

Raisonnement & vocabulaire ensembliste

Programme:

- opérateurs logiques & quantificateurs
- vocabulaire de la théorie des ensembles
- applications

⚠ Bien rédiger! Donner les arguments nécessaire de façon claire & précise. Rédaction propre & soignée! Le correcteur ne doit pas deviner.

I) LogiqueI.1) Assertions

Définition: Une **assertion** est une phrase ^{aussi appelée "proposition"} dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse. ^{syntactiquement correcte?}

Remarque: On dit que l'on peut lui assigner une valeur de vérité: vrai (V) ou faux (F). Ceci repose sur deux principes fondamentaux:

- principe du tiers exclu: une assertion est nécessairement vraie ou fausse
- loi de non-contradiction: une assertion ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

Exemples: a) $1+1=2$

b) $1+1=0$

c) Aujourd'hui j'ai un pull rouge.

Rq: La valeur de vérité peut dépendre du contexte: par ex. sur $\mathbb{R}$ $1+1=0$ est fausse, mais est vraie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Non-ex: a) Bonjour!

b) Il pleuvra demain.

Def. Deux assertions P & Q sont (logiquement) équivalentes si elles prennent toujours la même valeur de vérité.
On le note $P \equiv Q$.

I.2) Connecteurs logiques

But : — former des nouvelles assertions à partir d'anciennes
— apprendre à gérer la négation d'assertions de façon automatique

Ex. les règles de construction qui donnent la valeur de vérité peuvent être données à l'aide de tables de vérité.

I.2.a) la négation

Def. Si P est une assertion, on en construit la négation de P , notée $\neg P$, qui est une assertion qui est :

- vraie, si P est fausse
- fausse, si P est vraie.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Rq. principe du tiers exclu implique que pour toute assertion P , soit P soit $\neg P$ est vraie.

Prop. Soit P une assertion. Alors $\neg(\neg P) \equiv P$

Preuve

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

P & $\neg(\neg P)$ ont la même table de vérité, elles sont

donc équivalentes. $\square$

I.2.b) la conjonction (et)

Def. Si P & Q sont deux assertions, la conjonction P et

Q est une assertion, notée $P \wedge Q$, qui est vraie quand P et Q sont simultanément vraie & fausse sinon.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Rq. L'assertion $P \wedge \neg P$ est fausse. (ex)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

I.2.c) La disjonction (ou)

Def. Si P et Q sont deux assertions, la disjonction de P et Q , notée $P \vee Q$, est l'assertion qui est vraie quand au moins une des deux assertions P et Q est vraie, et fausse sinon.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

vel : ou en latin

peuvent être XOR ou V

⚠ Contrairement au langage oral le "ou" n'est pas exclusif. (Exo: Écrire la table de vérité de "ou" exclusif.)

Rq: $(P \wedge Q) \vee R$ et $P \wedge (Q \vee R)$ Pourquoi? À quoi est-elle équivalente?

I.2.d) la négation de "et" & "ou" ne sont pas équivalentes.

Proposition: On a les équivalences suivantes:

i) $\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$

ii) $\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$

Preuve: i) Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$	$\neg (P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

$\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ ont la même table de vérité, elles sont donc équivalentes.

ii) Qx.

I.2.e) Implications (si... alors)

Def. si P et Q sont deux assertions, alors "P implique Q", notée " $P \Rightarrow Q$ ", est l'assertion qui est :

- vraie quand Q est vraie chaque fois que P est vraie
- fausse sinon.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exo: $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

Ex. raisonnement de math: si une fonction est dérivable, alors elle est continue

⚠ Quand P est faux, " $P \Rightarrow Q$ " est toujours vraie ; un particulier " $P \Rightarrow Q$ " peut être vraie sans que ni P ni Q le soit ou sans qu'ils n'aient rien en commun

(Question: Est-ce que la négation d'une implication est une implication?)

pas de lien de cause à effet

I.2.g) Equivalences

Def. si P et Q sont deux assertions, alors "P est équivalent à Q" est une assertion, notée $P \Leftrightarrow Q$, qui est :

- vraie quand $P \Rightarrow Q$ est vraie et $Q \Rightarrow P$ est vraie
- fausse sinon.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

avoir la même table de vérité
on a exprimé l'équivalence (logique) comme un connecteur

Rq. - P & Q sont logiquement équivalents si et seulement si P & Q sont équival., donc $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \Rightarrow Q)$

- $(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$



équivalence, on démontre deux implications
 $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ ($P \Leftrightarrow Q$ "par double implication")

③

Cours du
4/9/26

ce n'est pas une
implication

Rq: Dans l'implication " $P \Rightarrow Q$ ", P est appelée condition suffisante pour Q , et Q est appelée condition nécessaire pour P .

principe à la base
des raisonnements

Prop. Soient P, Q, R trois assertions. Alors

i) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est vraie (transitive)

ii) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$ (la négation de l'implication)

iii) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ ← la contraposée de $P \Rightarrow Q$

Preuve: i) exo

ii) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv (\neg \neg P) \wedge (\neg Q) = P \wedge (\neg Q)$

iii)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

$(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ ont la même table de vérité, elles sont donc équivalentes.

