

**FEUILLE D'EXERCICE 2 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS
(ET ENCORE UN PEU DE LOGIQUE)**

Exercice 0. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions dépendant d'une variable x , où x est un élément d'un ensemble E . Montrer que

- a) $\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \neg P(x))$;
- b) $\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \neg P(x))$;
- c) $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$;
- d) $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \iff (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$;
- e) $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \implies (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$;
- f) $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$.

Pourquoi les réciproques de d) et e) sont-elles fausses ?

Exercice 1. a) Énumérer les ensembles $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ et $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.
 b) Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $(]0, 1[\cup]2, 3[) \times [-1, 1]$,
 $(\mathbb{R} \setminus (]0, 1[\cup]2, 3[)) \times ((\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap [0, 2])$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Démontrer que

- a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- b) $(A^c)^c = A$;
- c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (les lois de De Morgan).

Exercice 3. Soit E un ensemble, et soit $A, B \subset E$. La *différence symétrique* de A et B , notée $A \triangle B$ est le sous-ensemble de E suivant :

$$A \triangle B := \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- a) Dessiner le diagramme de Venn.
- b) Démontrer que $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
- c) Démontrer que $A \triangle B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice 4. Déterminer si les assertions sont vraies ou fausses. Justifier. Soient A, B, C trois ensembles.

- a) $(C \subset A \cup B) \Rightarrow ((C \subset A) \vee (C \subset B))$.
- b) $(A \cup B = B \cap C) \Rightarrow A \subset B \subset C$.
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5. a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Soit $A = [-1, 4]$. Déterminer l'image directe et l'image réciproque de A par f .

- b) On considère la fonction sinus : $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - i) Quelle est l'image directe de $\mathbb{R}$, de $[0, 2\pi]$ et de $[0, \frac{\pi}{2}]$ par la fonction sinus ?
 - ii) Quelle est l'image réciproque de $[0, 1]$, de $[3, 4]$ et de $[1, 2]$ par la fonction sinus ?

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- a) Soient A et B deux sous-ensembles de E .
 - i) Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?

- ii) Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
- iii) Démontrer que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
- b) Soient C et D deux sous-ensemble de F .
 - i) Démontrer que $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. La réciproque est-elle vraie ?
 - ii) Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
 - iii) Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

Lorsque les réciproques ou inclusions réciproques ne sont pas vraies donner des conditions nécessaires et suffisantes afin qu'elles le soient.

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- a) Soit $A \subset E$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Y a-t-il égalité ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité.
- b) Soit $B \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Y a-t-il égalité ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité.
- c) Soit $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ définie par $\Phi(A) = f(A)$ et $\Psi : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\Psi(B) = f^{-1}(B)$. Montrer que
 - i) f est injective si et seulement si Φ est injective si et seulement si Ψ est surjective.
 - ii) f est surjective si et seulement si Φ est surjective si et seulement si Ψ est injective.

Exercice 8. Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}.$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, ou bijectives ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- a) f est-elle injective ? surjective ?
- b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
- c) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de f est une bijection.

Exercice 10. Soient E, F, G des ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer les assertions suivantes :

- a) Si g et f sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective ;
- b) Si g et f sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
- c) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
- d) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;

Exercice 11. Soit E un ensemble, et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

- a) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner alors la bijection réciproque.

Email address: xenia.flamm@universite-paris-saclay.fr