \in D^+_{K_p,n}(F)$. Soit $c = (\gamma - 1)^{-1}pa$. On vérifie que la série $\sum_{\ell\geq 0}(\gamma^{-1} - 1)^{-\ell}(c) \otimes (\gamma - 1)^{\ell}(b)$ converge vers un élément $x$ dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{n'}) \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(F)$ et que $(\gamma - 1)x = pa \otimes b$. On a $\mathrm{H}^i(\Gamma, D_{K_p,n'}(F)) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F))$ car le foncteur des $\Gamma$-invariants est exact sur la catégorie des représentations lisses de $\Gamma$. □

3.6.4. *Fonctorialité du module de Sen.* Etudions la fonctorialité en l'ouvert $W$. Soit $W' = \mathrm{Spa}(B', (B')^+) \subseteq W$ un ouvert rationnel.

On a $W' = (\pi_{K'_p})^{-1}(W'_{K'_p}) = \mathrm{Spa}(B'_{K'_p}, (B'_{K'_p})^+)$ pour tout compact ouvert $K'_p \subseteq K_p$ assez petit. On définit $B'_{K'_p,n}$, $B'_{K'_p,\infty}$, $B'_\infty$ comme précédemment. On possède une constante $n'(K'_p, c)$ et pour tout $n \geq n'(K'_p, c)$ un module $D'_{K'_p,n}(F) \subseteq B'_\infty \otimes_C F$.

**Lemme 3.24.** *Pour $n \geq \max\{n(K_p, c), n'(K'_p, c)\}$, le morphisme naturel*

$$B'_{K'_p,n} \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(F) \to D'_{K'_p,n}(F)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Cela résulte de l'unicité dans le lemme 3.21.

□

**Corollaire 3.25.** *Les faisceaux $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{R}^1\tilde{VB}(\mathscr{F})$ sont cohérents.*

*Démonstration.* Avec les notations précédentes, on a $\tilde{VB}(\mathscr{F})(V) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^0(\Gamma, D_{K_p,n}(F)^{\Theta_F})$ et $\mathrm{R}^1\tilde{VB}(\mathscr{F})(V) = \mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^0(\Gamma, D_{K_p,n}(F)_{\Theta_F})$. Le morphisme $B_{K_p,n} \to B'_{K'_p,n}$ est plat, donc l'isomorphisme

$$B'_{K'_p,n} \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(F) \to D_{K'_p,n}(F)$$

induit des isomorphismes

$$B'_{K'_p,n} \otimes_{B_{K_p,n}} \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n}(F)) \to \mathrm{H}^i(\Theta_F, D'_{K'_p,n}(F)).$$

Le corollaire en résulte facilement. □

Etudions la fonctorialité en le faisceau $\mathscr{F}$. On travaille toujours sur un ouvert $W$ de $X_{K_pK^p}$ comme dans la section 3.6.3. On se donne deux faisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dans $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$ et pour $K_p$ assez petit, et $n \geq n(K_p, c)$ on possède leurs modules de Sen respectifs (sur l'ouvert $W$), $D_{K_p,n}(F)$ et $D_{K_p,n}(G)$.

**Lemme 3.26.** *(1) Supposons qu'on a un morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ dans $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. Alors, pour tout $K_p$ assez petit et $n \geq n(K_p, c)$, on possède un morphisme naturel $D_{K_p,n}(F) \to D_{K_p,n}(G)$ qui est $K_p \times \Gamma$-équivariant.*

(2) *Supposons qu'on a deux objets $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dans $\mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$. Alors, pour tout $K_p$ assez petit et $n \geq n(K_p, c)$, on possède un isomorphisme naturel $D_{K_p,n}(F) \otimes_{B_{K_p,n}} D_{K_p,n}(G) \to D_{K_p,n}(F \otimes G)$ qui est $K_p \times \Gamma$-équivariant. Si $\Theta_F$ et $\Theta_G$ sont les opérateurs de Sen sur $D_{K_p,n}(F)$ et $D_{K_p,n}(G)$, alors $\Theta_F \otimes 1 + 1 \otimes \Theta_G$ est l'opérateur de Sen sur $D_{K_p,n}(F \otimes F')$.*

*Démonstration.* Par construction [8], le module de Sen est fonctoriel en le morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$. Le second point résulte de l'unicité dans le lemme 3.21. □

3.6.5. *Objets de rang* 1. On étudie maintenant le foncteur $\tilde{VB}$ pour des objets de rang 1. On note $\mathcal{T}_{dR,K_p} \to X_{K_pK^p}$ le $T$-torseur des trivialisations de $\omega_{E^t} \oplus Lie(E)$. On note $\mathcal{T}_{HT} = U\backslash G \to \mathcal{FL}$ le $T$-torseur tautologique. On a vu à la section 3.5.1 et la remarque 3.12 qu'on possède un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \times G_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant :

$$\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K^p} = \mathbb{Z}_p(1) \times^{\mu,\mathbb{Z}_p^\times} \mathcal{T}_{HT} \times_{\mathcal{FL}} X_{K^p}.$$

Soit $x$ un point classique de $\mathcal{FL}$ (c'est à dire un point de corps résiduel $\mathbb{C}_p$). Soit $n \geq 0$. On rappelle qu'on possède un sous-groupe $G_n$ de $G$ des élements qui se réduisent sur 1 modulo $p^n$. On note $B_{x,n} = B_x \cap G_n$, $U_{x,n} = U_x \cap G_n$, $T_{x,n} = T_x \cap G_n$. Soit $xB_{x,n}\backslash G_n = V_x$ un voisinage du point $x$ (c'est la $G_n$-orbite de $x$). On possède un $T_{x,n}$-torseur qui est $G_n$-équivariant : $xU_{x,n}\backslash G_n \to V_x$. Notons le $\mathcal{T}_{HT,x,n}$. C'est une réduction de structure du torseur $\mathcal{T}_{HT}|_{V_x}$.

Il existe un ouvert $U_{K_p} \subseteq X_{K_pK^p}$ tel qu'on ait $\pi_{HT}^{-1}(V_x) = \pi_{K_p}^{-1}(U_{K_p})$ pour $K_p$ assez petit (il suffit $K_p \subseteq G_n(\mathbb{Q}_p)$).

**Lemme 3.27.** *Le torseur $\mathcal{T}_{dR,K_p}|_{U_{K_p}}$ possède une réduction de structure à un unique $T_{x,n}$-torseur $\mathcal{T}_{dR,K_p,n} \to U_{K_p}$ tel que l'isomorphisme*

$$\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{X_{K_pK^p}} X_{K^p} = \mathbb{Z}_p(1) \times^{\mu,\mathbb{Z}_p^\times} \mathcal{T}_{HT} \times_{\mathcal{FL}} X_{K^p}$$

*induise un isomorphisme $G_n(\mathbb{Q}_p) \times G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}$-équivariant :*

$$\mathcal{T}_{dR,K_p,n} \times_{U_{K_p}} \pi_{HT}^{-1}(V_x) = \mathbb{Z}_p(1) \times^{\mu,1+p^n\mathbb{Z}_p} \mathcal{T}_{HT,x,n} \times_{V_x} \pi_{HT}^{-1}(V_x)$$

*Démonstration.* On possède un ouvert (topologique) $|\mathcal{T}_{HT,x,n} \times_{V_x} \pi_{HT}^{-1}(V_x)| \hookrightarrow |\mathcal{T}_{dR,K_p} \times_{U_{K_p}} \pi_{HT}^{-1}(V_x)|$. Comme cet ouvert est $K_p$-invariant, il provient d'un ouvert $|\mathcal{T}_{dR,K_p,n}| \hookrightarrow |\mathcal{T}_{dR,K_p}|_{U_{K_p}}|$. On note $\mathcal{T}_{dR,K_p,n}$ l'espace adique associé à cette ouvert. On vérifie alors que cet espace est stable sous l'action de $T_{x,n}$ et que le morphisme $T_{x,n} \times \mathcal{T}_{dR,K_p,n} \to \mathcal{T}_{dR,K_p,n} \times T_{dR,K_p,n}$ est un isomorphisme. Pour le vérifier on peut changer de base à $X_{K^p}$ et c'est évident. □

**Corollaire 3.28.** *Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{G_n}(V_x)$ un objet de rang 1. Alors $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ est un faisceau inversible de $\mathscr{O}_{X_{K^p}}^{sm}|_{\pi_{HT}^{-1}(V_x)}$-modules. De plus, les opérateurs de Sen du corollaire 3.22 associés à $\mathscr{F}$ sont triviaux. L'opérateur de Sen arithmétique (voir la section 3.4) est donné par $(1,0) \in \mathfrak{h}$, agissant sur $\tilde{VB}(\mathscr{F})$.*

*Démonstration.* Le faisceau inversible $\mathscr{F}$ est associé, par la proposition 2.3, à une représentation de $B_{x,n}$ de rang 1 qui se factorise en un caractère $\chi : T_{x,n} \to \mathbb{G}_m^{an}$. En utilisant le torseur $\mathcal{T}_{dR,K_p,n}$, on peut associer à tout character $\chi$ de $T_{x,n}$ un

