

SYSTÈMES DYNAMIQUES Corrigé DM 2

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

Perturbation des valeurs propres

1. On a

$$(A - \mu)(A - \lambda)[(A - \lambda)^{-1} - (A - \mu)^{-1}] = (A - \mu) - (A - \lambda) = (\lambda - \mu) \text{id}_n,$$

d'où

$$(A - \lambda)^{-1}(A - \mu)^{-1} = \frac{(A - \lambda)^{-1} - (A - \mu)^{-1}}{\lambda - \mu}. \quad (1)$$

2. Soient $\rho > \rho' > 0$ tels que $\overline{D}(\lambda, \rho) \cap \text{sp}(A) = \overline{D}(\lambda, \rho') \cap \text{sp}(A) = \{\lambda\}$. Alors $(z - A)^{-1}$ est bien défini, donc tous ses entrées sont holomorphes au voisinage de l'annulus $\{\rho' \leq |z - \lambda| \leq \rho\}$ (car elle sont des fonctions rationnelles). Il suit de la formule de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} (z - A)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} (z - A)^{-1} dz.$$

3. Soient $\rho > \rho' > 0$ comme dans la partie 2. On a

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} (z - A)^{-1} dz \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} (w - A)^{-1} dw \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho} \times \mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} (z - A)^{-1} (w - A)^{-1} dz dw \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho} \times \mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} \frac{(z - A)^{-1} - (w - A)^{-1}}{w - z} dz dw \quad (\text{partie 1.}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} \frac{dw}{w - z} \right) (z - A)^{-1} dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \frac{dz}{z - w} \right) (w - A)^{-1} dw. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho'}} \frac{dw}{w - z} = 0$ pour tout $z \in \mathcal{C}_{\lambda, \rho}$ et $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \frac{dz}{z - w} = 1$ pour tout $w \in \mathcal{C}_{\lambda, \rho'}$ par la formule de Cauchy. Il suit que $\Pi_\lambda^2 = \Pi_\lambda$.

4. On rappelle que la différentielle du déterminant en $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ est

$$M_n(\mathbf{C}) \ni H \mapsto \det(A) \text{tr}(A^{-1}H).$$

Ainsi, pour $d(z) = \det B(z)$, on a

$$d'(z) = \det B(z) \text{tr}(B(z)^{-1}B'(z)) = d(z) \text{tr}(B(z)^{-1}B'(z)).$$

5. Soit $B : \mathbf{C} \rightarrow M_n(\mathbf{C})$ définie par $B(z) := z - A$. Elle est holomorphe de dérivée $B'(z) = \text{id}_n$. Soit N l'ordre d'annulation de $d(z) := \det B(z)$ en λ , qui est la même chose que $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda, \mathbf{C}}$. On a

$$\text{tr } \Pi_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \text{tr}((z - A)^{-1}) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \text{tr}(B(z)^{-1} B'(z)) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \frac{d'(z)}{d(z)} dz$$

(partie 4.). Par la formule de Cauchy cette valeur est N . Observons que les entrées de $(z - \lambda)^N (z - A)^{-1}$ sont de la forme

$$\frac{(z - \lambda)^N}{d(z)} P(z), \quad P \in \mathbf{C}[z].$$

Il suit que ces entrées sont holomorphes au voisinage de λ . Ainsi

$$(\lambda - A)^N (z - A)^{-1} = (\lambda - z)^N (z - A)^{-1} + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (\lambda - z)^{N-k} (z - A)^{k-1}$$

a ses entrées holomorphes au voisinage de λ . En prenant ρ assez petit

$$(\lambda - A)^N \Pi_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} (\lambda - A)^N (z - A)^{-1} dz = 0.$$

Il suit que l'image de Π_λ est contenue dans $C_{\lambda, \mathbf{C}}$. De 3., on sait que Π_λ est un projecteur. Comme $\text{rang } \Pi_\lambda = \text{tr } \Pi_\lambda = N$, on a $\text{Im } \Pi_\lambda = C_{\lambda, \mathbf{C}}$.

6. De 5., Π_λ fixe les vecteurs dans $C_{\lambda, \mathbf{C}}$. Soient $\lambda, \mu \in \text{sp}(A)$, $\lambda \neq \mu$ et $\rho > 0$ tels que $\overline{D}(\lambda, \rho) \cap \text{sp}(A) = \{\lambda\}$, que $\overline{D}(\mu, \rho) \cap \text{sp}(A) = \{\mu\}$ et que $\overline{D}(\lambda, \rho) \cap \overline{D}(\mu, \rho) = \emptyset$. On a

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda \Pi_\mu &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} (z - A)^{-1} dz \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\mu, \rho}} (w - A)^{-1} dw \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho} \times \mathcal{C}_{\mu, \rho}} (z - A)^{-1} (w - A)^{-1} dz dw \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho} \times \mathcal{C}_{\mu, \rho}} \frac{(z - A)^{-1} - (w - A)^{-1}}{w - z} dz dw && \text{(partie 1.)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\mu, \rho}} \frac{dw}{w - z} \right) (z - A)^{-1} dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\mu, \rho}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} \frac{dz}{z - w} \right) (w - A)^{-1} dw \\ &= 0 \end{aligned}$$

par la formule de Cauchy. Ainsi les Π_λ , $\lambda \in \text{sp}(A)$ sont les matrices des projecteurs spectraux complexes associés à A .