Def. La reciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemple → **⚠ L'assertion et sa réciproque sont deux assertions indépendantes!**
↳ écrire la table de vérité

I.2. f) Démontrer une implication

Soient P, Q deux assertions. On veut montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie.

- (direct) Montrer que si P est vraie, alors Q est vraie.
- (contraposition) Montrer que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- (contradiction). On suppose que P est vraie et Q est fautive, et l'on aboutit à une contradiction.

Rq: Pour réfuter une implication $P \Rightarrow Q$, il s'agit de démontrer sa négation $P \wedge \neg Q$.

Autres types de raisonnement:

- (exhaustion des cas): Pour prouver une assertion P , on introduit deux assertions R_1, R_2 tel que $R_1 \vee R_2$ est vraie, et on montre que $R_1 \Rightarrow P$ et $R_2 \Rightarrow P$.

étendre à plus
de deux cas

$P = "n(n+1)"$ est pair, $R_1: "n$ est pair", $R_2: "n$ est impair"

Pour $P \Rightarrow Q$, on montre $(P \wedge R_1) \Rightarrow Q$ et $(P \wedge R_2) \Rightarrow Q$.

I.3 Quantificateurs

Def - le quantificateur universel "pour tout" est noté " $\forall$ ".

$$\forall x \in E, P(x) \quad \text{est court pour } (\forall x, (x \in E \Rightarrow P(x)))$$

- le quantificateur existentiel "il existe" est noté " $\exists$ ".

- le quantificateur "il existe un unique" est noté " $\exists!$ ".

Rq: Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions dépendant d'une variable x , où x est un élément d'un ensemble E . Alors on a

i) la négation de $(\forall x \in E, P(x))$ est $(\exists x \in E, \neg P(x))$

ii) $\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P(x))$

iii) $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$

iv) $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$

v) $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$

vi) $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$

⚠ les réciproques de iv) & v) sont fausses. Pourquoi?

Preuve: exos. $\rightarrow$ par dans les exos!

iv) Soit $x \in E$

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
$\forall$	$\forall$	$\forall$
$\forall$	$\exists$	$\forall$
$\exists$	$\forall$	$\forall$
$\exists$	$\exists$	$\exists$

Si $(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$ est vraie, alors $(\forall x \in E, P(x))$ ou $(\forall x \in E, Q(x))$ est vraie. En particulier, $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$ est vraie. $\square$

Rq: - un exemple permet de démentir un résultat de la forme $(\exists x \in E, P(x))$ est vraie, mais ne prouvera jamais $(\forall x \in E, P(x))$

- un contre-ex. permet de prouver $(\forall x \in E, P(x))$ est faux.

Ex Négation de $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} (|x-1| < \alpha \Rightarrow |x-1| < \varepsilon)$

est $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R} (|x-1| < \alpha \text{ et } |x-1| \geq \varepsilon)$

⚠ permuter de $\forall$ & $\exists$ ne fonctionne pas en général (voir exos)!

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

$$\exists A \Rightarrow \forall B$$

(p16)
- (récurrence). Soit $P(n)$ une assertion qui dépend d'une variable n et qui a un sens dans un contexte donné lorsqu'on remplace n par un entier naturel.

On suppose que i) $P(n_0)$ est vraie,

ii) pour tout $n \geq n_0$ entier, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. $P(n_0) = P(n) \Rightarrow P(n+1)$
 $P(n_0+1) = P(n)$

- (analyse et synthèse). Un type de raisonnement pour prouver l'existence de certains objets. On suppose qu'ils existent pour en déduire ses propriétés et valeurs.

Ex. Montrer que tout fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Supposons donc $f = g + h$, avec g paire et h impaire. On a donc $g(x) = g(-x)$ et $h(-x) = -h(x)$ pour tout réel x . En faisant la somme de $f(x)$ et $f(-x)$, on obtient $2g(x) = f(x) + f(-x)$, donc

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Les deux fonctions sont respectivement paire et impaire, et leur somme vaut f . + unicité