8. en effet, $D_{K_p,n}(F)$ est le sous-module de $B_\infty \otimes_C F$ des vecteurs $K_p$-invariants et $p^n\Gamma$-analytiques

faisceau inversible de $\mathscr{O}_{U_{K_p}}$-modules $\mathscr{F}_{\chi,K_p}$ et le lemme précédent implique qu'on possède un isomorphisme

$$\mathscr{F}_{\chi,K_p} \otimes_{\mathscr{O}_{U_{K_p}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(V_x)} = \pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_{V_x}} \mathscr{O}_{X_{K_p}}|_{\pi_{HT}^{-1}(V_x)}$$

qui est $K_p$-équivariant. Il en résulte que $\mathscr{F}_{\chi,K_p} = \tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F})$. Il est aussi évident que l'action de $\Gamma$ sur les modules de Sen du corollaire 3.22 associés à $\mathscr{F}$ est triviale (car le module de Sen est essentiellement $\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F})$). On note $\chi \circ \mu$ le composé de $G_{\mathbb{Q}_p}(\zeta_{p^n}) \overset{\chi_{cycl}}{\to} 1 + p^n\mathbb{Z}_p \overset{\mu}{\to} T_{x,n} \overset{\chi}{\to} \mathbb{C}_p^\times$. Soit $C$ l'extension de $\mathbb{Q}_p$ engendrée par l'image de $\chi \circ \mu$. On note $C((\chi\circ\mu)^{-1})$ le $C$-espace vectoriel de dimension 1 avec action linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}(\zeta_{p^n})$ via $(\chi\circ\mu)^{-1}$. Le faisceau $\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C((\chi \circ \mu)^{-1})$ descend en un faisceau inversible de $\mathscr{O}_{X_{K^pK_p,\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$-modules. Ainsi, l'opérateur de Sen arithmétique $\Theta_{sen}$ de $\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{F})$ est donné par la $\mathrm{d}\chi \circ \mu(1) = \mathrm{d}\chi(1,0)$. On remarque finalement que $d\chi$ donne l'action du Cartan horizontal. $\square$

3.6.6. *L'extension de Faltings.* L'extension de Faltings $FE$ ([Fal87], thm 2, (ii)) est une suite exacte $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariante [9] :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_{K_p}} \to FE \to \mathscr{O}_{X_{K^p}} \otimes \Omega^1_{X_{K_pK^p}}(\log(cusp)) \to 0.$$

En prenant la cohomologie de $K_p$, on récupère un isomorphisme :

$$\omega^1_{X_{K_pK^p}}(\log(cusp)) \to \mathrm{H}^1(K_p, (\pi_{K_p})_\star \mathscr{O}_{X_{K^p}}).$$

Notons $St$ la représentation standard de dimension 2 de $G$. On possède également la suite exacte (voir 2.2.4, (6)) :

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(-1;1)} \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(1;1)} \to 0$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}^{(-1;1)} &= (\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St)^{\mathfrak{n}^0}, \\ \mathscr{O}^{(1;1)} \otimes \mathfrak{n_o}^\vee &= (\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St)_{\mathfrak{n}^0}. \end{aligned}$$

En tirant en arrière via $\pi_{HT}$, on obtient une suite exacte :

$$0 \to \omega_{K_p}^{(-1;1)} \otimes \mathscr{O}_{X_{K^p}} \to \mathscr{O}_{X_{K^p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St \to \omega_{K_p}^{(1;1)} \to 0$$

et en tordant par $\omega_{K_p}^{(1;-1)}$, on trouve une extension :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_{K^p}} \to \mathscr{O}_{X_{K^p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St \otimes \omega_{K_p}^{(1;-1)} \to \omega_{K_p}^{(1;1)} \otimes \omega_{K_p}^{(1,-1)} \to 0.$$

**Theorem 3.29** ([Fal87], thm. 5 ; [Pan22], thm. 4.4.2)**.** *L''inverse de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer $-KS : \omega_{K_p}^{(1;-1)} \otimes \omega_{K_p}^{(1;1)} \to \Omega^1_{X_{K_pK^p}}(\log(cusp))$ induit un isomorphisme de suite exactes :*

$$\mathscr{O}_{X_{K^p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St \otimes \omega_{K_p}^{(1;-1)} \to FE.$$

**Corollaire 3.30.** *On a $\tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St) = \omega^{(-1;1),sm}$ et $\mathrm{R}^1\tilde{VB}((\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St) = \omega^{(1;1),sm} \otimes \tilde{VB}((\mathfrak{n}^0)^\vee)$.*

*Démonstration.* Cela résulte du calcul de la cohomologie de l'extension de Faltings rappelé plus haut. $\square$

9. On a $FE = \mathrm{gr}^1\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{dR}(\mathscr{O}_{X_{K_p}})$.

On rappelle qu'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{der} \oplus \mathfrak{g}^{ab}$. On possède un morphisme $\mathfrak{g}$-équivariant $\mathfrak{n}^0 \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der}$. Il induit un morphisme $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})$.

**Corollaire 3.31.** *Le morphisme $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})$ est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On possède une filtration $\mathfrak{n}^0 \subseteq (\mathfrak{b}^{der})^0 \subseteq \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der}$ et on déduit du théorème 3.29 que :

$$\begin{aligned} \pi^\star_{HT}((\mathfrak{b}^{der})^0) &= \tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K^p}}} FE, \\ \pi^\star_{HT}((\mathfrak{g}^{der})^0/\mathfrak{n}^0) &= FE. \end{aligned}$$

On déduit facilement du calcul de la cohomologie de l'extension de Faltings que $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})$ est un isomorphisme. $\square$

Pour tout ouvert $W$ assez petit de $X_{K_p}$, on a construit un opérateur de Sen $\Theta \in \tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g})(W)$ associé au faisceau $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes St$ (voir le corollaire 3.22).

**Lemme 3.32.** *L'opérateur de Sen $\Theta$ appartient à $\tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})(W)$.*

*Démonstration.* On considère le morphisme $\det : St \otimes St \to \det$ de $G$-représentations. Soit $\Theta$ un opérateur de Sen pour $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St$. Alors $\Theta \otimes 1 + 1 \otimes \Theta$ est un opérateur de Sen pour $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St \otimes St$ et $\mathrm{Tr}(\Theta)$ est un opérateur de Sen pour $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes \det$, donc $\mathrm{Tr}(\Theta) = 0$ (par exemple d'après le corollaire 3.28). Il en résulte que $\Theta$ appartient à $\tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})(W)$. $\square$

**Proposition 3.33.** *L'opérateur de Sen $\Theta \in \tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}^{der})(W) = \tilde{VB}(\mathfrak{n}^0)(W)$ engendre $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0)(W)$.*

*Démonstration.* On a $\mathrm{R}^1\tilde{VB}((\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St) = \mathrm{colim}_{K_p} \omega^{(1;1)}_{K_p} \otimes \Omega^1_{X_{K_pK^p}}(\log)$ par le corollaire 3.30. D'après la théorie de Sen, on a

$$\mathrm{R}^1\tilde{VB}(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} St)(W) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{colim}_{K_p,n}\mathrm{H}^1(\Theta, D_{K_p,n}(St))),$$

et par descente étale, pour $K_p$ suffisament petit,

$$B_{K_p,n} \otimes_{B_{K_p}} (\mathrm{H}^1(\Theta, D_{K_p,n}(St)))^\Gamma = \mathrm{H}^1(\Theta, D_{K_p,n}(St))$$

Ceci montre que $\mathrm{H}^1(\Theta, D_{K_p,n}(St))$ est un faisceau localement libre de rang 1, et donc que l'opérateur $\Theta$ est non nul en tout point de $W$ (puisque $D_{K_p,n}(St)$ est de rang 2). Il en résulte que $\Theta$ est un générateur du module projectif de rang 1, $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0)(W)$. $\square$

3.6.7. *Fin de la démonstration.* On possède un morphisme $\mathfrak{n}^0 \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{F}^\vee$ qui induit un morphisme $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{F}^\vee)$.

**Proposition 3.34.** *Le conoyau du morphisme $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{F}^\vee)$ est un faisceau localement libre et donc l'image du faisceau $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0) \to \tilde{VB}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{F}^\vee)$ est un faisceau localement libre de rang* 0 *ou* 1 *qui est localement engendré par un opérateur de Sen de $\mathscr{F}$ (donné par corollaire 3.22).*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer tous les énoncés au voisinage des points classiques d'après la proposition 3.1. On considère un point classique $x \in U$ et un ouvert de la forme $V_x = xB_{n,x}\backslash G_{n,x}$. Il en résulte que $\mathscr{F}|_{V_x}$ est décrit par une représentation de dimension finie $\rho$ de $B_{x,n}$ (voir la proposition 2.3). On peut la supposer irréductible. On a donc $\rho = \chi \otimes \mathrm{Sym}^k St$ pour un caractère $\chi$ du tore $T_{x,n}$ de $B_{x,n}$. On a donc $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\chi \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{Sym}^k}$ L' opérateur de Sen pour $\mathscr{F}$ est de la forme $1 \otimes \Theta$ où $\Theta$ est un opérateur de Sen pour $\mathrm{Sym}^k St$ lequel est déterminé par une combinaison du lemme 3.26 et du calcul pour $St$ (donné dans la proposition 3.33). Il en résulte bien que le morphisme $\tilde{VB}(\mathfrak{n}^0)(\pi_{HT}^{-1}(V_x)) \to \tilde{VB}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{F}^\vee)(\pi_{HT}^{-1}(V_x))$ a une image localement libre de rang 0 (si $k = 0$) ou 1 (si $k \neq 0$) et qu'il est engendré par un opérateur de Sen. $\square$

On déduit maintenant le théorème 3.7 comme conséquence des deux lemmes suivants. Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)$.