7. Les coefficients de $(z - A)^{-1}$ sont holomorphes au voisinages de $U \setminus \bigcup_{\lambda \in \text{sp}(A) \cap U} \overline{D}(\lambda, \rho)$ pour ρ assez petit. Par la formule de Cauchy

$$\Pi_U := \sum_{\lambda \in \text{sp}(A) \cap U} \Pi_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{sp}(A) \cap U} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\lambda, \rho}} (z - A)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (z - A)^{-1} dz.$$

Comme U est compact, il existe un voisinage \mathcal{U} de A dans $M_n(\mathbf{C})$ tel que $\det(z - M)$ ne s'annule par sur ∂U pour tout $M \in \mathcal{U}$. Ainsi

$$\Pi_U(M) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(M) \cap U} \Pi_\lambda(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (z - M)^{-1} dz$$

définit une fonction à entrées holomorphes.

8. Pour $u \in C_{\lambda, \mathbf{R}}$, on a $\Pi_\lambda u = u$ (on peut voir u comme un vecteur dans \mathbf{C}^n , alors $u \in C_{\lambda, \mathbf{C}}$). De même, si $\mu \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ est différente de λ , on a $\Pi_\lambda u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu, \mathbf{R}}$. Finalement si $\mu \in \text{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$ et $u \in C_{\mu, \bar{\mu}}$, il existera $v \in \mathbf{C}^n$ tel que $u + iv \in C_{\mu, \mathbf{C}}$ et $u - iv \in C_{\bar{\mu}, \mathbf{C}}$. Ainsi $\Pi_\lambda(u + iv) = \Pi_\lambda(u - iv) = 0$, d'où $\Pi_\lambda u = 0$. On a montré que les vecteurs propres réels généralisés de A sont envoyés sur les vecteurs réels. Ainsi l'image de \mathbf{R}^n par Π_λ est contenu dans \mathbf{R}^n , donc les entrées de Π_λ sont réelles.
9. Dans 6., on a montré que $\Pi_\lambda \Pi_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$. Comme $\lambda \neq \bar{\lambda}$, on a

$$\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}}^2 = (\Pi_\lambda + \Pi_{\bar{\lambda}})^2 = \Pi_\lambda^2 + \Pi_{\bar{\lambda}}^2 = \Pi_\lambda + \Pi_{\bar{\lambda}} = \Pi_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Soit $u \in C_{\lambda, \bar{\lambda}}$. Soit $v \in \mathbf{R}^n$ tel que $u + iv \in C_{\lambda, \mathbf{C}}$ et $u - iv \in C_{\bar{\lambda}, \mathbf{C}}$. On a

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda, \bar{\lambda}} u &= \Pi_\lambda u + \Pi_{\bar{\lambda}} u \\ &= \frac{1}{2} \Pi_\lambda (u + iv) + \frac{1}{2} \Pi_\lambda (u - iv) + \frac{1}{2} \Pi_{\bar{\lambda}} (u + iv) + \frac{1}{2} \Pi_{\bar{\lambda}} (u - iv) \\ &= \frac{1}{2} (u + iv) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} (u - iv) \\ &= u. \end{aligned}$$

De même, si $\mu \in \text{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$ différente de λ et de $\bar{\lambda}$, on aura $\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}} u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu, \bar{\mu}}$. Si $\mu \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}$, on aura $\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}} u = 0$ pour tout $u \in C_{\mu, \mathbf{R}}$. Avec le même argument comme celui dans 8., on voit que les entrées de $\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}}$ sont réelles.

10. De 9., pour $\lambda \in \text{sp}(A) \setminus \mathbf{R}$, $\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}}$ est un projecteur d'image $C_{\lambda, \bar{\lambda}}$. Il suffit de montrer que le produit de deux matrices distinctes, choisies arbitrairement dans les matrices données, est 0.
- a. Si $\lambda, \mu \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ et $\lambda \neq \mu$, on a bien $\Pi_\lambda \Pi_\mu = 0$ (6.).
- b. Si $\lambda \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ et $\mu \in \text{sp}(A)$ avec $\Im \mu > 0$, on a

$$\Pi_\lambda \Pi_{\mu, \bar{\mu}} = \Pi_\lambda \Pi_\mu + \Pi_\lambda \Pi_{\bar{\mu}} = 0.$$

- c. Si $\lambda, \mu \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ avec $\Im \lambda > 0$ et $\Im \mu > 0$, on a

$$\Pi_{\lambda, \bar{\lambda}} \Pi_{\mu, \bar{\mu}} = \Pi_\lambda \Pi_\mu + \Pi_\lambda \Pi_{\bar{\mu}} + \Pi_{\bar{\lambda}} \Pi_\mu + \Pi_{\bar{\lambda}} \Pi_{\bar{\mu}} = 0.$$

On en déduit le résultat.

