

I.3 Quantificateurs

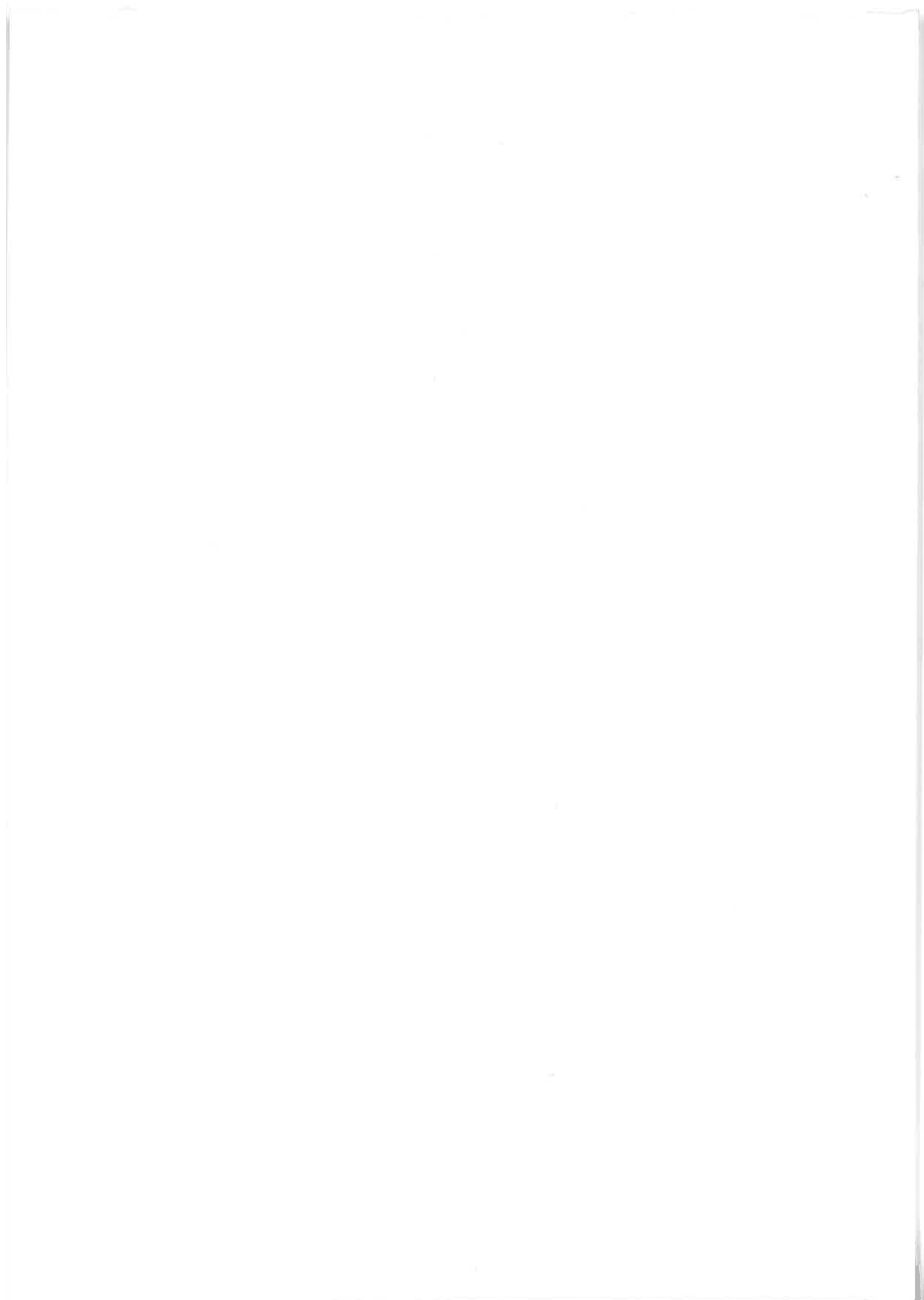
Prop. iv) $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$

Preuve: iv) Soit $x \in E$.

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
$\begin{array}{c} \boxed{V} \\ \boxed{V} \\ F \\ F \end{array}$	$\begin{array}{c} \boxed{V} \\ F \\ \boxed{V} \\ F \end{array}$	$\begin{array}{c} \boxed{V} \\ \boxed{V} \\ \boxed{V} \\ F \end{array}$

Si $(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$ est vraie, alors $(\forall x \in E, P(x))$ ou $(\forall x \in E, Q(x))$ est vraie. En particulier, $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$ est vraie. □

Rq: - un exemple permet de démontrer un résultat de la forme $(\exists x \in E, P(x))$ est vraie, mais ne prouvera jamais $(\forall x \in E, P(x))$
 - un contre-exemple permet de prouver $(\forall x \in E, P(x))$ est fausse.