**Lemme 3.35.** *Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}_0}$, alors $\tilde{VB}(\mathscr{F})$ est un faisceau localement libre et $\tilde{VB}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}^{sm}_{X_{K_p}}|_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U = \pi_{HT}^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\pi_{HT}^{-1}\mathscr{O}_U} \mathscr{O}_{X_{K^p}}|_U$.*

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme 3.23. On a $\mathrm{H}^0(K_p, B \otimes_C F) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F)))$. D'après la proposition 3.34, on a $\Theta_F = 0$. Par descente finie étale et le lemme 3.21, on déduit que $D_{K_p,n'}(F)^\Gamma$ est localement libre de rang fini et que $D_{K_p,n'}(F)^\Gamma \otimes_{B_{K_p}} B = B \otimes_C F$. $\square$

**Lemme 3.36.** *On a $\mathrm{R}^i \tilde{VB}(\mathscr{F}) = \tilde{VB}(\mathrm{H}^i(\mathfrak{n}^0, \mathscr{F}))$.*

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme 3.23. On doit montrer que $\mathrm{H}^i(K_p, B \otimes_C F) = \mathrm{H}^0(K_p, \mathrm{H}^i(\Theta_F, B \otimes_C F))$. D'après le lemme 3.23, on a $\mathrm{H}^i(K_p, B \otimes_C F) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F)))$. Il résulte de la proposition précédente que $\mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F))$ est un $B_{K_p,n'}$-module projectif, facteur direct de $D_{K_p,n'}(F)$. On déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F))) &= \mathrm{H}^0(\Gamma \times K_p, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F)) \otimes_{B_{K_p,n'}} B_\infty) \\ &= \mathrm{H}^0(\Gamma \times K_p, \mathrm{H}^i(\Theta_F, D_{K_p,n'}(F) \otimes_{B_{K_p,n'}} B_\infty)) \\ &= \mathrm{H}^0(K_p, \mathrm{H}^i(\Theta_F, F \otimes_C B)) \end{aligned}$$

$\square$

On démontre à présent le théorème 3.9.

**Lemme 3.37.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathcal{FL}_L$ et soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$. On possède une action du Cartan horizontal $\mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}^{sm}}(VB(\mathscr{F}))$. Alors $(1, 0) \in \mathfrak{h}$ s'envoie sur $\Theta_{sen} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}^{sm}}(VB(\mathscr{F}))$.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que les deux opérateurs $\Theta_{sen}$ et $(1, 0)$ sont égaux sur un ouvert de $U$. considère un point classique $x \in U$. Quitte à considérer une extension finie de $L$, on peut supposer $x \in U(L)$. On prend un ouvert de la forme $V_x = xB_{n,x} \backslash G_{n,x}$ pour $n$ assez grand. Il en résulte que $\mathscr{F}|_{V_x}$ est décrit par une représentation de dimension finie $\rho$ de $B_{x,n}$ (voir la proposition 2.3). On peut la supposer irréductible. On a donc $\rho = \chi \otimes \mathrm{Sym}^k St$ pour un caractère $\chi$ du tore $T_{x,n}$ de $B_{x,n}$. Comme $\mathscr{F} \in \mathbf{Coh}_{\mathfrak{g}}(U)^{\mathfrak{n}^0}$, on déduit que $k = 0$. On applique alors le corollaire 3.28. $\square$

## 4. Vecteurs localement analytiques

Dans cette section on explique certains résultats de la section 3 et section 4 de [Pan22] d'après le point de vue de cet article. Le but est d'obtenir une description du faisceau $\mathscr{O}^{la} \subset \hat{\mathscr{O}}$ des vecteurs localement analytiques.

Notons $\mathscr{O}_G^{alg}$ l'algèbre des fonctions sur le schéma $(\mathrm{GL}_2)^{alg} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}_p$. Elle admet la description (comme $G$-bimodule) $\mathscr{O}_G^{alg} = \oplus_{V \in \mathbf{IrrRep}(G)} V \otimes V^\vee$ où $\mathbf{IrrRep}(G)$ désigne les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de dimension finie de $G$.

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathscr{O}_{G_n}$ l'espace des fonctions analytiques sur $G_n$, le sous-groupe des éléments $G$ qui se réduisent sur 1 modulo $p^n$. On possède un morphisme $\mathscr{O}_G^{alg} \to \mathscr{O}_{G_n}$ et $\mathscr{O}_{G_n}$ est la complétion de $\mathscr{O}_G^{alg}$ pour une norme $|-|_n$ (la norme spectrale sur $\mathscr{O}_{G_n}$). On remarque que $\mathscr{O}_{G_n}$ est un $G_n$-bi-module. Pour tout $f \in \mathscr{O}_{G_n}$ et $g \in G_n$, on pose

$$\begin{aligned} g \star_1 f(-) &= f(g^{-1}-) \\ g \star_2 f(-) &= f(-g) \end{aligned}$$

On considère le faisceau $\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. On note $\star_3$ l'action de $G$ sur $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. Munis de l'action $\star_{1,3}$ (composée des $\star_1$ et $\star_3$), le faisceau $\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ est un faisceau $G_n$-équivariant. Il possède une seconde action $\star_2$ de $G_n$ qui est $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-linéaire. Pour tout $f \in \mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$ (vu comme un fonction $G_n \to \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$), on a

$$\begin{aligned} g \star_{1,3} f(-) &= g f(g^{-1}-),\ \forall g \in G_n \\ g \star_2 f(-) &= f(-g),\ \forall g \in G_n \end{aligned}$$

L'action $\star_{1,3}$ se dérive et induit une action de $\mathfrak{g}$ et donc une action ($\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-linéaire)

$$\mathfrak{n}^0 \to \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}(\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$$

On définit $\mathcal{C}^{n-an} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{n}^0, \mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$. Ce faisceau est stable sous les actions $\star_{1,3}$, $\star_2$. L'action $\star_{1,3}$ induit aussi une action $\star_{hor}$ du Cartan horizontal $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{b}^0/\mathfrak{n}^0$.

En passant à la limite, on définit l'espace des germes de fonctions analytiques $\mathscr{O}_{G,1} = \mathrm{colim}_n \mathscr{O}_{G_n}$ et on définit le faisceau

$$\mathcal{C}^{la} = \mathrm{colim}_n \mathcal{C}^{n-an} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{n}_0, \mathscr{O}_{G,1} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}).$$

La formule $h \star_{1,2,3} f(-) = h f(h^{-1} - h)$ définit une action de $G$.

La formule définissant le foncteur $VB$ s'étend naturellement à tous les faisceaux $G_n$-équivariants et par passage à la limite à $\mathcal{C}^{la}$. Par définition, le sous-faisceau de $\hat{\mathscr{O}}$ des vecteurs localement analytique est $\mathscr{O}^{la} = \mathrm{colim}_{K_p}(\mathscr{O}_{G,1} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \hat{\mathscr{O}})^{K_p} = VB(\mathscr{O}_{G,1} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$. Le théorème qui suit est une formulation agréable de certains résultats de la section 4 de [Pan22].

**Theorem 4.1.** *On a $\mathscr{O}^{la} = VB(\mathcal{C}^{la})$ et on possède un isomorphisme canonique, $\hat{\mathscr{O}}$-linéaire, $\mathfrak{g}$ et $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :*

$$\Psi : \mathscr{O}^{la} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}^{sm}} \hat{\mathscr{O}} = \mathcal{C}^{la} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \hat{\mathscr{O}}.$$

4.0.1. *Démonstration du théorème 4.1.*

**Proposition 4.2.** *Il existe $K_p(n)$ assez petit et un faisceau $\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})$ sur $X_{K_p(n)K^p}$ tel que :*

$$\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_{K_p(n)K^p}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}} = \mathcal{C}^{n-an} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}$$

*Démonstration.* Pour tout sous-ensemble fini $S \subset \mathbf{IrrRep}(G)$, on note $V_S = \oplus_{V \in S} V$. On a $\mathcal{O}_G^{alg} = \mathrm{colim}_S V_S \otimes V_S^\vee$. On applique la théorie de Sen (lem 3.21) simultanément aux faisceaux $G$-équivariants $V_S \otimes V_S^\vee \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$. Plus précisément, on équipe chaque représentation $V_S \otimes V_S^\vee$ de la norme $|-|_n$. La boule unité est une représentation $V_S^+ \otimes V_S^{\vee,+}$ et on voit que $G_{n+1}(\mathbb{Q}_p) := K_p$, agit trivialement sur $V_S^+ \otimes V_S^{\vee,+}/p$ (l'action est celle sur le second facteur $V_S^{\vee,+}$). On a adopte les notations du lemme 3.21. On note $D^+_{K_p,n}(S)$ le module de Sen associé à la représentation $V_S^+ \otimes V_S^{\vee,+}$. Pour tout $S$, on possède un isomorphisme (pour $n' \geq n(K_p, c)$) :

$$B^+_\infty \otimes_{B^+_{K_p,n'}} D^+_{K_p,n'}(S) \to B^+_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} V_S^+ \otimes V_S^{\vee,+}.$$

En passant à la limite inductive sur $S \subset \mathbf{IrrRep}(G)$ et en complétant $p$-adiquement, on obtient un isomorphisme :

$$B^+_\infty \hat{\otimes}_{B^+_{K_p,n'}} D^+_{K_p,n'}(\mathcal{O}_{G_n}) \to B^+_\infty \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \mathcal{O}^+_{G_n}.$$

En inversant $p$, on obtient :

$$B_\infty \hat{\otimes}_{B_{K_p,n'}} D_{K_p,n'}(\mathcal{O}_{G_n}) \to B_\infty \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} \mathcal{O}_{G_n}.$$

On possède des actions commutant entre elles de $K_p, \Gamma$ et $\Theta$ sur ces modules. On a

$$\tilde{VB}_{K_p}(\mathscr{O}_{G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathcal{FL}})(\mathrm{Spa}(B_{K_p}, B^+_{K_p})) = \mathrm{H}^0(\Gamma, D_{K_p,n'}(\mathcal{O}_{G_n})) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Theta, D_{K_p,n'}(\mathcal{O}_{G_n})).$$

En prenant les invariants par $\Theta$, puis $\Gamma$, on trouve un isomorphisme :

$$B \hat{\otimes}_{B_{K_p}} \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Theta, D_{K_p,n'}(\mathcal{O}_{G_n})) \to B \hat{\otimes}_C \mathrm{H}^0(\Theta, \mathcal{O}_{G_n} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} C).$$

De plus, $\Theta$ est un générateur de $\mathfrak{n}^0$ d'après la proposition 3.34. On déduit donc que

$$\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_{K_p(n)K^p}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}} = \mathcal{C}^{n-an} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}.$$

□

On décrit à présent sur chaque ouvert standard affinoide $V \hookrightarrow \mathcal{FL}$, le faisceau $\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_{K_p(n)K^p}}} \mathscr{O}_{X_{K^p}}$. Pour fixer les idées, supposons que $V$ est la boule unité de rayon 1 au voisinage de l'infini. On pose $x = 1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ la coordonnée sur $V$ ( et donc $|x| \leq 1$). Si $g \in UT\bar{U} \subseteq G$, on pose

$$g = \begin{pmatrix} 1 & u(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(g) & 0 \\ 0 & t_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{u}(g) & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons une section de $\mathcal{C}^{n-an}$ comme une fonction analytique $f(g,x)$ où $g \in G_n$ et $f(n_x g, x) = f(g,x)$ pour tout $n_x \in U_{n,x} = x^{-1} U_n x$. On définit les fonctions $X_0(g,x) = \bar{u}(xgx^{-1})$, $X_1(g,x) = t_1(xgx^{-1})$ et $X_2 = t_2(xgx^{-1}) \in \mathcal{C}^{n-an}(V)$.