Classification topologique des flots contractants

11. On fixe $A \in M_n^-(\mathbf{R})$. Soient $z_1, \dots, z_k \in \mathbf{C}$ les racines de

$$P(z) := \det(z - A) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

de multiplicités respectives m_1, \dots, m_k . On fixe $\varepsilon > 0$ tels que les disques $\bar{D}(z_j, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, k$ soient deux à deux disjoints et n'intersectent pas l'axe imaginaire. Alors pour $j = 1, \dots, k$, P ne s'annule pas sur $\partial D(z_j, \varepsilon)$. On pose

$$\delta := \min_{1 \leq j \leq k} \min_{z \in \partial D(z_j, \varepsilon)} \frac{|P(z)|}{1 + \dots + |z|^{n-1}} > 0.$$

Soit \mathcal{U} un voisinage de A dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $B \in \mathcal{U}$, le polynôme caractéristique de B a pour la forme

$$\det(z - B) = Q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n, \quad \forall 1 \leq \ell \leq n, |b_\ell - a_\ell| < \delta.$$

Par conséquent, pour tous $1 \leq j \leq k$ et $z \in \partial D(z_j, \varepsilon)$

$$|Q(z) - P(z)| \leq \sum_{\ell=1}^n |b_\ell - a_\ell| |z|^{n-\ell} < \delta(|z|^{n-1} + \dots + 1) \leq |P(z)|.$$

Il suit du théorème de Rouché que Q a m_j racines dans $D(z_j, \varepsilon)$ (compté avec multiplicité) pour chaque $j = 1, \dots, k$. Ce sont toutes les racines de Q en raison de degré. Ainsi, si $\lambda \in \text{sp}(B)$, il existera $1 \leq j \leq k$ tels que $|\Re \lambda - \Re z_j| \leq |\lambda - z_j| < \varepsilon$. Il suit que $\Re \lambda < \Re z_j + \varepsilon \leq -\alpha(A) + \varepsilon$. Donc

$$-\alpha(B) = \max_{\lambda \in \text{sp}(B)} \Re \lambda < -\alpha(A) + \varepsilon < 0,$$

i.e. $\alpha(B) > \alpha(A) - \varepsilon$. De plus, supposons sans perte de généralité que $\Re z_1 = \max_{1 \leq j \leq k} \Re z_j = -\alpha(A)$. Soit $\lambda_1 \in D(z_1, \varepsilon) \cap \text{sp}(B)$, alors $|\Re \lambda_1 - \Re z_1| \leq |\lambda_1 - z_1| < \varepsilon$. Il suit que

$$-\alpha(B) = \max_{\lambda \in \text{sp}(B)} \Re \lambda \geq \Re \lambda_1 > \Re z_1 - \varepsilon = -\alpha(A) - \varepsilon,$$

i.e. $\alpha(B) < \alpha(A) + \varepsilon$. On conclut que $\mathcal{W} \subseteq M_n^-(\mathbf{R})$ et que pour tout $B \in \mathcal{W}$, $|\alpha(B) - \alpha(A)| < \varepsilon$. Ainsi, $M_n^-(\mathbf{R})$ est une partie ouverte de $M_n(\mathbf{R})$ et l'application $\alpha : M_n^-(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est continue.

12. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbf{R}^n . Pour $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, on définit

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\|_A := \sqrt{\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \|e^{sA}x\|^2 ds}, \quad (2)$$

qui est bien défini. En effet, soient $d \in]\beta(A), \alpha(A)[$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall s \geq 0, \quad \|e^{sA}x\| \leq C e^{-ds} \|x\|.$$

Alors

$$\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \|e^{sA}x\|^2 ds \leq C^2 \|x\|^2 \int_0^\infty e^{2s(\beta(A)-d)} ds = \frac{C^2 \|x\|^2}{2(d - \beta(A))} < +\infty.$$

De plus, (2) définit une norme. En effet, cette norme est induite par un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ défini par

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x, y \rangle_A = \int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \langle e^{sA}x, e^{sA}y \rangle ds.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x\|_A &= \sqrt{\int_0^\infty e^{2s\beta(A)} \|e^{(t+s)A}x\|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_t^\infty e^{2(u-t)\beta(A)} \|e^{uA}x\|^2 du} \\ &\leq \sqrt{e^{-2t\beta(A)} \int_0^\infty e^{2u\beta(A)} \|e^{uA}x\|^2 du} \\ &= e^{-t\beta(A)} \|x\|_A. \end{aligned}$$

Montrons finalement que l'application

$$M_n^-(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}, \quad (A, x) \mapsto \|x\|_A^2$$

est continue. Fixons $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Contrôlons tout d'abord le terme

$$\int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \|e^{sB}y\|^2 ds$$

pour M assez grand et (B, y) assez proche de (A, x) .

La matrice e^A est hyperbolique, à valeur propres ayant module au plus $e^{-\alpha(A)}$. D'après le cours, on sait (en utilisant la forme normale de Jordan) qu'il existe une norme adaptée $\|\cdot\|'$ sur \mathbf{R}^n tel que $\|e^A\|' < e^{-d}$ (rappelons que $\alpha(A) > d > \beta(A)$). Si B est assez proche de A , on aura $\|e^B\|' < e^{-d}$. Posons

$$C_1 := \max_{\substack{0 \leq \gamma \leq 1 \\ \|y\|' = 1}} e^{\gamma d} \|e^{\gamma} y\|' > 0.$$

Pour $s \geq 0$, écrivons $s = m + \gamma$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in [0, 1[$. On a, pour tout y tel que $\|y\|' = 1$ et tout $B \in M_n(\mathbf{R})$ assez proche de A

$$\|e^{sB} y\|' \leq \left(\|e^B\|' \right)^m \|e^{\gamma} y\|' < e^{-md} C_1 e^{-\gamma d} = C_1 e^{-sd}.$$

Il suit que, pour tout B assez proche de A

$$\forall y \in \mathbf{R}^n, \quad \|e^{sB} y\|' \leq C_1 e^{-sd} \|y\|'.$$

Finalement, soit $C_2 > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}^n, \quad \|y\| \leq C_2 \|y\|'.$$