(1)

II) Théorie des ensembles

Ensembles, applications, inj / surj / bij, ensembles finis (cardinal, inj / surj / bij), # applications, # sous-ensembles, coefficients binomiaux de Pascal

II.1) Ensembles

Def. Un **ensemble** est une collection E (finie ou infinie) d'objets, que l'on appelle les **éléments** de E .

Ex: $\mathbb{Z}$, $\{e\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\emptyset$

↑
les énumérer

une collection d'éléments qui vérifie une propriété

l'ensemble vide

Def. - On note $e \in E$ le fait que e est un élément de E ; on dit que e appartient à E . On note $e \notin E$ si e n'appartient pas à E .

- On dit que F est une partie ou un **sous-ensemble** de E si tout élément de F appartient aussi à E . On note $E \subset F$, et on dit que F est inclus dans E .

 $\Delta \in \vee \subset$

- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

Ex. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Rq. Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils sont inclus l'un dans l'autre: $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$

☺ c'est une stratégie commune pour montrer que deux ensembles sont égaux

II.2) Opérations sur les ensembles

Def. Soient A, B deux parties d'un ensemble E . On définit:

- le **complémentaire** de A dans E , noté A^c , est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c = \{e \in E \mid e \notin A\};$$

- l'**union** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B : (ou aux deux)

$$A \cup B = \{e \in E \mid e \in A \vee e \in B\};$$

- l'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des

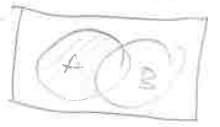
↑
diagrammes de Venn

éléments de E qui appartiennent à A et à B :

$$A \cap B = \{e \in E \mid e \in A \wedge e \in B\};$$

- la différence de A et de B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B :

$$A \setminus B = \{e \in E \mid e \in A \wedge e \notin B\} = A \cap B^c$$



- le produit cartésien de deux ensembles E et F , notée $E \times F$, est l'ensemble formé de tous les couples (e, f) t.q. $e \in E$ et $f \in F$.

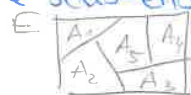
(Ex. les opérations sont définies par les connecteurs logiques $\neg, \vee, \wedge$; elles suivent donc les mêmes règles.)

Prop Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . On a :

- α {
i) $A \cup A = A, A \cap A = A$
ii) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
v) $(A^c)^c = A$ (exo)
vi) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (lois de De Morgan) (exo)

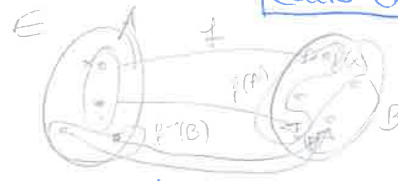
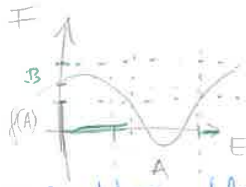
Preuve de iv): Soit $e \in A \cup (B \cap C)$. Si $e \in A$, alors $e \in A \cup B$ et $e \in A \cup C$, en particulier $e \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si $e \in B \cap C$, on a que $e \in B$ et $e \in C$. Donc $e \in A \cup B$ et $e \in A \cup C$, en particulier $e \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ce qui montre " $\subseteq$ ". Dans l'autre sens, si $e \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, on a que $e \in A \cup B$ et $e \in A \cup C$. Si $e \in A$, alors $e \in A \cup (B \cap C)$. Si $e \notin A$, alors on a que $e \in B$ et $e \in C$, en particulier $e \in B \cap C$, et hence aussi $e \in A \cup (B \cap C)$, ce qui montre " $\supseteq$ ".

Def. Une partition d'un ensemble E est un ensemble de sous-ensembles $\{A_i\}$ tel que $E = \bigcup A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.



Ex. $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ impair}\}$ est une partition de $\mathbb{N}$.