**Lemme 4.3.** *On possède un isomorphisme* $\mathcal{C}^{n-an}|_V = \mathscr{O}_V\langle \frac{X_0}{p^n}, \frac{1-X_1}{p^n}, \frac{1-X_2}{p^n} \rangle$.

*Démonstration.* On construit un isomorphisme : $\mathcal{C}^{n-an}|_V \to \mathscr{O}_{U_n \backslash G_n} \hat{\otimes} \mathscr{O}_V$ en envoyant $f(g,x)$ sur $f(x^{-1}gx, x)$. Via cet isomorphisme, $X_0$ s'envoie sur $\bar{u}$, $X_1$ sur $t_1$ et $X_2$ sur $t_2$. Comme $\mathscr{O}_{U_n \backslash G_n}$ est l'algèbre de Tate engendrée par $\frac{\bar{u}}{p^n}$, $\frac{1-t_1}{p^n}$ et $\frac{1-t_2}{p^n}$, on conclut. □

On note $\pi^{-1}_{HT}(V) = \pi^{-1}_{K_p}(V_{K_p})$ pour tout sous-groupe ouvert compact $K_p \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ assez petit.

**Lemme 4.4.** *Il existe un sous-groupe ouvert compact $K_p(n)' \subseteq K_p(n)$ tel qu'on possède un isomorphisme :*

$$\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{FL}}) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_{K_p(n)K^p}}} \mathscr{O}_{V_{K_p(n)'}} = \mathscr{O}_{V_{K_p(n)'}} \langle x'_0, x'_1, x'_2 \rangle$$

*Démonstration.* On possède un isomorphisme

$$\mathscr{O}_{\pi_{HT}^{-1}(V)}\langle\frac{X_0}{p^n},\frac{1-X_1}{p^n},\frac{1-X_2}{p^n}\rangle\to \tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n}\otimes\mathscr{O}_{\mathcal{FL}})\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X_{K_p(n)K^p}}}\mathscr{O}_{\pi_{HT}^{-1}(V)}$$

qui est $\mathscr{O}_{\pi_{HT}^{-1}(V)}$-linéaire et $K_p(n)$-équivariant. L'idée est d'approximer les variables $\frac{X_0}{p^n},\frac{1-X_1}{p^n},\frac{1-X_2}{p^n}$ par des variables qui sont stables pour un sous-groupe ouvert compact $K_p(n)'$.

Considérons le $T_0$-torseur $\tilde{V}=U_0\backslash G_0\to B_0\backslash G_0=V$. On pose $\tilde{x}=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1&0\\0&\tilde{x}_2\end{pmatrix}$ l'élement universel qui donne des coordonnées sur $\tilde{V}$. On note $X_0'(g,\tilde{x})=\bar{u}(\tilde{x}g)$, $X_1'(g,\tilde{x})=t_1(\tilde{x}g)$, $X_2'(g,\tilde{x})=t_2(\tilde{x}g)$. Ce sont des sections de $\mathcal{C}^{n-an}(\tilde{V})$ qui sont $G_n$-invariantes pour l'action $\star_{1,3}$. On vérifie que $X_0'=x+X_0$, $X_1'(g,\tilde{x})=\tilde{x}_1X_1(g,x)$ et $X_2'(g,\tilde{x})=\tilde{x}_2X_2(g,x)$.

Rappelons que $\mathrm{colim}_{K_p}\mathrm{H}^0(V_{K_p},\mathscr{O}_{X_{K_pK^p}})$ est dense dans $\hat{\mathscr{O}}(V)$. On possède (voir la section 3.6.5) un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$-equivariant : $\mathcal{T}_{dR,K_p}\times_{X_{K_pK^p}}X_{K^p}=\mathcal{T}_{HT}\times_{\mathcal{FL}}X_{K^p}$. Sur l'ouvert $V$, le torseur $\mathcal{T}_{HT}|_V$ possède une section $s$ (donné par $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2=1$). En utilisant l'approximation d'Elkik ([Elk73], thm. 2), on voit qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $K_p(n)'$ (dépendant de $n$), et une section $s_{K_p(n)'}$ de $\mathcal{T}_{dR,K_p(n)'}|_{V_{K_p(n)'}}$ telle que $s_{K_p(n)'}=ts$ pour $t\in T_n(\pi_{HT}^{-1}(V))$. Il en résulte que le morphisme $\pi_{HT}:\pi_{HT}^{-1}(V)\to V$ se relève en un morphisme $K_p(n)'$-équivariant $\pi_{\tilde{H}T}:\pi_{HT}^{-1}(V)\to\tilde{V}$. Quitte à rapetisser $K_p(n)'$, on peut aussi trouver $y\in\mathscr{O}_{K_p'(n)}(V)$ tel que $|y-x|\le p^{-n}$. On peut alors considérer les sections $\frac{\pi_{HT}^{-1}(X_0')-y}{p^n}=x_0'$, $\frac{1-\pi_{\tilde{H}T}{}^{-1}(X_1')}{p^n}=x_1'$ et $\frac{1-\pi_{\tilde{H}T}{}^{-1}(X_1')}{p^n}=x_2'$ qui appartiennent donc à $\hat{\mathscr{O}}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\mathcal{C}^{n-an}(V)$. Il est clair que $\hat{\mathscr{O}}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\mathcal{C}^{n-an}(V)=\hat{\mathscr{O}}(V)\langle x_0',x_1',x_2'\rangle$ et que les sections $x_0',x_1'$ et $x_2'$ sont stables par l'action $\star_{1,3}$ de $K_p(n)'$.

□

Quitte à rapetisser $K_p(n)$ on peut supposer que $K_p(n)=K_p(n)'$. Posons alors $(\pi_{HT})_\star\tilde{VB}_{K_p(n)}(\mathscr{O}_{G_n}\otimes\mathscr{O}_{\mathcal{FL}})=\mathscr{O}^{n-an}_{K_p(n)}$. La formule de projection montre qu'on possède un isomorphisme :

$$\Psi_n:\mathscr{O}^{n-an}_{K_p(n)}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{K_p(n)}}\hat{\mathscr{O}}=\mathcal{C}^{n-an}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}.$$

Le morphisme $\Psi$ du théorème 4.1 s'obtient par passage à la limite sur $n$.

Vérifions à présent l'équivariance pour $G(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathfrak{g}$. Pour tout $h\in G(\mathbb{Q}_p)$, $f$ section locale de $\mathcal{C}^{n-an}$ et $k\in K_p$ assez petit, on a

$$h\star_{1,2,3}.k\star_{1,3}.f=(hkh^{-1})\star_{1,3}.h\star_{1,2,3}.f$$

Il en résulte qu'on possède une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur $VB(\mathcal{C}^{la})=\mathscr{O}^{la}$ et le morphisme : $\mathscr{O}^{la}\to\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$ est $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On possède aussi un morphisme d'évaluation en 1 (déduit de l'augmentation $\mathscr{O}_G\to\mathbb{C}_p$) :

$$ev_1:\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}\to\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\hat{\mathscr{O}}\to\hat{\mathscr{O}}$$

qui est $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariant (pour l'action $\star_{1,2,3}$ sur la source). Comme $ev_1\circ\Psi$ : $\mathscr{O}^{la}\to\hat{\mathscr{O}}$ est l'inclusion naturelle, on déduit que l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ construite sur $\mathscr{O}^{la}$ via le foncteur $VB$ est bien celle déduite de l'inclusion $\mathscr{O}^{la}\subseteq\hat{\mathscr{O}}$.

**Lemme 4.5.** *Le morphisme $\mathscr{O}^{la}\to\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$ induit un morphisme $\mathfrak{g}$-equivariant où $\mathfrak{g}$ agit sur $\mathscr{O}^{la}$ en dérivant l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ et sur $\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}}\hat{\mathscr{O}}$ via l'action $\star_2$.*

*Démonstration.* Sur $\mathcal{C}^{n-an}$, l'action $\star_{1,2,3}$ de $K_p \subseteq G_n$ se décompose en le composé des actions $\star_{1,3}$ et $\star_2$. Il en résulte que l'action $\star_{1,2,3}$ de $K_p$ sur $VB(\mathcal{C}^{n-an})$ se décompose en le composé d'une action lisse $\star_{1,3}$ (donc de dérivée nule !) et de l'action $\star_2$. $\square$

On possède une action $\star_{hor}$ du Cartan horizontal $\mathfrak{h}$ sur $\mathcal{C}^{la}$. Celle-ci induit une action $\star_{hor}$ de $\mathfrak{h}$ sur $VB(\mathcal{C}^{la}) = \mathscr{O}^{la}$.