Pour tout B assez proche de A est tout $y \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \|e^{sB} y\|^2 ds &\leq C_2^2 \int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \left(\|e^{sB} y\|' \right)^2 ds \\ &\leq C_1^2 C_2^2 \int_M^\infty e^{2s(\beta(B)-d)} \|y\|'^2 ds \\ &= \frac{C_1^2 C_2^2 (\|y\|')^2}{2(d - \beta(B))} e^{2M(\beta(B)-d)}. \end{aligned}$$

(car $\beta(B) < d$). Soit \mathcal{U} un voisinage de A dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que $d - \beta(B) \geq \rho$ pour tout $B \in \mathcal{U}$ et un certain $\rho > 0$ ne dépendant pas de B . Soit U un voisinage de x dans \mathbf{R}^n tel que $\|y\|' < 2\|x\|'$ pour tout $y \in U$. On a

$$\forall M > 0, \forall (B, y) \in \mathcal{U} \times U, \quad \int_M^\infty e^{2s\beta(B)} \|e^{sB} y\|^2 ds \leq \frac{2C_1^2 C_2^2 (\|x\|')^2}{\rho} e^{-2M\rho}.$$

On choisit $M_0 > 0$ tel que

$$\frac{2C_1^2 C_2^2 (\|x\|')^2}{\rho} e^{-2M_0\rho} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $(B, y) \in \mathcal{U} \times U$, on a

$$\left| \int_{M_0}^\infty e^{2s\beta(B)} \|e^{sB} y\|^2 ds - \int_{M_0}^\infty e^{2s\beta(A)} \|e^{sA} x\|^2 ds \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Quitte à choisir \mathcal{U} et U plus petit, on peut supposer que

$$\forall (s, B, y) \in [0, M_0] \times \mathcal{U} \times U, \quad \left| e^{2s\beta(B)} \|e^{sB} y\|^2 - e^{2s\beta(A)} \|e^{sA} x\|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{3M_0}.$$

Donc, pour (B, y) assez proche de (A, x)

$$\left| \int_0^{M_0} e^{2s\beta(B)} \|e^{sB} y\|^2 ds - \int_0^{M_0} e^{2s\beta(A)} \|e^{sA} x\|^2 ds \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On conclut alors que $\left| \|y\|_B^2 - \|x\|_A^2 \right| < \varepsilon$ si (B, y) est assez proche de (A, x) . Autrement dit, l'application $(A, x) \mapsto \|x\|_A$ est continue.

13. Soit $A \in M_n^-(\mathbf{R})$, on a $\alpha(A) > 0$ et $\beta(A) > 0$. Il suit que pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et tous $t > s \in \mathbf{R}$, on a

$$\|e^{tA}x\|_A = \left\| e^{(t-s)A} e^{sA}x \right\|_A \leq e^{(s-t)\beta(A)} \|e^{sA}x\|_A < \|e^{sA}x\|_A,$$

i.e. la fonction $t \mapsto \|e^{tA}x\|_A$ est décroissante et continue. De 12., on a

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{tA}x\|_A \leq e^{-t\beta(A)} \|x\|_A, \quad \|e^{-tA}x\|_A \geq e^{t\beta(A)} \|x\|_A.$$

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA}x\|_A = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|e^{tA}x\|_A = +\infty.$$

Il existe un unique $\tau_A(x) \in \mathbf{R}$ tel que $\|e^{\tau_A(x)}x\|_A = 1$, i.e. $e^{\tau_A(x)}x \in S_A$.

14. Montrons que l'application $(A, x) \mapsto \tau_A(x)$ est continue de $M_n^-(\mathbf{R}) \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ dans \mathbf{R} . Soit $A_n \rightarrow A$ et $x_n \rightarrow x$. On pose $t_n := \tau_{A_n}(x_n)$. Pour tout n , si $\|x_n\|_{A_n} \geq 1$, alors $t_n \geq 0$, donc $1 = \|e^{t_n A_n} x_n\|_{A_n} \leq e^{-t_n \beta(A_n)} \|x_n\|_{A_n}$. Il suit que $t_n \leq \frac{\ln \|x_n\|_{A_n}}{\beta(A_n)}$. Si $0 < \|x_n\|_{A_n} < 1$, alors $t_n < 0$, donc $1 = \|e^{t_n A_n} x_n\|_{A_n} \geq e^{-t_n \beta(A_n)} \|x_n\|_{A_n}$. Il suit que $t_n \geq \frac{\ln \|x_n\|_{A_n}}{\beta(A_n)}$. Dans tous cas, on a

$$\forall n, \quad |t_n| \leq \frac{|\ln \|x_n\|_{A_n}|}{\beta(A_n)},$$

(valable même si $x_n = 0$), qui converge vers $\frac{|\ln \|x\|_A|}{\beta(A)}$ (en particulier, il est borné). Donc la suite $(t_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence. Soit t une telle valeur. Alors $\|e^{tA}x\| = 1$. Par unicité de $\tau_A(x)$, on a nécessairement $t = \tau_A(x)$. Donc $\tau_A(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite $(t_n)_n$. Ainsi $\tau_{A_n}(x_n) \rightarrow \tau_A(x)$ comme désiré.

