

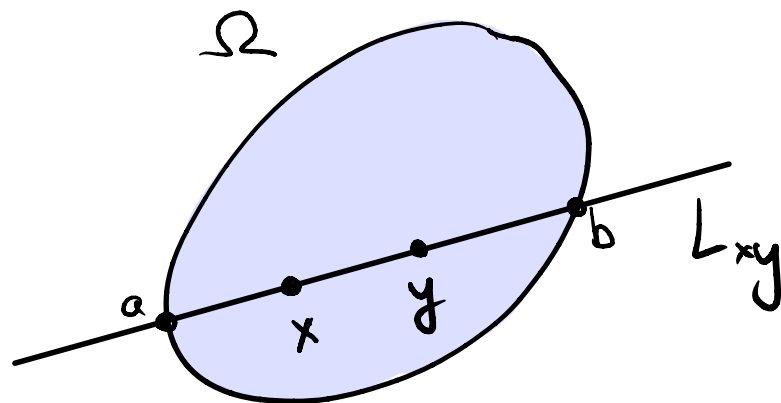
Géométrie de Hilbert sur des corps ordonnés non-archimédiens

(en collaboration avec Anne Parreau)

1) Métrique de Hilbert classique

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ouvert

— proprement convexe (= borné & convexe dans une carte affine)



$$\leadsto d_{\Omega}(x, y) := \log \underbrace{CR(a, x, y, b)}_{= \frac{\|y-a\|}{\|y-b\|} \cdot \frac{\|x-b\|}{\|x-a\|}} \in [0, \infty)$$

$$\text{Ex. } \Omega = \text{circle} \subset \mathbb{R}^{d+1} \leadsto (\Omega, \frac{1}{2} d_{\Omega}) \simeq (\mathbb{H}^d, d_{\text{hyp}})$$

(Modèle de Klein)

2) Corps ordonnés valués

K corps — ordonné ($<$: ordre total compatible avec $+$ et $\cdot$)

valué ($|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ valeur absolue t.q. $0 \leq a \leq b \Rightarrow |a| \leq |b|$)

Ex. i) $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, |\cdot|_{\mathbb{R}})$, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$

ii) $(\mathbb{R}(X), \frac{P}{Q} > 0 \Leftrightarrow \forall t \gg 0 \quad \frac{P}{Q}(t) > 0, \quad |\frac{P}{Q}| := e^{\deg P - \deg Q})$

iii) Corps de Robinson $\mathbb{R}_{\omega}^{\lambda} =$ cône asymptotique de $(\mathbb{R}, |\cdot|^{1/\lambda_n}, 0)$

$$\begin{cases} \lambda = (\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda_n \geq 1, \lambda_n \rightarrow +\infty \\ \omega \text{ ultrafiltre non-principal} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}_{\omega}^{\lambda} := \{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{\omega} |x_n|^{1/\lambda_n} < \infty \} / (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{\omega} |x_n - y_n|^{1/\lambda_n} = 0$$

$$\text{avec } <_{\mathbb{R}, \omega} \text{ et } |[x_n]| := \lim_{\omega} |x_n|^{1/\lambda_n} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

K — non-archimédien ($|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$; $\forall x \in \mathbb{Q} \subset K \quad |x| = 1$)

3) Métrique de Hilbert dans $\mathbb{P}\mathbb{K}^d$

$\mathbb{K}$ — corps ordonné valué

(topologie de $< \text{ ou } || \cdot ||$)

$\Omega \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^d$ proprement convexe 2 ouvert : ok.

But : définir d_Ω

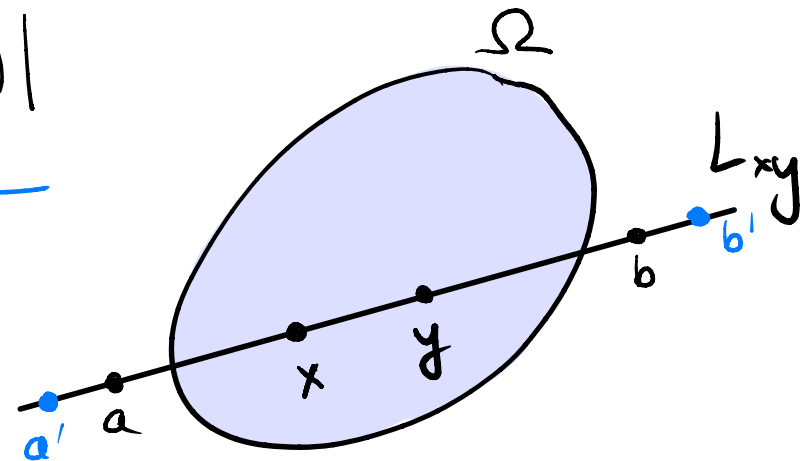
Problème : $\partial\Omega$

⚠ $\exists \Omega \subset \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ proprement convexe + g. $\Omega \neq$ intervalle

par ex. $\left\{ \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X) \mid \left| \frac{P}{Q} \right| < 1 \right\}$

$$\leadsto d_\Omega(x, y) := \sup_{a, b \in L_{xy} \setminus \Omega} \log \underbrace{\left| \underbrace{CR(a, x, y, b)}_{\in \mathbb{K}} \right|}_{\in \mathbb{R}}$$

$CR(a', x, y, b') \leq CR(a, x, y, b)$



(valable pour des corps valués quelconques : $\mathbb{Q}_p$ [Guilleaux], $\mathbb{C}$ [Faber-Guilleaux-Will])



d_Ω ne sépare pas les points

par ex. $\mathbb{K}$ non-archimédien  $\Omega = (-1, 1)$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \quad c = c_{\mathbb{R}}(-1, 0, x, 1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow |c| = 1.$$