**Lemme 4.6.** *L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{O}^{la}$ obtenue en dérivant l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ induit une action de $\mathfrak{g}^0$ qui se factorise en une action de $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{n}^0$. L'action induite de $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}^0/\mathfrak{n}^0$ est égale à $-\star_{hor}$.*

*Démonstration.* Considérons le morphisme d'évaluation en 1, $ev_1 : \mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\hat{\mathscr{O}} \to \hat{\mathscr{O}}$. Pour tout section $f \in \mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\hat{\mathscr{O}}$ et tout $g \in \mathfrak{g}$, on a $ev_1(g \star_1 f) = -ev_1(g \star_2 f)$. On linéarise pour en déduire que pour tout $g \in \mathfrak{g}^0$, on a $ev_1(g \star_1 f) = -ev_1(g \star_2 f)$. Soit $f \in \mathscr{O}^{la}$, on obtient $ev_1(g \star_1 \Psi(f)) = -ev_1(g \star_2 \Psi(f)) = -ev_1 \circ \Psi(g.f)$. On déduit donc que si $g \in \mathfrak{n}^0$, $g.f = 0$, puis que l'action induite de $\mathfrak{h}$ est $-\star_{hor}$. $\square$

## 5. Théorie d'Eichler-Shimura

Dans cette section, on reprend les calculs de la section 5 de [Pan22]. On commence par faire des calculs de cohomologie sur le faisceau $\mathcal{C}^{la}$, puis on transfert ces calculs au faisceau $\mathscr{O}^{la}$ à l'aide du théorème 4.1.

Si $M$ est un $\mathbb{C}_p[\mathfrak{n}]$-module, la cohomologie $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{n}}(1, M)$ de $\mathfrak{n}$ agissant sur $M$ est représentée par le complexe :

$$M \to M \otimes \mathfrak{n}^\vee.$$

On note $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{n}}(1, M) = M^{\mathfrak{n}}$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{n}}(1, M) = M_{\mathfrak{n}}$. Si $M$ est un $\mathbb{C}_p[\mathfrak{b}]$-module, et $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$, on cherchera à calculer $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, M)$. On a la formule :

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, M) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{Ext}_{\mathfrak{n}}(1, M)).$$

On rappelle qu'on a $j : \mathcal{FL} \setminus \{\infty\} = U_{w_0} \hookrightarrow \mathcal{FL}$ et $i_\infty : \{\infty\} \hookrightarrow \mathcal{FL}$. On possède une suite exacte :

$$0 \to j_! j^\star \mathcal{C}^{la} \to \mathcal{C}^{la} \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1} \mathcal{C}^{la} \to 0.$$

5.1. **Calcul de la $\mathfrak{b}$-cohomologie de $j^\star\mathcal{C}^{la}$.** Soit $B^0 \hookrightarrow G \times \mathcal{FL}$ le sous-groupe de Borel universel. Notons $U^0 \subseteq B^0$ le radical unipotent universel et $T^0 = U^0 \backslash B^0$. Soit $e : \mathcal{FL} \to B^0$ la section neutre. On note $\mathscr{O}_{B^0,1} = e^{-1}\mathscr{O}_{B^0}$. C'est le faisceau des germes de fonctions analytiques sur $B^0$ au voisinage de la section neutre. On définit de même $\mathscr{O}_{U^0,1}$ et $\mathscr{O}_{T^0,1}$. On note aussi $\mathscr{O}_{U,1}$ le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel des germes de fonctions analytiques en l'identité sur $U$.

**Lemme 5.1.** *Le morphisme de $\mathcal{FL}$-espaces adiques :*

$$\begin{array}{ccc} U^0 \times B & \to & G \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})} \mathcal{FL} \\ (u^0, b) & \mapsto & u^0 b \end{array}$$

*induit sur l'ouvert $U_{w_0}$ un isomorphisme :*

$$\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U_{w_0}} = (\mathscr{O}_{U^0,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{B,1})|_{U_{w_0}}$$

*Démonstration.* En tout point, $x \in U_{w_0}$, le morphisme $\mathfrak{n}_x \oplus \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme. $\square$

**Proposition 5.2.** *(1) On a $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{n}, \star_2}(1, j^\star\mathcal{C}^{la}) = 0$ si $i > 0$.*

(2) *Sur* $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{n},\star_2}(1, j^\star\mathcal{C}^{la}) = j^\star\mathcal{C}^{la,\mathfrak{n}}$*, on a* $h\star_2(-) = -w_0h\star_{hor}(-)$.

(3) *On a* $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la}) = 0$ *si* $i>0$ *et* $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la}) = \mathscr{O}^{-\chi}_{U_{w_0}}$.

*Remarque* 5.3. Ainsi, $j^\star\mathcal{C}^{la,\mathfrak{n}}$ met en famille les faisceau $\mathscr{O}^{-\chi}_{U_{w_0}}$.

*Démonstration.* D'après le lemme 5.1, on a $j^\star\mathcal{C}^{la} = j^\star\mathscr{O}_{U_{w_0}}\hat{\otimes}\mathscr{O}_{T,1}\hat{\otimes}\mathscr{O}_{U,1}$. Par ailleurs, on a une suite exacte : $0 \to \mathbb{C}_p \to \mathscr{O}_{B,1} \xrightarrow{\mathfrak{n}} \mathscr{O}_{B,1}\otimes\mathfrak{n}^\vee \to 0$. On déduit donc que $j^\star\mathcal{C}^{la,\mathfrak{n}} \simeq j^\star\mathscr{O}_{U_{w_0}}\hat{\otimes}\mathscr{O}_{T,1}$ et $j^\star\mathcal{C}^{la}_{\mathfrak{n}} = 0$. Posons $x = w_0\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Un calcul direct montre que pour tout $h\in\mathfrak{h}$ on a $w_0h - x^{-1}hx \in \mathfrak{n}$. Il en résulte que $h\star_{hor}(-) = -w_0h\star_2(-)$ dans $j^\star\mathcal{C}^{la,\mathfrak{n}}$.

Comme $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{T,1}) = \chi\mathbb{C}_p$ et $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{T,1}) = 0$ si $i>0$, on déduit que $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la})$ est un fibré inversible. Comme il est de poids $-w_0\chi$, il résulte de la proposition 2.18, que $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la}) \simeq \mathscr{O}^{-\chi}_{U_{w_0}}\otimes\mathbb{C}_p(\lambda)$ comme faisceau $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-équivariant (pour un caractère $\lambda : T(\mathbb{Q}_p)\to\mathbb{C}_p^\times$). Vérifions que $\lambda = 1$. Il suffit de calculer l'action de $T(\mathbb{Q}_p)$ en la fibre en $w_0$ de $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la})$ et de voir qu'elle est triviale. Une section de $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la})$ est une fonction $f(g,x)$ tel que $f(b_x^{-1}g, x) = -w_0\chi(h_x)f(g,x)$ et $f(gn,x) = f(g,x)$ pour $b_x = h_xn_x \in B_x$, $n\in U$, $g\in G$ arbitrairement proches de 1. Soit $t\in T(\mathbb{Q}_p)$. On a $t.f(g,w_0) = f(t^{-1}gt, w_0)$. Posons $g = u_{w_0}t_{w_0}u$ avec $b_{w_0} = u_{w_0}t_{w_0}\in B_{w_0}$ et $u\in U$. On voit alors que $f(t^{-1}gt, w_0) = f(t^{-1}t_{w_0}t, w_0) = f(g, w_0)$. □

5.2. **Calcul de la $\mathfrak{b}$-cohomologie de $i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}$.** Un élément de $U\backslash G$ au voisinage de 1 peut être uniquement représenté par un produit de matrices :

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$

et on voit un élément de $\mathscr{O}_{U\backslash G,1}$ comme une série formelle en les variables $(a-1),(d-1),x$ dont le rayon de convergence est strictement positif. On a un action $\star_d$ par translation à droite de $G$ et une action $\star_g$ par translation à gauche de $T$. On possède une action par conjugaison de $\star_{gd}$ de $B$ et donc $B(\mathbb{Q}_p)$. Dans ces coordonnées, l'action par translation à droite de $U$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{xu+1} & 0\\ 0 & d(xu+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{x}{xu+1} & 1\end{pmatrix}$$

On fixe le générateur standard $n\in\mathfrak{n}$. On vérifie alors

$$n.f(a,d,x) = (-ax\partial_a f + dx\partial_d - x^2\partial_x).f$$

Il en résulte que $n.a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3} = ((k_2-k_1)-k_3)a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3+1}$. On note $h = \mathrm{diag}(1,-1)$ le générateur de $\mathfrak{h}^{der}$ et $z = \mathrm{diag}(1,1)$ le générateur de $\mathfrak{z}$. On a :

$$\begin{aligned} h.f(a,d,x) &= (a\partial_a f - d\partial_d + 2x\partial_x).f\\ z.f(a,d,x) &= (a\partial_a f + d\partial_d).f \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} h.a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3} &= (k_1 - k_2 + 2k_3)a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3}\\ z.a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3} &= (k_1+k_2)a^{k_1}d^{k_2}x^{k_3} \end{aligned}$$

On rappelle aussi la définition suivante :

**Définition 5.4.** *Un nombre complexe $p$-adique $\alpha \in \mathbb{C}_p$ est un nombre de Liouville si :*

$$\mathrm{liminf}_{n\to\infty}|\alpha+n|^{\frac{1}{n}}=0$$

On note Liouv l'ensemble des nombres de Liouville, et $-$Liouv son opposé.