La même preuve donne $\tau_{A_n}(x_n) \rightarrow -\infty$ si $x = 0$. Ainsi $(A, x) \mapsto \varphi(A)(x)$ est continue $M_n^-(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

15. En effet, $\varphi(A)(x) = e^{\tau_A(x)} e^{\tau_A(x)A} x$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, car $e^{\tau_A(x)A} x$ est déjà dans S_A . Soit $\psi(A) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ donnée par $\psi(A)(0) = 0$ et $\psi(A)(y) = e^{-(\ln \|y\|_A)A} h_A(y)$. Bien sûr, $\psi(A)$ est continue en tout point de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. De plus, pour $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|y\|_A < 1$, on a $-\ln \|y\|_A > 0$, donc

$$\|\psi(A)(y)\|_A \leq e^{\ln \|y\|_A \beta(A)} \|h_A(y)\|_A = \|y\|_A^{\beta(A)} \rightarrow 0$$

quand $y \rightarrow 0$. D'où la continuité de $\psi(A)$ en 0.

Soit $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\|\varphi(A)(x)\|_A = e^{\tau_A(x)} \|e^{\tau_A(x)A}\|_A = e^{\tau_A(x)}$, donc

$$\begin{aligned} \psi(A)(\varphi(A)(x)) &= e^{-(\ln \|\varphi(A)(x)\|_A)A} h_A(\varphi(A)(x)) \\ &= e^{-\tau_A(x)A} \left(\frac{\varphi(A)(x)}{e^{\tau_A(x)}} \right) \\ &= e^{-\tau_A(x)A} \left(\frac{e^{\tau_A(x)} e^{\tau_A(x)A} x}{e^{\tau_A(x)}} \right) \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, pour tout $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, on voit facilement que

$$\left\| e^{(\ln \|y\|_A)A} \psi(A)(y) \right\|_A = \|h_A(y)\|_A = 1,$$

donc $\tau_A(\psi(A)(y)) = \ln \|y\|_A$. Il suit que

$$\begin{aligned} \varphi(A)(\psi(A)(y)) &= e^{\ln \|y\|_A} e^{(\ln \|y\|_A)A} \psi(A)(y) \\ &= \|y\|_A h_A(y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Donc $\varphi(A)$ est un homéomorphisme. De plus, pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbf{R}$

$$\left\| e^{(\tau_A(x)-t)A} e^{tAx} \right\|_A = 1,$$

donc $\tau_A(e^{tA}x) = \tau_A(x) - t$. Il suit que

$$\varphi(A)(e^{tA}x) = e^{\tau_A(x)-t} e^{(\tau_A(x)-t)A} e^{tAx} = e^{-t} e^{\tau_A(x)} e^{\tau_A(x)A} x = e^{-t} \varphi(A)(x).$$

Ainsi, $e^{-t}\varphi(A) = \varphi(A) \circ e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

16. Il suit de 15. que $\varphi(A)$ est une conjugaison entre les flots e^{tA} et $e^{-t \text{id}_n}$.

Stabilité structurelle des flots linéaires hyperboliques

17. On pose

$$\tilde{E}^s(A) := \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}_{>0}} C_{\lambda, \mathbf{R}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{sp}(A) \setminus \mathbf{R} \\ \Re \lambda > 0, \\ \Im \lambda > 0}} C_{\lambda, \bar{\lambda}} \right)$$

et

$$\tilde{E}^u(A) := \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(A) \cap \mathbf{R}_{<0}} C_{\lambda, \mathbf{R}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{sp}(A) \setminus \mathbf{R} \\ \Re \lambda < 0, \\ \Im \lambda > 0}} C_{\lambda, \bar{\lambda}} \right).$$

Alors $\mathbf{R}^n = \tilde{E}^s(A) \oplus \tilde{E}^u(A)$. Posons $A_s := A|_{\tilde{E}^s(A)}$ et $A_u := A|_{\tilde{E}^u(A)}$. On obtient $A_s \in M_{m(A)}^-(\mathbf{R})$ et $-A_u \in M_{n-m(A)}^-(\mathbf{R})$. De 12., on a $\tilde{E}^s(A) \subseteq E^s(A)$ et $\tilde{E}^u(A) \subseteq E^u(A)$, donc $\mathbf{R}^n = E^s(A) + E^u(A)$. De plus, si $x \in E^s(A) \cap E^u(A)$, on peut écrire $x = x_s + x_u$ avec $x_s \in \tilde{E}^s(A)$ et $x_u \in \tilde{E}^u(A)$. Il suit que

$$e^{tA_u} x_u = e^{tA} x_u = e^{tA} x - e^{tA} x_s \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Or $\|x_u\|_{-A_u} \leq e^{-t\beta(-A_u)} \|e^{tA_u} x_u\|_{-A_u} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $\|x_u\|_{-A_u} = 0$, i.e. $x_u = 0$. De même, $x_s = 0$ et on conclut que $x = 0$. Il suit que $E^s(A) \cap E^u(A) = \{0\}$ et on a une somme directe

$$\mathbf{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A).$$

En particulier, $E^s(A) = \tilde{E}^s(A)$ et $E^u(A) = \tilde{E}^u(A)$.

18. Soit U un ouvert borné de $\{z \in \mathbf{C}, \Re z < 0\}$ qui contient $\text{sp}(A) \cap \{z \in \mathbf{C}, \Re z < 0\}$. En utilisant les notations comme celles dans 7., on a $\pi_s(A) = \Pi_U(A)$. Le même argument avec le théorème de Rouché comme celui dans 11. nous donne un voisinage \mathcal{V} de A dans $M_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $B \in \mathcal{V}$, on a $B \in \text{Hyp}_n(\mathbf{R})$ et $\text{sp}(B) \cap \{z \in \mathbf{C}, \Re z < 0\} \subseteq U$. Soit \mathcal{U} un voisinage de A dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que toute matrice $B \in \mathcal{U}$ appartienne aussi à \mathcal{V} . Alors $\Pi_U(B) = \pi_s(B) \in M_n(\mathbf{R})$ pour $B \in \mathcal{U}$, et $\Pi_U : \mathcal{U} \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ définit une fonction continue, car elle est la restriction d'une fonction holomorphe. On en déduit que l'application $A \mapsto \pi_s(A)$ est continue de $\text{Hyp}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)^2$. Même argument pour $A \mapsto \pi_u(A)$.