II.2) Applications



Def. Soient E, F deux ensembles. Une **application** f de E vers F , notée $f: E \rightarrow F$, est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F , notée $f(x)$ et appelé l'**image** de x par f . Un **antécédent** x d'un élément $y \in F$ est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Rq. L'application f est définie par son **graphe** $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

Ex. - la position d'une planète en fonction du temps

- l'**identité** $\text{id}_E: E \rightarrow E, x \mapsto x$

$$\text{id}_E(x) = x$$

- $f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

noté $f = g$

Rq. - deux applications $f, g: E \rightarrow F$ sont **égales** si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

- on peut composer les applications. Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est l'application définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$, appelé la **composition** de f et g .

Δ ~~$f \circ g$~~ n'a aucun sens

Dans la suite, on se donne une application $f: E \rightarrow F$.

Def. - Soit A une partie de E . L'**image directe** de A est la partie de F , notée $f(A)$, constituée des images de tous les éléments de A :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F.$$
montre dans les images en haut

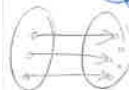
- Soit B une partie de F . L'**image réciproque** ou **préimage** de B par f est la partie de E , notée $f^{-1}(B)$, constituée de tous les éléments de E dont l'image est dans B :

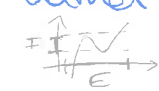
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Ex. $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$, $f(1) = f(2) = 4$, $f(3) = 6$. $A = \{1, 2\}$, alors $f(A) = \{4\}$; $B = \{4, 5\}$, alors $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$. $f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ est trompeuse: f ne possède pas forcément une réciproque; le préimage est quand même toujours défini. L'image directe d'un élément est un élément; par contre l'image réciproque d'un élément peut être vide, tout E , un ou plusieurs éléments (ça dépend de f et de l'élément)
 $\hookrightarrow$ mettre le dans l'image

II. 3) Injection, surjection, bijection

Def. L'application f est **injective** si des éléments différents de E ont toujours des images différentes dans F : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.   not surj.

L'application f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E : $\forall y \in F \exists x \in E, f(x) = y$.   not inj.

L'application f est **bijjective** si f est injective et surjective.  

Rq. - f est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E .

- f est surjective si et seulement si l'image directe de E est F : $f(E) = F$ (tout)

- f est bijective ssi tout élément de F admet exactement un antécédent dans E .

Ex. - $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n+1$ inj., pas surj. (manque 0)

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto |x|$ surj., pas inj.

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x+1$ bijective

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
 $f^{-1} = f$ (et pas $1/x$)

Prop. L'application f est bijective ssi il existe $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. L'application g est alors appelée la **réciproque** de f et notée f^{-1} . ⚠ pas confondre avec le préimage

Preuve. Supposons f est bijective et **on a avec la fonction inverse $\frac{1}{f}$!**
 soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f , et on pose $g(y) = x$. Par construction, on a $f \circ g(y) = f(x) = y$, donc $f \circ g = \text{id}_F$.
 Pour tout $x \in E$, on a $(f \circ g) \circ f(x) = f(x)$. Inj. de f implique $g \circ f(x) = x$, donc $g \circ f = \text{id}_E$.
 Réciproquement, si $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, soient $x, x' \in E$ t. q. $f(x) = f(x')$.
 On a alors $x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$, donc f est injective. Soit maintenant $y \in F$,

alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = \text{id}_F(y) = y$, donc f est surjective. L'application f est donc bijective. $\square$

Rq. Si f est bijective, f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$. De plus, pour toute partie $A \subseteq E$, $f^{-1}(f(A)) = A$ et pour toute $B \subseteq F$, $f(f^{-1}(B)) = B$. (exo)

Prop. Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ deux applications. Alors on a

- i) f, g injectives $\Rightarrow g \circ f$ inj.
- ii) f, g surj. $\Rightarrow g \circ f$ surj.
- iii) f, g bij. $\Rightarrow g \circ f$ bij. et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Preuve: i) Supposons f, g injectives, et soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Inj. de $g \Rightarrow f(x) = f(x')$ et inj. de f implique $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$.

ii) + iii) exo. $\square$

II.4) Ensembles finis

↖ il est composé d'un nombre fini d'éléments

Def. Un ensemble E est **fini** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, \dots, n\}$. L'entier n est unique et est appelé le **cardinal** de E , noté $|E|$ ou $\text{Card}(E)$.
(le nombre d'éléments)

Ex. $E = \{\text{rouge}, \text{noir}\}$ est en bij. avec $\{1, 2\}$ donc de cardinal 2.
 $\mathbb{N}$ pas fini; cardinal de $\emptyset$ est (par déf.) 0

Prop. Soient E, F deux ensembles finis. Alors on a

- i) $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$
- ii) $|E \times F| = |E| \cdot |F|$