**Lemme 5.5.** *Soit $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.*

*(1) Si $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_d}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = 0$.*

*(2) Si $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{dimExt}^0_{\mathfrak{b},\star_d}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = 1$ et l'action $\star_g$ de $\mathfrak{h}$ se fait à travers $-w_0\chi$ sur cet espace.*

*(3) Si $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv}$, $\dim_{\mathbb{C}_p}\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_d}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = 1$, l'action $\star_g$ de $\mathfrak{h}$ se fait à travers le caractère $-\chi-2\rho$ et l'action $\star_{1,2}$ de $B(\mathbb{Q}_p)$ se fait à travers le caractère $-2\rho$.*

*(4) Si $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_d}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = 1$ et l'action $\star_g$ de $\mathfrak{h}$ est semi-simple et se fait à travers les caractères $-w_0\chi$ et $-\chi-2\rho$, l'action $\star_{gd}$ de $B(\mathbb{Q}_p)$ se fait à travers les caractères $\chi-\omega_0\chi$ et $-2\rho$.*

*Démonstration.* La $\mathfrak{n}$-cohomologie $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{n}}(1, \mathscr{O}_{U\backslash G,1})$ est représentée par le complexe : $\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{U\backslash G,1} \otimes \mathfrak{n}^\vee$. Comme $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\otimes\mathfrak{n}^\vee) = 0$ si $i>0$, on déduit que $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = 0$ est représentée par le complexe :

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{G,1}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\otimes\mathfrak{n}^\vee).$$

Soit $\chi(a,d) \in \mathscr{O}_{T,1}$ une primitive de $\chi$. On déduit que $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1})$ possède comme base topologique les fonctions $\{\chi x^n a^{-n} d^n\}_{n\geq 0}$ et $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\otimes\mathfrak{n}^\vee)$ possède comme base topologique les fonctions $\{\chi x^{n+1}a^{-n}d^n\}_{n\geq -1}$. La matrice de $n$ dans ces bases est sous-diagonale avec coefficients $\chi((1,-1)), \chi((1,-1))-1, \chi((1,-1))-2, \cdots$. Le point (1) est clair. Dans le cas (2), on voit que $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_d}(\chi, \mathscr{O}_{U\backslash G,1}) = \chi x^{\chi((1,-1))}a^{-\chi((1,-1))}d^{\chi((1,-1))}$ et que l'action $\star_g$ de $\mathfrak{h}$ est via $-w_0\chi$. Dans le cas (3) le conoyau est engendré par $\chi a d^{-1}$. Dans le cas (4), le conyau est engendré par $\chi a d^{-1}$ et $x^{\chi((1,-1))+1}\chi a^{-\chi((1,-1))}d^{\chi((1,-1))}$. □

**Lemme 5.6.** *On possède un isomorphisme naturel :*

$$i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1}.$$

*Cet isomorphisme entrelace les actions suivantes de $\mathfrak{g}$ :*
- *$\star_{1,3}\otimes\star_d$ et $Id\otimes\star_d$,*
- *$\star_2\otimes Id$ et $\star_d\otimes Id$.*

*Cet isomorphisme entrelace les actions suivantes de $\mathfrak{h}$ :*
- *$\star_{hor}\otimes Id$ et $\star_g\otimes Id$,*
- *$Id\otimes\star_g$ et $\star_g\otimes\star_g$.*

*Cet isomorphisme entrelace les actions $\star_{1,2,3}\otimes\star_{gd}$ et $\star_{gd}\otimes\star_{gd}$ de $B(\mathbb{Q}_p)$.*

*Démonstration.* Voyons une section de $\mathcal{C}^{la}$ comme une fonction $f(g,x)$ avec $g\in G$ et $x\in\mathcal{FL}$ et voyons donc une section de $i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}\mathscr{O}_{U\backslash G,1}$ comme une fonction $f(g,x)$ avec $g\in G$, $x\in U\backslash G$ arbitrairement proches de 1. Au voisinage de $1\in U\backslash G$, on peut relever $x$ en un élément de $G$ tel que $x(1)=1$ (on vérifiera que l'application que nous allons définir ne dépend pas du choix d'un tel relèvement). On définit alors l'application $f(g,x)\mapsto f(xg,x)$. On voit que cette application réalise un isomorphisme $i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1}$. et la compatibilité aux différentes actions est un simple exercice.

$\square$

**Proposition 5.7.** *Soit* $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.

*(1) Si* $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}) = 0$.

*(2) Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}) = \mathscr{O}_\infty^{-\chi}$ *et l'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *se fait à travers* $-w_0\chi$.

*(3) Si* $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}) = \mathscr{O}_\infty^{-w_0\chi+2\rho} \otimes \mathfrak{n}^\vee$, *l'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *se fait à travers le caractère* $-\chi - 2\rho$.

*(4) Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}) = \mathscr{O}_\infty^{-w_0\chi+2\rho} \otimes \mathfrak{n}^\vee \bigoplus \mathscr{O}_\infty^{-\chi} \otimes \mathbb{C}_p(\chi - w_0\chi)$. *L'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *est semi-simple et se fait à travers les caractères* $-\chi - 2\rho$ *et* $-w_0\chi$.

*Démonstration.* D'après le lemme 5.6, on possède un isomorphisme
$$i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la} \to (\mathscr{O}_{T,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1})^{\mathfrak{h}\star_g\otimes\star_g=0}$$
et donc tous les calculs se ramènent à ceux du lemme 5.5. $\square$

*Remarque* 5.8. On possède un morphisme de restriction naturel $\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{T,1}$, déduit de l'inclusion $T \hookrightarrow U\backslash G$.. On définit un morphisme surjectif
$$i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{FL},\infty}}\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{U\backslash G,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1} \to \mathscr{O}_{T,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1}$$

Ce morphisme entrelace les actions $\star_{1,3}\otimes\star_d$ et $Id\otimes\star_d$ de $\mathfrak{g}$, et les actions $\star_2\otimes Id$ et $\star_d\otimes Id$ de $\mathfrak{h}$. Il entrelace les actions $\star_{1,2,3}\otimes\star_{gd}$ et $\star_{gd}\otimes\star_{gd}$ de $B(\mathbb{Q}_p)$. L'action de $\mathfrak{h}$ donnée par $\star_{hor}\otimes Id$ devient $\star_g\otimes Id$. Enfin les actions $Id\otimes\star_g$ et $\star_g\otimes\star_g$ de $\mathfrak{h}$ se correspondent aussi.

On en déduit un morphisme surjectif de faisceaux $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-équivariants :
$$i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la} \to (\mathscr{O}_{T,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1})^{\mathfrak{h}\star_g\otimes\star_g=0}$$

On note $i_\infty^{-1}\tilde{\mathcal{C}}^{la} = (i_\infty)_\star(\mathscr{O}_{T,1}\hat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathscr{O}_{U\backslash G,1})^{\mathfrak{h}\star_g\otimes\star_g=0}$. On voit que le morphisme $i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la} \to i_\infty^{-1}\tilde{\mathcal{C}}^{la}$ induit par passage au quotient un morphisme $i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}_{\mathfrak{n}} \to i_\infty^{-1}\tilde{\mathcal{C}}^{la}\otimes\mathfrak{n}^\vee$. Le faisceau $i_\infty^{-1}\tilde{\mathcal{C}}^{la}\otimes\mathfrak{n}^\vee$ interpole les faisceaux $\mathscr{O}_\infty^{-w_0\chi}\otimes\mathfrak{n}^\vee$ et si $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup$ Liouv on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la}) = \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\tilde{\mathcal{C}}^{la}\otimes\mathfrak{n}^\vee)[-1] = \mathscr{O}_\infty^{-w_0\chi}\otimes\mathfrak{n}^\vee[-1]$.

5.3. **La $\mathfrak{b}$-cohomologie de $\mathscr{O}^{la}$.** On possède des suites exactes :
$$0 \to j_!j^\star\mathscr{O}^{la} \to \mathscr{O}^{la} \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la} \to 0.$$

On commence par calculer la $\mathfrak{b}$-cohomologie de $j^\star\mathscr{O}^{la}$ et $i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}$, comme faisceau $B(\mathbb{Q}_p)$-équivariant.

**Proposition 5.9.** *Soit* $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.

*(1) Si* $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}) = 0$.

*(2) Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}) = \omega_\infty^{-\chi,sm}$ *et l'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *se fait à travers* $-w_0\chi$.

*(3) Si* $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}) = \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm} \otimes \mathfrak{n}^\vee$, *l'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *se fait à travers le caractère* $-\chi - 2\rho$.

*(4) Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}) = \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho}\otimes\mathfrak{n}^\vee\oplus\omega_\infty^{-\chi}\otimes\mathbb{C}_p(\chi - w_0\chi)$. *L'action* $\star_{hor}$ *de* $\mathfrak{h}$ *est semi-simple et se fait à travers les caractères* $\chi + 2\rho$ *et* $w_0\chi$.

(5) *On a* $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}) = 0$ *si* $i > 1$.

(6) *On a* $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la}) = 0$ *si* $i > 0$ *et* $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la}) = \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}}$.

*Démonstration.* On prétend que $VB(\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la})) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la}))$. Pour justifier cette assertion, nous utilisons [Cam22, thm 4.2.5] qui étend le théorème 3.3 aux faisceaux $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la}))$. On possède ainsi la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} VB(\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathcal{C}^{la})) &= RVB(\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}\mathcal{FL}))) \\ &= \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, RVB(j^\star\mathscr{O}_{G,1}\hat{\otimes}\mathcal{FL})) \\ &= \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la})). \end{aligned}$$

On montre de même que $VB(\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathcal{C}^{la})) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}))$. On se ramène donc aux propositions 5.2 et 5.7. □

**Corollaire 5.10.** *Soit* $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$.

(1) *Si* $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv}$,
$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{R}\Gamma(\{\infty\}, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee[-1].$$

(2) *Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\{\infty\}, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi,sm})$.

(3) *Si* $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\{\infty\}, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi,sm}) \oplus \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee$.