19. Soit \mathcal{U} comme dans 18.. Puisque $\dim E^s(M) = \text{tr } \pi_s(M) \in \mathbf{N}$ et que $M \mapsto \pi_s(M)$ est continue, on a que $M \mapsto \dim E^s(M)$ est localement constante. Soit v_1, \dots, v_r une base de $E^s(A)$. Alors pour tout M assez proche de A , on a que la famille $(\pi_s(M)v_i)_{i=1, \dots, r}$ est libre (cette famille dépend continûment de M et vaut $(v_i)_{i=1, \dots, r}$ pour $M = A$). Puisque $\dim E^s(M) = \dim E^s(A)$ pour M assez proche de A , on a le résultat.

20. On fixe (u_1, \dots, u_r) une base de $E^s(A)$, que l'on complète en une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbf{R}^n . Alors pour tout M proche de A , la famille

$$\beta(M) = (\pi_s(M)u_1, \dots, \pi_s(M)u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

reste libre, ainsi que la famille

$$\tilde{\beta}(M) = (M\pi_s(M)u_1, \dots, M\pi_s(M)u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

puisque M préserve $E^s(M)$ et est inversible. On note $P(M)$ la matrice de $\beta(M)$ dans la base $\tilde{\beta}(M)$. Notons

$$P(M) = \begin{pmatrix} Q(M) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Alors par définition, la matrice de $q_s(M)M\pi_s(M)|_{E^s(A)}$ dans la base (u_1, \dots, u_r) est donnée par $Q(M)$. Il suffit donc de montrer que $M \mapsto Q(M)$ est continue. Ceci sera vrai si $M \mapsto P(M)$ l'est. Or on a (en identifiant les bases $\beta(M), \tilde{\beta}(M)$ avec les matrices les représentant dans la base canonique de \mathbf{R}^n)

$$P(M) = \beta(M)\tilde{\beta}(M)^{-1},$$

ce qui conclut puisque les applications $M \mapsto \beta(M), \tilde{\beta}(M)$ sont continues, et l'inversion est continue $\text{GL}(n, \mathbf{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbf{R})$.

21. Pour $M \in \mathcal{U}$, les valeurs propres de $M|_{E^s(M)}$ ont parties réelles négatives, celles de \tilde{M} aussi. On définit $\tilde{\Phi}_s : \mathcal{U} \times E^s(A) \rightarrow E^s(A)$ par

$$\forall(M, x_s) \in E^s(A), \quad \tilde{\Phi}_s(M, x_s) := \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\tilde{M})(x_s)$$

où l'homéomorphisme $\varphi(B) : E^s(A) \rightarrow E^s(A)$ est défini dans 15. pour chaque $B \in \mathcal{L}(E^s(A))$ ayant seulement les valeurs propres de partie réelle négative. Alors $\tilde{\Phi}_s(M, \cdot) = \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\tilde{M})$ est un homéomorphisme (en particulier, $\tilde{\Phi}_s(A, \cdot) = \text{id}_{E^s(A)}$). Soient $M \in \mathcal{U}$, $t \in \mathbf{R}$ et $x_s \in E^s(A)$. On a

$$\varphi(A)(e^{tA}\tilde{\Phi}_s(M, x_s)) = e^{-t}\varphi(A)(\tilde{\Phi}_s(M, x_s)) = e^{-t}\varphi(\tilde{M})(x_s) = \varphi(\tilde{M})(e^{t\tilde{M}}x_s).$$

Il suit que

$$e^{tA}\tilde{\Phi}_s(M, x_s) = \varphi(A)^{-1} \circ \varphi(\tilde{M})(e^{t\tilde{M}}x_s) = \tilde{\Phi}_s(M, e^{t\tilde{M}}x_s).$$

22. En remplaçant A par $-A$ dans 21. (et choisissant \mathcal{U} plus petit si nécessaire), on peut supposer que pour chaque $M \in \mathcal{U}$, $\pi_u(M)|_{E^u(A)} : E^u(A) \rightarrow E^u(M)$ soit un isomorphisme d'inverse $q_u(M)$ et qu'il existe un application continue $\tilde{\Phi}_u : \mathcal{U} \times E^u(A) \rightarrow E^u(A)$ vérifiant

$$\forall(M, t, x_u) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R} \times E^u(A), \quad e^{tA}\tilde{\Phi}_u(M, x_u) = \tilde{\Phi}_u(M, e^{t\tilde{M}}x_u)$$

où $\tilde{M} = q_u(M)M\pi_u(M)|_{E^u(A)}$, telle que $\tilde{\Phi}_u(M, \cdot) : E^u(A) \rightarrow E^u(A)$ soit un homéomorphisme pour tout $M \in \mathcal{U}$ et que $\tilde{\Phi}_u(A, \cdot) = \text{id}_{E^u(A)}$. On définit alors

$$\Phi_s : \mathcal{U} \times \mathbf{R}^n \rightarrow E^s(A), \quad (M, x) \mapsto \tilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)x)$$

$$\Phi_u : \mathcal{U} \times \mathbf{R}^n \rightarrow E^u(A), \quad (M, x) \mapsto \tilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)x)$$

et

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (M, x) \mapsto \Phi_s(M, x) + \Phi_u(M, x).$$

