

FEUILLE D'EXERCICE 1 : LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1. Écrire la table de vérité de « ou exclusif » .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- (a) f est constante.
- (b) f n'est pas constante.
- (c) f s'annule.
- (d) f est périodique.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner les négations des assertions suivantes ¹ :

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
- (b) $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
- (d) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.
- (e) f est majorée par 1.
- (f) f est croissante.
- (g) f est croissante et positive.
- (h) Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 4. Soient P, Q et R trois assertions.

- (a) Écrire la négation des assertions suivantes : $P \Rightarrow Q, P \wedge Q, P \vee (Q \wedge R)$.
- (b) Montrer que :
 - (i) $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.
 - (ii) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- (c) Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies (i.e. des assertions toujours vraies) : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P), (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
- (d) Simplifier l'assertion $(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$.

Exercice 5. (a) Trouver une assertion vraie, qui devient fausse en échangeant l'ordre des quantificateurs.

- (b) Soit P une assertion qui dépend des deux variables x et y appartenant à un ensemble E . Démontrer l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in E \forall y \in E, P(x, y)) \iff (\forall y \in E \forall x \in E, P(x, y)).$$

- (c) Si l'on substitue le quantificateur existentiel $\exists$ au quantificateur universel $\forall$ dans l'équivalence précédente, la proposition obtenue reste-t-elle valide ? Autrement dit, a-t-on l'équivalence suivante :

$$(\exists x \in E \exists y \in E, P(x, y)) \iff (\exists y \in E \exists x \in E, P(x, y))?$$

Exercice 6. Soit l'assertion P : « Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle » et les assertions :

- (a) Q_1 : « Les diagonales de $ABCD$ ont la même longueur. »

1. On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

- (b) Q_2 : « $ABCD$ est un carré. »
- (c) Q_3 : « $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit. »
- (d) Q_4 : « Les diagonales de $ABCD$ sont médiatrices l'une de l'autre. »
- (e) Q_5 : « Les diagonales de $ABCD$ ont même milieu. »

Dire si chacune des assertions Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 et Q_5 est pour P une condition nécessaire non suffisante, une condition suffisante non nécessaire, une condition nécessaire et suffisante, ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 7. Soient a et b deux réels. On considère la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels. Quelle est la contraposée de cette proposition ? Démontrer la proposition. Est-ce que la réciproque de cette proposition est toujours vraie ?

Exercice 8. Réfléchissez d'abord au type de raisonnement mathématique qui pourrait vous aider à résoudre les exercices suivants. Expliquez et justifiez votre choix.

- (a) Soit n un entier naturel. Démontrer que, si n^2 est impair alors n est impair.
- (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
- (c) Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.
- (d) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
- (e) Montrer que pour tout entier $n > 1$, $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.
- (f) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?
- (g) Fixons un réel $x > 0$. Montrer que pour tout entier $n > 1$, $(1+x)^n > 1+nx$.

Exercice 9. On va « montrer », pour tout n entier, l'assertion $P(n) : 2^n = (-1)^n$.

- Initialisation : $P(0)$ est vraie, vu que $2^0 = 1 = (-1)^0$.
- Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose $P(k)$ est vraie pour tout k compris entre 0 et n . On calcule alors :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= (-1)^n + 2 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n \cdot (1 - 2) = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

en utilisant $P(n)$ et $P(n-1)$, et en factorisant $(-1)^n$.

- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n .

Il est évident que le raisonnement est faux. Mais où ? Repérer les erreurs et critiquer la rédaction de la réponse proposée.

Email address: xenia.flamm@universite-paris-saclay.fr