(4) $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{R}\Gamma_c(U_{w_0}, j^\star\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-w_0\chi+2\rho,sm})[-1]$.

*Démonstration.* On a :
$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{R}\Gamma(\{\infty\}, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{R}\Gamma(\{\infty\}, \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la}))$$
$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{R}\Gamma_c(U_{w_0}, j^\star\mathscr{O}^{la})) = \mathrm{R}\Gamma_c(U_{w_0}, \mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la})).$$
On peut donc appliquer la proposition 5.9 □

5.4. **La $\mathfrak{b}$-cohomologie de $\mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})$.** On commence par calculer la $\mathfrak{b}$-cohomologie de $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})$

**Proposition 5.11.** *Soit* $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$. *On a des isomorphismes de* $B(\mathbb{Q}_p)$*-modules :*

(1) *Si* $\chi \in X^\star(T)$ *et* $\chi((1,-1)) = 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi)$ *si* $i = 0, 1$ *et* $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = 0$ *si* $i > 1$.

(2) *Si* $\chi \in X^\star(T)$ *et* $\chi((1,-1)) = -2$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi)$ *si* $i = 1, 2$ *et* $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = 0$ *sinon.*

(3) *Si* $\chi((1,-1)) \neq 0, -2$, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = 0$.

*Démonstration.* On rappelle que
$$\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) = \mathcal{C}^{la}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathrm{H}^0(X_{GL_2(\mathbb{Z}_p)K^p}, \mathscr{O}_{X_{GL_2(\mathbb{Z}_p)K^p}}).$$

Ainsi, l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})$ se factorise à travers $\mathfrak{g}^{ab}$. On a $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{n}}(1, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})[0] \oplus \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee[-1]$. Si $\chi(1,-1) \neq 0$, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = 0$. Si $\chi(1,-1) \neq -2$, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee) = 0$.

Si $\chi \in X^\star(T)$ et $\chi(1,-1) = 0$, alors $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{g}}(\chi, \mathscr{O}^{la}) = \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm} \otimes \mathbb{C}_p(\chi)$. On déduit facilement que $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi))$. De même si $\chi(1,-1) = -2$, alors $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{g}}(\chi, \mathscr{O}^{la} \otimes \mathfrak{n}^\vee) = \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi-2\rho,sm} \otimes \mathbb{C}_p(\chi)$. On déduit facilement que $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi-2\rho,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi))$. On remarque enfin que $-\chi - 2\rho = -w_0\chi + 2\rho$. □

**Theorem 5.12** ([Pan22], thm. 5.4.2, 5.4.6)**.** *Soit $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$. On a les suites exactes de $B(\mathbb{Q}_p)$-modules :*

*(1) Si $\chi((1,-1)) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup -\mathrm{Liouv} \cup \{-2\}$, on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \to 0$$

*(2) Si $\chi \in X^\star(T)$ et $\chi((1,-1)) = -2$, on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to K \to 0$$

*et*

$$0 \to (\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee)/(\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi)) \to K$$

$$\to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi) \to 0$$

*(3) Si $\chi \in X^\star(T)$ et $\chi((1,-1)) = 0$, on a :*

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to$$

$$\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \oplus (\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi - w_0\chi))/(\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi)) \to 0$$

*(4) Si $\chi \in X^\star(T)$ et $\chi((1,-1)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a :*

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to$$

$$\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \oplus \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(\chi - w_0\chi) \to 0$$

*(5) $\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm})$, $\mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm})$ et $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi})$ ont poids de Hodge-Tate $w_0\chi((1,0))$.*

*(6) $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm})$ et $\mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-w_0\chi+2\rho,sm})$ ont poids de Hodge-Tate $\chi((1,0))+1$.*

*Démonstration.* On considère la suite exacte :

$$0 \to j_! j^\star \mathscr{O}^{la} \to \mathscr{O}^{la} \to (i_\infty)_\star i^{-1} \mathscr{O}^{la} \to 0$$

En prenant la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, i_\infty^{-1} \mathscr{O}^{la}) \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \mathscr{O}^{la}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}) \to 0$$

Dans le cas (1), $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = 0$ d'après la proposition 5.11, et $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\{\infty\}, i_\infty^{-1} \mathscr{O}^{la})) = 0$ d'après le corollaire 5.10, donc on obtient un suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^0(\{\infty\}, i_\infty^{-1} \mathscr{O}^{la})) \to 0$$

et on peut appliquer le corollaire 5.10. Les autres cas sont similaires et laissés au lecteur. □

5.5. **Théorie de Harish-Chandra.** D'après le théorème 5.12, sur la partie $\chi$-isotypique pour l'action de $\mathfrak{b}$, le Cartan horizontal vérifie l'équation quadratique $(h + (\chi + 2\rho)(h))(h + w_0\chi(h))$. C'est en fait une conséquence de la théorie de Harish-Chandra que nous rappelons ici. Soit $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On possède un morphisme $HC : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ dont voici la définition : dans le module de Verma universel $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ on a

$$z \otimes 1 = 1 \otimes HC(z).$$

D'après [Hum08], 1.10. Le morphisme $HC$ induit un isomorphisme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{W,\cdot}$, où $W, .$ est l'action tordue du groupe de Weyl (qui induit l'action $w.\chi = w(\chi+\rho)-\rho$ sur $X^\star(T)_{\mathbb{C}_p} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{U}(\mathfrak{h})$).

On note $\mathcal{D} = \mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathfrak{n}^0(\mathscr{O}_{\mathcal{FL}} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ le faisceau des opérateurs différentiels tordus sur $\mathcal{FL}$.

Le morphisme $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}^0/\mathfrak{n}^0$ induit un morphisme $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{D}$. On possède de plus un morphisme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}$. On montre que le morphisme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}$ se factorise à travers $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. On possède donc un second morphisme $HC' : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$.

**Lemme 5.13.** *Le diagramme suivant est commutatif*[10] *:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "HC"] \arrow[dr, "HC'"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \arrow[d, "w_0"] \\ & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \end{tikzcd}$$

*Démonstration.* On a $i_\infty^\star \mathcal{D} = \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et on a par specialization la formule $1 \otimes z = HC'(z) \otimes 1$. La transposition suivie de la conjugaison par $w_0$ induit un isomorphisme : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Cette opération envoie $z \otimes 1 = 1 \otimes HC(z)$ sur $1 \otimes z = w_0 HC(z) \otimes 1$ car la transposition agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ (voir [Hum08], 1.10, exercice). □

## 6. Poids singuliers

Un poids $\chi$ est singulier si $w_0\chi = \chi + 2\rho$, si $\chi(1, -1) = -1$. Dans le point 1 du théorème 5.12, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm}) \to 0$$

et l'action du Cartan horizontal se fait à travers le caractère $-w_0\chi$ sur $\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm})$ et sur $\mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-w_0\chi+2\rho,sm})$. Cet action est non semi-simple (en général) et le théorème suivant décrit le sous-espace de $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))$ sur lequel l'action est semi-simple.

**Theorem 6.1.** *Soit $\chi \in X^\star(T)$. Supposons que $\chi((1, -1)) = -1$. On possède un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b},\star_2}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega_\infty^{-\chi,sm}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega_{U_{w_0}}^{-\chi,sm}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi \oplus -w_0\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \omega_{\mathcal{FL}}^{-\chi,sm}) \otimes \mathbb{C}_p(\chi) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

10. Où $w_0 : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ est l'action non tordue de $w_0$

*Démonstration.* Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Pour tout $z \in \mathfrak{z}$, on a $z \star_{hor} (-) = -z \star_2 (-)$ essentiellement par construction (voir le lemme 5.13). Il en résulte que

$$\mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})).$$

On va étudier

$$\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})).$$

Comme $\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)}(\chi, \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) = \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la}))[-1]$, on déduit que :

$$\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{R}\Gamma(\mathscr{O}^{la}))\big) = \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathrm{H}^1(\mathscr{O}^{la})).$$

On considère maintenant $j : U_{w_0} \to \mathcal{FL} \leftarrow \{\infty\} : i_\infty$ et le triangle :

$$j_! \mathscr{O}^{la}|_{U_{w_0}} \to \mathscr{O}^{la} \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1} \mathscr{O}^{la} \xrightarrow{+1}$$

On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi \oplus -w_0\chi, \mathrm{R}\Gamma_c(U_{w_0}, \mathscr{O}^{la})) &= \mathrm{Ext}_{(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(-w_0\chi, \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}})[-1]) \\ &= \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}})[-1] \oplus \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}})[-2]\end{aligned}$$

On calcule de même :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi \oplus -\omega_0\chi, \mathrm{R}\Gamma(\{\infty\}, i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{la})) &= \mathrm{Ext}_{(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(-w_0\chi, \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{-\chi,sm}_\infty) \otimes \mathfrak{n}^\vee) \\ &= \mathrm{H}^0(\infty, \omega^{-\chi,sm}_\infty) \otimes \mathfrak{n}^\vee[-1] \oplus \mathrm{H}^0(\infty, \omega^{-\chi,sm}_\infty) \otimes \mathfrak{n}^\vee[-2]\end{aligned}$$

En appliquant à :

$$j_! \mathscr{O}^{la}|_{U_{w_0}} \to \mathscr{O}^{la} \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1} \mathscr{O}^{la} \xrightarrow{+1}$$

le foncteur $\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi \oplus -w_0\chi, \mathrm{R}\Gamma(-))$ on trouve une suite longue :

$$\mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}}) \to \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)\oplus(\mathfrak{h}^{der},\star_{hor})}(\chi \oplus -w_0\chi, \mathrm{H}^1(\mathscr{O}^{la}) \to$$

$$\mathrm{H}^0(\infty, \omega^{-\chi,sm}_\infty) \otimes \mathfrak{n}^\vee \xrightarrow{d} \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}})$$