Pour chaque $M \in \mathcal{U}$, on note $\tilde{\Psi}_s(M, \cdot) : E^s(A) \rightarrow E^s(A)$ (resp. $\tilde{\Psi}_u(M, \cdot) : E^u(A) \rightarrow E^u(A)$) l'inverse de $\tilde{\Phi}_s(M, \cdot)$ (resp. de $\tilde{\Phi}_u(M, \cdot)$). Définissons

$$\Psi : \mathcal{U} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (M, x) \mapsto \pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, x_s) + \pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, x_u)$$

où $x_s = \pi_s(A)x$ et $x_u = \pi_u(A)x$, qui est continue. De plus

$$\begin{aligned}
\Psi(M, \Phi(M, x)) &= \Psi(M, \Phi_s(M, x) + \Phi_u(M, x)) \\
&= \pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, \Phi_s(M, x)) + \pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, \Phi_u(M, x)) \\
&= \pi_s(M)q_s(M)\pi_s(M)x + \pi_u(M)q_u(M)\pi_u(M)x \\
&= \pi_s(M)x + \pi_u(M)x \\
&= x
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Phi(M, \Psi(M, x)) \\
&= \Phi_s(M, \Psi(M, x)) + \Phi_u(M, \Psi(M, x)) \\
&= \tilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)\Psi(M, x)) + \tilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)\Psi(M, x)) \\
&= \tilde{\Phi}_s(M, q_s(M)\pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, x_s)) + \tilde{\Phi}_u(M, q_u(M)\pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, x_u)) \\
&= \tilde{\Phi}_s(M, \tilde{\Psi}_s(M, x_s)) + \tilde{\Phi}_u(M, \tilde{\Psi}_u(M, x_u)) \\
&= x_s + x_u \\
&= x.
\end{aligned}$$

On conclut que $\Phi(M, \cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est un homéomorphisme pour tout $M \in \mathcal{U}$, et qu'on a une application continue $\mathcal{U} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbf{R}^n)$, $M \mapsto \Phi(M, \cdot)$ (la topologie sur $\text{Homeo}(\mathbf{R}^n)$ est la topologie compacte-ouverte), car \mathcal{U} et \mathbf{R}^n sont localement compacts. De plus, $\Phi(A, \cdot) = \text{id}_{\mathbf{R}^n}$.

Finalement, soit $t \in \mathbf{R}$. On rappelle que

$$\tilde{\Psi}_s(M, e^{tA}x_s) = e^{t\tilde{M}}\tilde{\Psi}_s(M, x_s), \quad \tilde{\Psi}_u(M, e^{tA}x_u) = e^{t\tilde{M}}\tilde{\Psi}_u(M, x_u).$$

Pour tout $M \in \mathcal{U}$, les espaces $E^s(M)$ et $E^u(M)$ sont M -invariants, donc M commute avec les projecteurs $\pi_s(M)$ et $\pi_u(M)$. Il suit que

$$\begin{aligned}
&\Psi(M, e^{tA}x) \\
&= \pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, \pi_s(A)e^{tA}x) + \pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, \pi_u(A)e^{tA}x) \\
&= \pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, e^{tA}x_s) + \pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, e^{tA}x_u) \\
&= \pi_s(M)e^{t\tilde{M}}\tilde{\Psi}_s(M, x_s) + \pi_u(M)e^{t\tilde{M}}\tilde{\Psi}_u(M, x_u) \\
&= \pi_s(M)q_s(M)e^{tM}\pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, x_s) + \pi_u(M)q_u(M)e^{tM}\pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, x_u) \\
&= e^{tM}\pi_s(M)\tilde{\Psi}_s(M, x_s) + e^{tM}\pi_u(M)\tilde{\Psi}_u(M, x_u) \\
&= e^{tM}\Psi(M, x).
\end{aligned}$$

Ainsi $e^{tA}\Phi(M, x) = \Phi(M, e^{tM}x)$, i.e. on a donc une conjugaison $\Phi(M, \cdot)$ entre les flots e^{tA} et e^{tM} , qui varie continuellement en $M \in \mathcal{U}$ et $\Phi(A, \cdot) = \text{id}_{\mathbf{R}^n}$. En autres termes, le flot e^{tA} est structurellement stable.

Applications : conjugaisons en famille

23. On a discuté l'ouverture des \mathcal{U}_j , $j = 0, \dots, n$ dans **11.** Il reste à montrer leur connexité. Soit $I_j \in \mathcal{U}_j$ la matrice $\text{diag}[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$ (j entrées sont 1). Toute matrice $M \in \mathcal{U}_j$ s'écrit $M = PHP^{-1}$, où $H = \text{diag}[A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_u, D_1, \dots, D_v]$ telle que

- a. Les A_k ($1 \leq k \leq r$) sont les blocs de Jordan réels associés aux valeurs propres positives de M .
- b. Les B_k ($1 \leq k \leq s$) sont les blocs de Jordan complexes associés aux valeurs propres de partie réelle positive de M .