$\leadsto$ espace métrique associé $X_\Omega := \Omega / d_\Omega = 0$

Ex. ($\mathbb{K}$ non-archimédien avec $|\cdot|$ surjective)

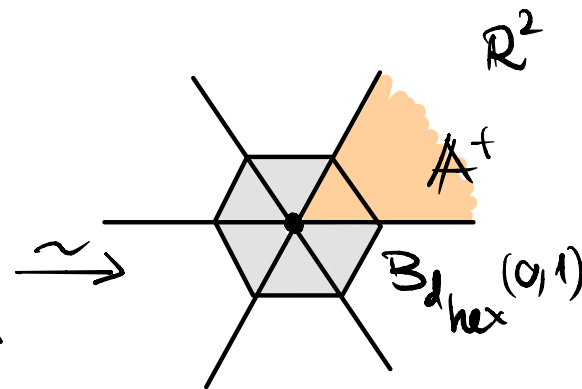
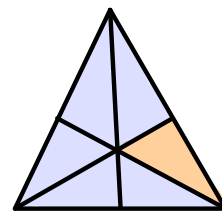
a) $\Omega = (a, b)_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log \frac{|x-b|}{|x-a|}$

$$\Rightarrow (X_\Omega, d_\Omega) \simeq (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$$

b) $\Omega = \triangle \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^{d+1}$ d -simplex

$$\Rightarrow (X_\Omega, d_\Omega) \simeq (\mathbb{R}^d, d_{\text{hex}})$$

$$|x|_{\text{hex}} := \max_{i,j} |x_i - x_j|$$



c) [Brunfiel]: $\Omega = \text{blue circle} \Rightarrow X_\Omega = \text{tree diagram}$

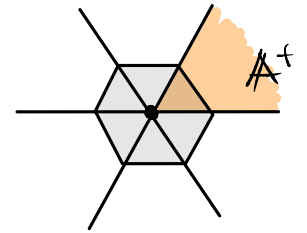
d) [F.-Parreau]: • $\Omega = d\text{-simplex}$

• $\Omega = \text{modèle projectif de l'espace sym. de } \text{SL}_n \text{ sur } \mathbb{F}$

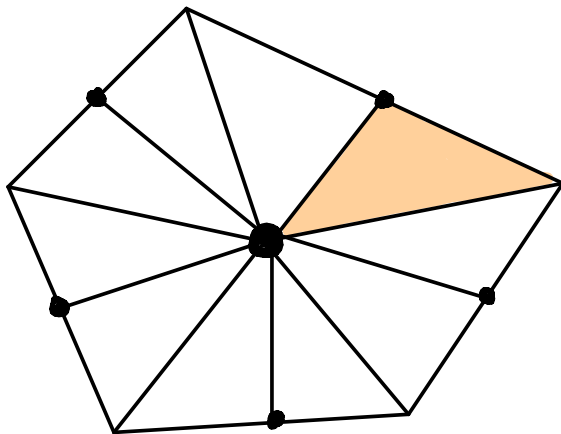
$\Rightarrow X_\Omega \simeq \mathbb{R}\text{-immeuble affine de } \text{SL}_n(\mathbb{F})$

• $\Omega = \text{polygones } \subset \mathbb{P}K^3 \text{ avec } n \text{ sommets à coeff. de } \mathbb{Q}$

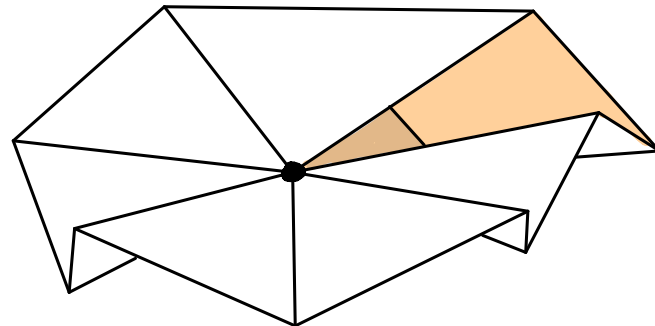
$\Rightarrow X_\Omega \simeq \text{bouquet de } 2n \text{ copies de } (\mathbb{A}^+, d_{\text{max}})$



$\mathbb{P}K^3$



$\simeq$



4) Cônes asymptotiques d'un convexe avec métrique de Hilbert

$$(\Omega_n \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^d, d_n := d_{\Omega_n}, o_n \in \Omega_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} \lambda = (\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda_n \geq 1, \lambda_n \rightarrow +\infty \\ \omega \text{ ultrafiltre non-principal} \end{cases}$$

"extrinsèque"

cône asympt.
des espaces
métriques

$$(\Omega_{\hat{\omega}}, d_{\hat{\omega}}, o_{\hat{\omega}})$$

espace métrique

cône asympt. de
 $(\mathbb{P}\mathbb{R}^d, d_{\mathbb{S}})$
 $\simeq \mathbb{P}(\mathbb{R}_{\hat{\omega}}^d)^d$
[Poncaré]

"intrinsèque"

$$\text{ulim } \Omega_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}_{\hat{\omega}}^d)^d$$

convexe

Thm [F.-Poncaré]. Si $\text{ulim } \Omega_n \subset$ carte affine & $[o_n] \in \text{Int}(\text{ulim } \Omega_n) =: \Omega$,

$$\text{alors } (\Omega_{\hat{\omega}}, d_{\hat{\omega}}) \simeq (X_{\Omega}, d_{\Omega}).$$