Il faut maintenant identifier l'opérateur $d$. On commence par expliquer que l'opérateur $d$ est associé à la classe d'une extension de faisceaux. D'après le lemme 6.2 on a $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(-w_0\chi, \mathscr{O}^{la}) := \mathscr{O}^{la,-w_0\chi}[0]$. On calcule $\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathscr{O}^{la,-w_0\chi})$ à l'aide du complexe de Koszul suivant (où $h, n$ sont des générateurs de $\mathfrak{h}^{der}$ et $\mathfrak{n}$) :

$$0 \to \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \overset{(n, h-\chi(h))}{\to} \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \otimes \mathfrak{n}^\vee \oplus \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \overset{\begin{pmatrix} h-\chi(h) \\ -n \end{pmatrix}}{\to} \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \otimes \mathfrak{n}^\vee \to 0$$

De même, $\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, j^\star\mathscr{O}^{la,-w_0\chi})$ se calcule à l'aide du même complexe qui se simplifie en :

$$\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}}[0] \oplus \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}}[-1]$$

Enfin, $\mathrm{Ext}_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, i_\infty^{-1}(\mathscr{O}^{la,-w_0\chi}))$ se calcule à l'aide du même complexe qui se simplifie en :

$$\omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}} \otimes \mathfrak{n}^\vee[-1] \oplus \omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}} \otimes \mathfrak{n}^\vee[-2]$$

On possède donc un complexe de complexes de faisceaux qui est un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd} j_!\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & j_!\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}} \arrow[d] & \\ \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \arrow[r] & \mathscr{O}^{la,-w_0\chi}\otimes\mathfrak{n}^\vee \oplus \mathscr{O}^{la,-w_0\chi} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}^{la,-w_0\chi}\otimes\mathfrak{n}^\vee \arrow[d] \\ & (i_\infty)_\star\omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{n}^\vee \arrow[r, "0"] & (i_\infty)_\star\omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{n}^\vee \end{tikzcd}$$

En prenant le $\mathrm{H}^1$, on déduit un suite exacte :

$$0 \to j_!\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}} \to \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathscr{O}^{la,-w_0\chi}) \to (i_\infty)_\star\omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{n}^\vee \to 0$$

De plus, la classe de l'extension dans cette suite exacte induit le morphisme $d$. En effet, on a des suites exactes :

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathscr{O}^{la})) \to$$

$$\mathrm{Ext}^0_{(\mathfrak{b},\star_2)}(\chi, \mathrm{H}^1(\mathcal{FL}, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathscr{O}^{la}))$$

et

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{FL}, \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)\oplus(\mathfrak{h},\star_{hor})}(\chi\oplus -w_0\chi, \mathscr{O}^{la})) \to \mathrm{H}^0(\{\infty\}, \omega^{-\chi,sm}_\infty)\otimes\mathfrak{n}^\vee \xrightarrow{d} \mathrm{H}^1_c(U_{w_0}, \omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}})$$

On conclut la preuve du théorème grace à la proposition 6.3 suivante. □

**Lemme 6.2.** *Pour tout caractère $\chi \in X^\star(T)_{\mathbb{C}_p}$, on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(\chi, \mathscr{O}^{la}) = 0$ si $i > 0$ et on pose $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(\chi, \mathscr{O}^{la}) = \mathscr{O}^{la,\chi}$.*

*Démonstration.* Comme $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h}}(\chi, \mathscr{O}_{T,1}) = 0$ pour tout $i > 0$, on déduit que $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(\chi, \mathcal{C}^{la}) = 0$ si $i > 0$. Ensuite, on a $VB(\mathrm{Ext}_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(\chi, \mathcal{C}^{la})) = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{h},\star_{hor}}(\chi, \mathscr{O}^{la})$. □

**Proposition 6.3.** *L'extension*

$$0 \to j_!\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}} \to \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathscr{O}^{la,-w_0\chi}) \to (i_\infty)_\star\omega^{-\chi,sm}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{n}^\vee \to 0$$

*s'identifie à l'extension :*

$$0 \to j_!j^\star\omega^{-\chi,sm}_{U_{w_0}} \to \omega^{-\chi,sm}_{\mathcal{FL}}\otimes\mathbb{C}_p(\chi) \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1}\omega^{-\chi,sm}_\infty\otimes\mathfrak{n}^\vee \to 0$$

*Démonstration.* On fait le calcul du coté de $\mathcal{C}^{la}$. On possède donc une extension de faisceaux $(\mathfrak{g}, B(\mathbb{Q}_p))$-equivariants sur $\mathcal{FL}$ :

$$0 \to j_!\mathscr{O}^{-\chi}_{U_{w_0}} \to \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi}) \to (i_\infty)_\star\mathscr{O}^{-\chi}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{n}^\vee \to 0$$

Il s'agit de démontrer que cette extension s'identifie (à torsion près de l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$) à

$$0 \to j_!j^\star\mathscr{O}^{-\chi}_{\mathcal{FL}} \to \mathscr{O}^{-\chi}_{\mathcal{FL}} \to (i_\infty)_\star i_\infty^{-1}\mathscr{O}^{-\chi}_{\mathcal{FL}} \to 0$$

Vu le lemme 2.15, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi})$ est un faisceau inversible de $\mathscr{O}_{\mathcal{FL}}$-modules. Il suffit donc de produire une section inversible de $\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi})$ au voisinage de l'infini.

On note $j' = U_{w_0}.w_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$. C'est la grosse strate de Bruhat pour l'action de $\bar{B}$. On considère $\mathrm{Ext}^0_{\bar{\mathfrak{b}}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la})$. De façon analogue au lemme 5.2, on voit que c'est un faisceau inversible sur $U_{w_0}.w_0$ et que l'action du Cartan horizontal se fait à travers le caractère $-w_0\chi$. On possède donc un morphisme $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la}) \to (j')^\star\mathcal{C}^{la,-w_0\chi}$. Le complexe suivant calcule $\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi})$ :

$$0 \to \mathcal{C}^{la,-w_0\chi} \overset{(n,h-\chi(h))}{\to} \mathcal{C}^{la,-w_0\chi} \otimes \mathfrak{n}^\vee \oplus \mathcal{C}^{la,-w_0\chi} \overset{\begin{pmatrix} h-\chi(h) \\ -n \end{pmatrix}}{\to} \mathcal{C}^{la,-w_0\chi} \otimes \mathfrak{n}^\vee \to 0.$$

On possède un morphisme $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \to (j')^\star\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi})$ induit par le morphisme $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \to (j')^\star\mathcal{C}^{la,-w_0\chi} \otimes \mathfrak{n}^\vee$. On utilise que $\mathfrak{h}$ agit (via $\star_2$) par $w_0\chi - 2\rho = \chi$ sur $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee$ et que $\mathfrak{h}$ agit (via $\star_{hor}$) par $-w_0\chi$. Ce morphisme est non nul, et il induit un morphisme de faisceau $\mathfrak{g}$-equivariants inversibles :

$$i_\infty^{-1}\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{b}}(w_0\chi, (j')^\star\mathcal{C}^{la}) \otimes \mathfrak{n}^\vee \to i_\infty^{-1}\mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{b}^{der},\star_2)}(\chi, \mathcal{C}^{la,-w_0\chi})$$

qui est donc nécessairement un isomorphisme. □

## Références


[AIS14] Fabrizio Andreatta, Adrian Iovita, and Glenn Stevens, *Overconvergent modular sheaves and modular forms for* $\mathbf{GL}_{2/F}$, Israel J. Math. **201** (2014), no. 1, 299–359.

[BB83] Alexander Beĭlinson and Joseph Bernstein, *A generalization of Casselman's submodule theorem*, Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), Progr. Math., vol. 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 35–52.

[BC08] Laurent Berger and Pierre Colmez, *Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique*, Astérisque (2008), no. 319, 303–337, Représentations $p$-adiques de groupes $p$-adiques. I. Représentations galoisiennes et $(\phi, \Gamma)$-modules.

[BC16] ———, *Théorie de Sen et vecteurs localement analytiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **49** (2016), no. 4, 947–970.

[BP20] George Boxer and Vincent Pilloni, *Higher hida and coleman theories on the modular curves*, preprint, 2020.

[Cam22] J. E. Rodríguez Camargo, *Locally analytic completed cohomology*, 2022.

[CHJ17] Przemysł aw Chojecki, D. Hansen, and C. Johansson, *Overconvergent modular forms and perfectoid Shimura curves*, Doc. Math. **22** (2017), 191–262.

[Col96] Robert F. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 215–241.

[DLLZ19] Hansheng Diao, Kai-Wen Lan, Ruochuan Liu, and Xinwen Zhu, *Logarithmic riemann-hilbert correspondences for rigid varieties*, 2019.

[Elk73] Renée Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 553–603 (1974).

[Eme06] Matthew Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), no. 1, 1–84.

[Fal87] Gerd Faltings, *Hodge-Tate structures and modular forms*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 133–149.

[Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221.

[Hub94] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217** (1994), no. 4, 513–551.

[Hum08] James E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category* $\mathscr{O}$, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Jan03] Jens Carsten Jantzen, *Representations of algebraic groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[KST20] Moritz Kerz, Shuji Saito, and Georg Tamme, *Towards a non-archimedean analytic analog of the Bass-Quillen conjecture*, J. Inst. Math. Jussieu **19** (2020), no. 6, 1931–1946.

[Pan22] Lue Pan, *On locally analytic vectors of the completed cohomology of modular curves*, Forum Math. Pi **10** (2022), Paper No. e7, 82.

[Pil13] Vincent Pilloni, *Overconvergent modular forms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 1, 219–239.

[Sch12] Peter Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), 245–313.

[Sch13] ———, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77.

[Sch15] ———, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.

[Sta13] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, `http://stacks.math.columbia.edu`, 2013.