- c. Les C_k ($1 \leq k \leq u$) sont les blocs de Jordan réels associés aux valeurs propres négatives de M .
- d. Les D_k ($1 \leq k \leq v$) sont les blocs de Jordan complexes associés aux valeurs propres de partie réelle négative de M .
- e. La somme des tailles des A_k et B_k est $m(A)$.
- f. $\det(P) > 0$ (on peut remplacer P par $-P$ si nécessaire).

L'ensemble $\text{GL}_n^+(\mathbf{R})$ des matrices de déterminant positif est connexe par arcs, donc on peut trouver un chemin $p(t) : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n^+(\mathbf{R})$ tel que $p(0) = P$ et $p(1) = \text{id}_n$. Trouvons maintenant un chemin dans \mathcal{U}_j reliant H à I_j .

- a. Soit $1 \leq k \leq r$ et $A_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$. Le chemin

$$\forall t \in [0, 1] \quad a_k(t) := \begin{bmatrix} (1-t)\lambda + t & 1-t & & \\ & \ddots & & \\ & & & (1-t)\lambda + t \end{bmatrix}$$

relie $a_k(0) = A_k$ à $a_k(1) = \text{diag}[1, \dots, 1]$. De plus, les valeurs propres de $a_k(t)$ (qui sont $(1-t)\lambda + t$) sont positives pour tout $t \in [0, 1]$.

- b. Soit $1 \leq k \leq s$ et $B_k = \begin{bmatrix} Q & \text{id}_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & & Q \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a > 0$, $b \neq 0$. Le chemin $q(t) := \begin{bmatrix} (1-t)a + t & -b(1-t) & & \\ b(1-t) & (1-t)a + t & & \end{bmatrix}$ relie $q(0) = Q$ à $q(1) = \text{id}_2$. Ainsi, le chemin

$$\forall t \in [0, 1] \quad b_k(t) := \begin{bmatrix} q(t) & (1-t)\text{id}_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & & q(t) \end{bmatrix}$$

relie $b_k(0) = B_k$ à $b_k(1) = \text{diag}[1, \dots, 1]$. De plus, les valeurs propres de $b_k(t)$ (qui sont $(1-t)a + t \pm ib(1-t)$) sont de partie réelle positive pour tout $t \in [0, 1]$.

- c. De même, on peut trouver les chemins c_k reliant C_k à $\text{diag}[-1, \dots, -1]$ ($1 \leq k \leq u$) tel que les valeurs propres de $c_k(t)$ sont négatives pour tout $t \in [0, 1]$; et les chemins d_k reliant D_k à $\text{diag}[-1, \dots, -1]$ ($1 \leq k \leq v$) tel que les valeurs propres de $d_k(t)$ sont de partie réelle négative pour tout $t \in [0, 1]$.

Ainsi, on a un chemin

$$h := \text{diag}[a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_u, d_1, \dots, d_v] : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}_j$$

reliant $h(0) = H$ à $h(1) = I_j$. En conséquence, on a un chemin

$$\forall t \in [0, 1], \quad m(t) := p(t)h(t)p(t)^{-1} \in \mathcal{U}_j$$

reliant $m(0) = PHP^{-1} = M$ à $m(1) = I_j$ dans \mathcal{U}_j . Donc \mathcal{U}_j est connexe par arcs.

- 24.** De **22.**, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{U}_j$ de $M(s)$ et une application continue $\Phi_s : \mathcal{V}_s \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ telle que pour tout $s' \in [0, 1]$ avec $M(s) \in \mathcal{V}_s$, on ait une conjugaison $\Phi_s(s', \cdot)$ entre les flots $e^{tM(s)}$ et $e^{tM(s')}$; et que $\Phi_s(s, \cdot) = \text{id}_{\mathbf{R}^n}$.

Soient $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ tels que pour chaque $1 \leq k \leq m$, $M([s_{k-1}, s_k]) \subseteq \mathcal{V}_k := \mathcal{V}_{s_{k-1}}$ (par compacité et connexité). On note $\Phi_k := \Phi_{s_{k-1}}$ pour $1 \leq k \leq m$. On définit une application continue

$$F_k : [s_{k-1}, s_k] \rightarrow \text{Homeo}(\mathbf{R}^n), \quad s \mapsto \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \dots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ \Phi_k(s, \cdot).$$

pour chaque $1 \leq k \leq m$. Pour tout $(s, t) \in [s_{k-1}, s_k] \times \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
F_k(s) \circ e^{tM(s)} &= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ \Phi_k(s, \cdot) \circ e^{tM(s)} \\
&= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_{k-1}(s_{k-1}, \cdot) \circ e^{tM(s_{k-1})} \circ \Phi_k(s, \cdot) \\
&\vdots \\
&= \Phi_1(s_1, \cdot) \circ e^{tM(s_1)} \circ \cdots \circ \Phi_k(s, \cdot) \\
&= e^{tM(s_0)} \circ \Phi_1(s_1, \cdot) \circ \cdots \circ \Phi_1(s_1, \cdot) \\
&= e^{tA} \circ F_k(s).
\end{aligned}$$

Or, pour $1 \leq k \leq m-1$, on a $\Phi_{k+1}(s_k) = \text{id}_{\mathbf{R}^n}$, donc $F_k(s_k) = F_{k+1}(s_k)$. On peut définir donc une application continue $\Psi : [0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ en posant $\Psi(s, x) := F_k(s)(x)$ lorsque $s_{k-1} \leq s \leq s_k$. De plus,

$$e^{tA}\Psi(s, x) = e^{tA}F_k(s)(x) = F_k(s)(e^{tM(s)}x) = \Psi(s, e^{tM(s)}x).$$